数理解析研究所講究録
752巻 1991年 123-133

Hilbert modular group と Siegel modular group の保型因子

三重大・教育　露峰茂明 (Shigeaki Tsuyumine)

保型関数論は保型因子から始まる。新しい保型因子を見出すことにより保型関数論の可能性を拡げることが出来るかもしれない。これはひとつの試みであり、しかし正直の所まだそううまくいってはいない。

$\mathfrak{D} \subset \mathbb{C}^N$ を領域とし，Γ を $\mathfrak{D}$ に properly discontinuous に作用する正則自己同型群とする。このとき保型因子

$$\rho : \Gamma \times \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

とは $\gamma \in \Gamma$ を固定したとき $\rho(\gamma, z)$ $(z \in \mathfrak{D})$ は正則関数となり、$\rho(\gamma\gamma', z) = \rho(\gamma, \gamma' z)\rho(\gamma', z)$ $(\gamma, \gamma' \in \Gamma)$ を満たすものである。

$X = \mathfrak{D}/\Gamma$ とし以下を仮定する。X は normal quasi-projective variety であり，normal compactification X^* を持ち，$\mathrm{codim}\,(X^* - X) \geq 2$ である。保型因子は，(固定点の locus を除き) X 上の可逆層をもたらすが，これにより，保型因子全体のなす群は、大体 $\mathrm{Pic}\,(X)$ となる (cf [5]).

まず否定的な結果を述べる(今の立場からの"否定的"なものであって、実際良い結果と思う。)

<u>Siegel modular の場合。</u>

H_n を Siegel 空間とし, $\Gamma \subset Sp_{2n}(\mathbb{R})$ を $Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ と commensurable な群とする。Γ は H_n に

$$Z \longmapsto MZ = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$$

で作用する。Borel ([1], [2]) により

$$\dim H^2(\Gamma, \mathbb{R}) = 1 \qquad (n \geq 4)$$

であり従って、rank $\mathrm{Pic}(H_n/\Gamma) = 1$ $(n \geq 4)$ となる。これは保型因子が本質的には一種類であることを意味する。実際保型因子は, 自明な保型因子を除くと,

$$\rho(M, Z) = \chi(M)\, |CZ+D|^k$$

の形をしている, ここで χ は有限な character, k は有理数であるが, singular modular form の議論より $\frac{1}{2}$ の倍数であることが分かる。(自明な保型因子とは, H_n 上の 0 にはならない正則関数 $u(Z)$ に対し, $\rho(M, Z) = u(MZ)/u(Z)$ とかけるものである。)

<u>Hilbert modular の場合。</u>

K を totally algebraic number field で, $n = [K:\mathbb{Q}]$ とする。$\alpha \in K$ に対し, $\alpha^{(1)} (= \alpha), \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ は conjugate を表わす。$\Gamma \subset SL_2(K)$ を $SL_2(\mathcal{O}_K)$ と commensurable な群とする。

ここで，$\mathcal{O}_K$ は K の整数環を表している。Γ は n 個の上半平面の直積 H^n に

$$z=(z_1,\dots,z_n)\longmapsto Mz=\left(\frac{\alpha^{(1)}z_1+\beta^{(1)}}{\gamma^{(1)}z_1+\delta^{(1)}},\ \dots,\ \frac{\alpha^{(n)}z_n+\beta^{(n)}}{\gamma^{(n)}z_n+\delta^{(n)}}\right),$$

$$M=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\in\Gamma$$

により作用している。$n\geq 3$ に対し

$$\dim_{\mathbb{R}} H^2(\Gamma,\mathbb{R})=n$$

が Harder [4] によって示され，これを用いて Freitag [3] により

$$\mathrm{rank}\ \mathrm{Pic}(H^n/\Gamma)=n\qquad(n\geq 3)$$

が示された。$(H^n/\Gamma)^*$ で Satake compact 化を表すと，

$$\mathrm{rank}\ \mathrm{Pic}((H^n/\Gamma)^*)=1\quad(n\geq 3)$$

となる（loc. cit.）。これも保型因子は本質的に一種類であることを意味している。実際それらは

$$\rho(M,z)=\chi(M)\prod_{i=1}^{n}(\gamma^{(i)}z_i+\delta^{(i)})^k$$

の形をしている，ここで $\chi(M)$ は Γ の character であり，k は有理数である。この k の正の下限を Γ について具体的に求めることは一般には出来ていない（cf [6]）。

なお上で"一種類"と述べたのは，代数的な保型因子，即ち代数的な可逆層に対応するものについてのもので，代数的か否かを問わなければ，

$$\rho(M, z) = \gamma^{(i)} z_i + \delta^{(i)} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

等も保型因子である。これらに対応する層はカスプの所で拡げられない。

3次の Siegel modular の場合

4次以上の Siegel modular の場合 保型因子は本質的に一種類である。3次の場合は代数的な保型因子に限れば同様のことが証明できる，即ち $\Gamma_3(l)$ を level l の principal congruence subgroup とした場合

$$\text{group of automorphy factors} \cong \mathbb{Z} \oplus \Gamma_3(l) / [\Gamma_3(l), \Gamma_3(l)].$$

この証明の概略を述べる。

ρ_1, ρ_2 を $\Gamma_3(l)$ の保型因子とし，対応している可逆層は $H_3/\Gamma_3(l)$ の compact 化したものの上の Cartier divisor であるとする。cusp を stabilize する元 $M_0 = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ に対し $\rho_1(M_0, z) = 1$, $\rho_2(M_0, z) = 1$ としてよい（カスプの所で対応する層が Cartier divisor であることから）。K を3次の totally real algebraic number field とする。十分小さい $\mathcal{O}_K$ の ideal $\mathfrak{a}$ を取って modular embedding

$$H^3 \hookrightarrow H_3$$

と対応する準同型

$$\Gamma(\mathfrak{a}) \hookrightarrow \Gamma_3(l)$$

を得る，ここで $\Gamma(\mathfrak{a})$ は $SL_2(\mathcal{O}_K)$ の level $\mathfrak{a}$ の principal congruence subgroup である。ここで $(i\lambda, i\lambda, i\lambda)$ の像の $\lambda \to \infty$ のときの行き先は $i\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $(\lambda\to\infty)$ のカスプであるとしておいてよい。ρ_1, ρ_2 をこの H^3の像の上で考えると、それらは $\Gamma(\mathfrak{n})$ の保型因子となっている。$n=3$ のときの Hilbert modular の場合の結果を用いて、ρ_1, ρ_2 の各々の何乗かは、制限すると

$$\prod_{i=1}^{3}(\gamma^{(i)}z_i+\delta^{(i)})^{r_1}, \quad \prod_{i=1}^{3}(\gamma^{(i)}z_i+\delta^{(i)})^{r_2}$$

の形となる。さらに ρ_1, ρ_2 の適当な巾乗を取ることにより H^3の像の上では $\rho_1=\rho_2$ としてよい。ここで Kを取りかえることにより H^3の様々な modular embedding の像の上で上のことがいえる。この様々な像は diagonal (z, z, z) で一致しており、結局

$$\rho_1(M,z)=\rho_2(M,z) \qquad M\in\Gamma(\mathfrak{n}) \text{ の image}$$
$$z\in H^3 \text{ の image.}$$

特に

$$M=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a&&&b&&\\ &a&&&b&\\ &&a&&&b\\ \hline c&&&d&&\\ &c&&&d&\\ &&c&&&d \end{array}\right), \qquad \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_1(\ell)$$

は常に $\Gamma(\mathfrak{n})$ の像にあるので、このような M に対し $\rho_1(M,z)=\rho_2(M,z)$ ($z\in$ すべての modular embedding の像) がいえる。modular embedding による H^3の像全体は H_3 の内で dense であり、よって等式は H_3 上で成り立っており、

また $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ と M の形をした元で $\Gamma_3(l)$ の有限位数の部分群を生成する。よって再び ρ_1, ρ_2 を何乗かすることによって $\rho_1 = \rho_2$ を得る。これで保型因子の群の rank は 1 であることが示された。あとは $\Gamma_3(l)$ の指標の分であり、これが有限群 $\Gamma_3(l)/[\Gamma_3(l) : \Gamma_3(l)]$ に対応している。

以下で新しい保型因子について述べる。今までのことから 3 次以上の Siegel modular の場合と Hilbert modular の場合は除外される。

<u>2 次の Siegel modular の場合</u>

H_2 の点が reducible であるとは Γ_2 $(= Sp_4(\mathbb{Z}))$ の元で $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ の形に移ることである。reducible loci は H_2 の余次元 1 の closed analytic subset である。$\Gamma_2(l)$ を level l の principal congruence subgroup としたとき、$H_2/\Gamma_2(l)$ の中の reducible locus の数は

$$\frac{[\Gamma_2 : \Gamma_2(l)]}{[\Gamma_1 : \Gamma_1(l)]^2} = l^4 \prod_{p|l} (1 + p^{-2})$$

であり、$l \to \infty$ とすると無限に大きくなる。

$2 | l$ であるとき、すべての reducible locus の和の divisor は even characteristic の thetanullwert の積の divisor となることが知られている。特に

$\mathcal{O}$ (reducible loci) $\longleftrightarrow$ sheaf of modular forms of weight 5

i.e, ρ such that

$\rho(M, Z) = |CZ+D|^5$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$,

一方各 reducible locus は $(H_2/\Gamma_2(l))^*$ の Cartier divisor であり、よってこれに付随してある保型因子が定まるが、これが普通の $|CZ+D|^k$ の形をしていることは l が十分大きくなると不可能である。実際もしこの形をしていると、

$k \times$ (reducible locus の個数) $= 5$

となるが、このとき k は $\frac{1}{2}$ の倍数でなければならず、l が十分大きくなるとこれは不可能である。

以上より2次の Siegel modular の場合は良く知られているもの以外の保型因子が存在し、それは reducible locus に注目すれば得られることが分かった。

しかし、その具体的な形はまだ分かっていない。新しい保型関数論を行うには具体的な形が是非必要となる訳であり、存在性だけでは何もできない。

2次の Hilbert modular の場合

H^2 の点 $z = (z_1, z_2)$ が reducible であるとは $SL_2(\mathcal{O}_K)$ の元で $(z_3, z_3) \in H^2$ という点に移ることである。上の場合同様 H^2 の reducible locus は余次元1の closed analytic subset となる。$\mathfrak{a}$ を $\mathcal{O}_K$ の ideal とし $\Gamma(\mathfrak{a})$ を level $\mathfrak{a}$

の principal congruence subgroup $\{M \in SL_2(\mathcal{O}_K) \mid M \equiv 1_2 \pmod{\mathfrak{a}}\}$ とする。今 A で $\mathfrak{a}$ に含まれる有理整数で正のもののうちの最小のものとする。t を $H^2/\Gamma(\mathfrak{a})$ の reducible loci の irreducible component の個数とすると,

$$t = \frac{[SL_2(\mathcal{O}_K) : \Gamma(\mathfrak{a})]}{[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_1(A)]}$$

である。D を $H^2/\Gamma(\mathfrak{a})$ の reducible loci の irreducible component とし，これに付随する保型因子を ρ とする。$\mathfrak{a}$ を適当に取ると ρ は "普通の" $\prod(\gamma^{(i)} z_i + \delta^{(i)})^k$ の形であり得なくなることが分かる。もしそうならば reducible locus の irreducible component はすべて linear equivalent であり $tD \sim$ (全部の reducible loci) $\sim$ "普通の" modular form の sheaf.

$$(tD)\cdot(tD) = (\text{fixed integer}) \times [SL_2(\mathcal{O}_K) : \Gamma(\mathfrak{a})]$$

($tD \cdot tD$ は Hilbert modular form の次元公式の main term である。) よって

$$D \cdot D = (\text{fixed integer}) \cdot \frac{[SL_2(\mathcal{O}_K) : \Gamma(\mathfrak{a})]}{t^2}.$$

ここで例えば $\mathfrak{a}$ を

$$\mathfrak{a} = \left(\prod_{i=1}^{s} p_i\right), \quad p_1, \ldots, p_s \text{ は 2次の素数} \in \mathbb{Z}$$

ととれば,

$$D\cdot D = (\text{fixed integer}) \times \prod_i \frac{p_i^2-1}{p_i^2+1}$$

この右辺は常に整数という訳にはいかない。よって次が示せた。

イデアル $\mathfrak{n}\subset\mathcal{O}_K$ が存在して，f を $\Gamma(\mathfrak{n})\cdot\{z\in H_2 \mid z=(z_1,z_1)\}$ のみで一位に消える H^2 上の正則関数とすると（H^2 は Cousin II-domain であり，このような f は存在する）

$$\rho(M,z) := f(Mz)/f(z) \qquad M\in\Gamma(\mathfrak{n})$$

は"普通の"保型因子ではない。完全には証明できていないが，"普通でない"保型因子は $\overline{H^2}(\subset\mathbb{C}^2)$ 上で有理型関数ではあり得ないと思われる。

このような保型因子をひとつ構成する。

$$S=\{M^{-1}M' \mid M\in SL_2(\mathcal{O}_K)\} \quad (M' \text{ は } M \text{ の conjugate})$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha\delta-\beta\gamma=1,\ \alpha'=\delta,\ \beta'=-\beta,\ \gamma'=-\gamma\right\}$$

とおく。このとき

$$z=(z_1,z_2) \text{ reducible} \iff \exists M\in SL_2(\mathcal{O}_K) \text{ such that } M\cdot z_1=M'z_2$$
$$\iff z_1=N\cdot z_2 \quad (N\in S).$$

である。$z_1\in H$ に対し $Sz_1\subset H$ は H の discrete な部分集

合となっている。

以下、Hの代わりに単位円Δを用いることにする。点はすべてΔのものであり、$SL_2(\mathfrak{O}_K)$ の元の作用はすべて対応するものに読みかえることとする。

$S(\mathfrak{a}) = \{M^{-1}M' \mid M \in \Gamma(\mathfrak{a})\} = \{1_2, M_1, M_2, \dots\}$ とする。

実数 R $(0<R<1)$ を固定すると、$\forall \varepsilon > 0$ with $R+\varepsilon<1$ に対し

$$\left|\frac{z_1 + M_k(-M_k^{-1}z_1)}{M_k z_2 + M_k(-z_2)}\right| < \frac{R}{2R+\varepsilon} \qquad (|z_1|<R,\ |z_2|<R)$$

が殆んどすべての k について成立する。Weierstrass factorization theorem と同様の手法を使って

$$E_k(w) = (1-w)\exp\left(w+\frac{w^2}{2}+\cdots+\frac{w^k}{k}\right),\quad (k \geq 1)$$

とおく。さらに

$$f(z) = (z_1-z_2)\prod_{k=1}^{\infty} E_k\left(1-\frac{z_1+M_k(-M_k^{-1}z_1)}{M_k z_2+M_k(-z_2)}\right)$$

とおくとこれはΔ上局所一様収束し、消えるのは $\Gamma(\mathfrak{a})\bullet\{z=(z_1,z_2) \mid z_1=z_2\}$ のみである。

$$\rho(M,z) = f(Mz)/f(z), \quad M \in \Gamma(\mathfrak{a})$$

とおけばこれは新しい保型因子である。しかしこれはまだ計算に適す形をしていないと思われる。

参考文献

1. Borel, A. Stable real cohomology of arithmetic groups, Ann. Sci. E.N.S. Paris (4) 7, (1972) 1700 − 1702.
2. Borel, A. Stable real cohomology of arithmetic groups II, Progress in Math 14, Birkhäuser (1981) 21 − 55
3. Freitag, E. Automorphy factors of Hilbert's modular group, in the book Discrete Subgroups of Lie Groups and Applications to Moduli, Tata (1975), 9 − 19
4. Harder, G On the cohomology of SL(2, O), in the book Lie Groups and their Representations. John Wiley and Sons (1975) 139 − 150
5. Tsuyumine S, Factorial Property of a ring of automorphic forms, Trans AMS (1986), 111 − 123
6. Tsuyumine, S. Automorphy factors for a Hilbert modular group, Glasgow Math. J. 30 (1988) 231 − 236.