

Positive definite quadratic lattices with trivial automorphism groups

福工大非常勤講師 坂内 悦子 (Etsuko Bannai)

準備

W を有理数体 \mathbb{Q} 上の m 次元 quadratic space とする。 Q を W 上の quadratic form B を \mathbb{Q} に付随した $W \times W$ 上の bilinear form とする。 すなわち $Q(x+y) = Q(x) + Q(y) + 2B(x, y)$ が成立している。 L を W の \mathbb{Z} -submodule とする。 W の base x_1, \dots, x_m が存在して $L = \mathbb{Z}x_1 + \dots + \mathbb{Z}x_m$ と書ける時 L を W の quadratic lattice と言う。 以下では単に lattice と呼ぶ事にする。 この時 $m \times m$ 行列 $(B(x_i, x_j))$ の行列式 dL は base のとり方によらずに求まる。 この dL を L の discriminant と呼ぶ。 以下では $dL \neq 0$ の場合のみ考える。

\mathbb{Q} の部分集合 $B(L, L)$ で生成される \mathbb{Z} -module sL を L の scale, $Q(L) (\subseteq B(L, L))$ で生成される \mathbb{Z} -module を L の norm と呼ぶ。 $(dL)\mathbb{Z} = (sL)^m$ を満たす

時に、 L は $\mathcal{N}L$ -modular であると言う。特に $dL = \pm 1$, $\mathcal{N}L = \mathbb{Z}$ の時に L は unimodular であると言う。unimodular lattice L は $2\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{N}L$ を満たしているが $\mathcal{N}L = \mathbb{Z}$ の時に odd lattice, $\mathcal{N}L = 2\mathbb{Z}$ の時に even lattice と呼ぶ。

p を有理数体 \mathbb{Q} の prime spot とする。 \mathbb{Q} の p での completion を \mathbb{Q}_p とする。 p が finite prime の時 \mathbb{Q}_p は p -adic number field である。 \mathbb{Z}_p をその p -adic integer のなす ring とする。この時 W と L の局所化をそれぞれ $W_p = W \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$, $L_p = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ とする。 L_p の scale, norm, $\mathcal{N}L_p$ -modular 等の言葉を前と同様に定義する。 dL_p はこの場合 modulo square で定まる。

次に lattice L の genus G_L とは次の性質をみたす W の lattice M の全体を言う。すなわち任意の finite prime p に対して直交群 $O(W_p)$ の元 σ_p が存在して $M_p = \sigma_p L_p$ が成立する。また lattice L の class clL とは次の条件をみたす lattice M の全体を言う。すなわち直交群 $O(W)$ の元 σ が存在して $M = \sigma L$ をみたす。 G_L に含まれる class の個数が有限である事は良く知られている。以上さらに一般的又は詳しい事は O'Meara の本 ([5]) を参照されたい。

さて以下においては quadratic space W は positive

definiteであると仮定し W の lattice L としては integral すなわち $L \subseteq \mathbb{Z}$ なるものをあつかう。

W の任意の lattice を M とするとその直交群 $O(M) = \{ \sigma \in O(W) \mid \sigma M \subset M \}$ は有限群である事が知られている。

この時 genus G_L の mass を $w(L) = \sum_{L \subseteq M \subseteq G_L} \frac{1}{|O(M)|}$ で定義する。

本論

以下に述べる事は Hsia による次の予想 ([3]) に対する部分的な解答である。

予想 任意の positive definite integral lattice の genus の中に直交群が trivial (i.e. $\{\pm 1\}$) となるものが存在する。

以下に述べる定理 1, 2 は unimodular な lattice に関するものであり定理 3 は discriminant が 1 でないものへの部分的拡張である。定理 1, 2 の証明は [1] を参照されたい。

定理 1 直交群が trivial な rank m の positive definite unimodular lattice が存在する。ここで m は odd の場合は $m \geq 43$, even lattice の場合は $m \geq 144$ なる任意の整数である。

定理2 L を rank m の positive definite unimodular lattice, $w = \Gamma_L$ の mass $= w(L)$, $w' =$ 直交群が trivial でない lattice の class の mass $= \sum_{\substack{d \leq M \leq GL \\ |O(M)| \geq 2}} 1 / |O(M)|$ とする。

この時次の (i), (ii) が成立する。

(i) L が odd lattice かつ $m \geq 43$ ならば

$$w'/w < 30(\sqrt{2\pi})^m / \Gamma(\frac{m}{2})$$

(ii) L が even lattice かつ $m \geq 144$ ならば

$$w'/w < 2^{m+1}(\sqrt{2\pi})^m / \Gamma(\frac{m}{2})$$

ここで Γ は Gamma function である。

定理2 からわかる様に w'/w は m が増加するにつれて急速に 0 に近づく。定理1 は定理2 の系である。定理2 の証明は $M \in GL$, $q \mid O(M)$ (q は prime または 4) なる M から $\mathbb{Z}[3]$ -hermitian integral lattice を構成して w' の上限をそれ等の hermitian lattice の mass を使って計算する事によってなされた。(ここでは 1 の原始 q 乗根) mass の計算には Siegel の mass formula の orthogonal, unitary 両方の場合を用いた ([8], [7])。

直交群が trivial である lattice に関しては以下の結果がこれまでに得られている。

O'Meara(1975[6]) 与えられた lattice からこの様な lattice を作る algorithm を与えた。

Biermann(1981[2]) m を固定した時に discriminant が m だけに依存したある定数 ($\gg m$) より大きければすべての positive definite integral \mathbb{Z} -lattice の genus はこの様な lattice を含む事を示した。

Mimura(1990[4]) rank が 36 と 40 の odd unimodular lattice, rank 40 の even unimodular lattice で直交群が trivial なものを具体的に構成した。

定理 2 の式を使えば、直交群が trivial な unimodular lattice の class の個数は非常に大きい事が容易に計算できるが unimodular な場合には知られている例は味村氏のこの三つの例だけである。又定理 2 により直交群が trivial な lattice の class の全体に対する mass の比は m が増加するにつれて 1 に近づく事がわかるが class number の比としては評価できないでいる。

rank m が小さい時にはその様な lattice が存在しない場合がある。例えば良く知られている rank 24 の even unimodular lattice の分類によるとそのすべての lattice の直交群は trivial ではない。

以上今までに知られている結果を述べて来たが、次に関心が持たれるのは unimodular でない場合、Biermann の結果を改良する事である。次の定理 3 はその部分的な解答を与える。

定理 3 L を rank m の positive definite integral lattice とする。今任意の finite prime p に対して L_p の Jordan 分解が (p の偶数中) \mathbb{Z}_p -modular なものだけしか含まないと仮定する。この時 m が充分大きければ、 L の中に直交群が trivial な lattice が存在する。(さらに詳しく言うと L_2 の Jordan 分解の factor の中に scaling による 2 odd unimodular になるものがある場合は $m \geq 43$, scaling による 2 even unimodular になる場合には $m \geq 144$ なる 2 の m について定理 3 は正しい。)

この定理の証明は Watson による class number を増加させない変換 ([9]) を用いて unimodular な場合に帰着させる事による。Watson の論文は lattice の言葉を用いずに書かれているので、ここでそのあらましを lattice の言葉を用いて説明する事にする。

$p \mid dL$ とする。この時 L_p の Jordan 分解を $L_p = (L_p)e_1 \perp (L_p)e_2 \perp \dots \perp (L_p)e_\lambda$ とする。ここで 各 $(L_p)e_i$

は $p\mathbb{Z}_p$ -modular な sublattice である。定理の仮定より $2|e_i$, $i=1, \dots, \lambda$, $0 \leq e_1 < e_2 < \dots < e_\lambda$ である。今 $L = \{x \in L \mid B(x, L) \in p\mathbb{Z}\}$ とする。 $W \times W$ 上に新しく bilinear form $B'(x, y) = \frac{1}{p} B(x, y)$ を考へる。 W' をこの B' による quadratic space とすると L' は W' の integral lattice になる。 (W と W' は \mathbb{Q} 上の quadratic space としては同型である) L' を W' の lattice として見た時に L'_p の Jordan 分解は $(L'_p)_{e_1} \perp (L'_p)_{e_2} \perp \dots \perp (L'_p)_{e_\lambda}$ と存在することが容易にわかる。 ここで $(L'_p)_{e_i}$, $2 \leq i \leq \lambda$ は $p^{e_i+1}\mathbb{Z}_p$ -modular な lattice であり $e_i = 0$ ならば $e'_i = 1$, $e_i \geq 2$ ならば $e'_i = e_i - 1$ である。 L' に同様の変換を行ったものを L'' とする。 L'' の Jordan 分解は $L''_p = (L''_p)_{e''_1} \perp (L''_p)_{e''_2} \perp \dots \perp (L''_p)_{e''_\lambda}$ でありここで $e_i = 0$ の時 $e''_i = 0$, $e_i \geq 2$ の時 $e''_i = e_i - 2$ である。

この様に Watson の変換を各 $p|d|L$ について行くと偶数回の変換で unimodular な Lattice \tilde{L} を得る。この時次の補題が成立する。

補題 (i) G_L に含まれる任意の lattice M は $G_{\tilde{L}}$ に含まれるある lattice \tilde{M} に変換される。

(ii) $G_{\tilde{L}}$ に含まれる任意の lattice \tilde{M} は G_L に含まれるある lattice M を変換する事によつて得られる。

(iii) L_2 の Jordan 分解を $(L_2)_{e_1} \perp \dots \perp (L_2)_{e_\lambda}$ と

した時に scaling によ, Γ odd unimodular になる $(L_2)_{e_i}$ が存在するならば $\hat{\Gamma}$ は odd unimodular lattice でありそうでない時 (任意の $(L_2)_{e_i}$ が scaling によ, Γ even unimodular になる時) は $\hat{\Gamma}$ は even unimodular になる。

補題の詳しい証明は Watson [9] を参照されたい。

定理 3 はこの補題と定理 1 によ, Γ 証明される。まず定理 1 によ, $\Gamma \tilde{M} \in GL_n$ かつ $O(\tilde{M}) = \{\pm 1\}$ なる lattice \tilde{M} が存在する。補題によ, $\Gamma \tilde{M}$ は GL_n のある lattice M を変換する事によ, Γ 得られる。今 $\alpha \in O(M)$, M' を M に Watson の変換を一回行, たものとする。この時任意の $x \in M'$ に対して $B(\alpha x, M) = B(x, \alpha^{-1}M) = B(x, M) \in p\mathbb{Z}$ が成立するから $\alpha x \in M'$ である。すなわち $O(M) \subseteq O(M')$ を得る。 \tilde{M} はこの変換を有限回行な, Γ 得られる lattice であるから $O(M) \subseteq O(\tilde{M})$ は自明である。従, $\Gamma O(M)$ は trivial group である。

Γ が定理 3 の条件をみたさない時には Watson の変換によ, Γ いちゆる almost unimodular な lattice $\hat{\Gamma}$ に変換される。(i.e. $p \mid d\hat{\Gamma}$ なる任意の p に対して $\hat{\Gamma}_p$ の Jordan 分解は (unimodular) \perp ($p\mathbb{Z}_p$ -modular) となる。) almost

unimodular な lattice についても同様な結果が得られる事が予想されるが今の所1つだけ克服できない困難があり証明できないでいる。代数体上の quadratic space の lattice についても同様な事が予想される。

文献

1. Bannai, E : Positive definite unimodular lattices with trivial automorphism groups, *Memoirs of A.M.S.* vol. 85 no. 429 (1990).
2. Biermann, J : Gitter mit kleiner Automorphismengruppe in Geschlechtern von \mathbb{Z} -Gittern mit positive definiten quadratischen Form (Diss), Göttingen (1981).
3. Hsia, J. S. : Arithmetic theory of integral quadratic forms, *Proceedings of the Queen's Number Theory Conference, 1979*, Ed. P. Ribenboim, vol. 54, pp. 173-204.
4. Mimura, Y : Explicit examples of unimodular lattices with the trivial automorphism group, preprint (1990).
5. O'Meara, O.T. : *Introduction to Quadratic Forms*, Springer-Verlag, New York, 1963
6. ——— : The construction of indecomposable positive definite quadratic forms, *J. Reine Angew. Math.* 276

(1975), pp. 99-123.

7. Rehmann, U : Klassenzahlen einiger totaldefiniter klassischer Gruppen über Zahlkörpern (Diss), Göttingen, 1971.
8. Siegel, C.L. : Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, *Annals of Math.* 36(1935), pp. 527-606.
9. Watson, G.L. : Transformations of a quadratic form which do not increase the class-number, II, *Acta Arith.* 27(1975), pp. 171-189.