数理解析研究所講究録
752巻 1991年 101-105



# Euler Products for Multiple Zeta Functions

東工大・理 黒川信重 (Nobushige Kurokawa)

多重ゼータ関数の「オイラー積表示」を多重双曲正弦関数の場合に述べる。

$r$個のゼータ関数 $Z_i(s)$ $(i=1,\cdots,r)$ が有理型関数で

$$Z_i(s) = \prod_{\rho \in \mathbb{C}} (s-\rho)^{m_i(\rho)}$$

と重複度関数 $m_i : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{Z}$ によって表示されているとき（ここでは，exp(多項式)の因子は無視する）多重ゼータ関数 $Z_1(s)\otimes\cdots\otimes Z_r(s)$ を

$$Z_1(s)\otimes\cdots\otimes Z_r(s) = \prod_{\rho_i \in \mathbb{C}} (s-(\rho_1+\cdots+\rho_r))^{m(\rho_1,\cdots,\rho_r)},$$

$$m(\rho_1,\cdots,\rho_r) = m_1(\rho_1)\cdots m_r(\rho_r) \times \begin{cases} 1 & \cdots \text{すべての } \mathrm{Im}(\rho_i) \geqq 0 \\ (-1)^{r-1} & \cdots \text{すべての } \mathrm{Im}(\rho_i) < 0 \\ 0 & \cdots \text{その他} \end{cases}$$

によって定義する。さらに $Z_i(s)$ は関数等式とオイラー積表示

$$Z_i(s) = \prod_p H_p^i(N(p)^{-s})$$

をもつとする。ただし，$H_p^i(T) \in 1 + T\mathbb{C}[[T]]$ とする。
このとき，明示公式（跡公式）

$$\sum_p M_i(p) = \sum_\rho W_i(\rho)$$

が成立する。したがって，多重明示公式

$$\sum_{p_1, \cdots, p_r} M(p_1, \cdots, p_r) = \sum_{\rho_1, \cdots, \rho_r} W(\rho_1, \cdots, \rho_r)$$

が成立する。よって，$W$ が上記の多重ゼータ関数 $Z_1(s) \otimes \cdots \otimes Z_r(s)$ を与えるように選べて，$M$ が簡単な関数になっていればオイラー積表示

$$Z_1(s) \otimes \cdots \otimes Z_r(s) = \prod_{p_1, \cdots, p_r} H_{p_1, \cdots, p_r}(N(p_1)^{-s}, \cdots, N(p_r)^{-s})$$

$$H_{p_1, \cdots, p_r}(T_1, \cdots, T_r) \in 1 + (T_1, \cdots, T_r)\mathbb{C}[[T_1, \cdots, T_r]]$$

をもつ。実際，形式的には，これは成立する。ここで重要な事は $Z_1(s) \otimes \cdots \otimes Z_r(s)$ の定義における $m(\rho_1, \cdots, \rho_r)$ の符号条件であり，これを取り換えると，一般にはうまくいかない。（$H_{p_1, \cdots, p_r}(T_1, \cdots, T_r)$ が上記のようには取れない。）

さて，簡単な実例を多重双曲正弦関数の場合に2つ述べる。ただし，exp(多項式)の項は無視していることに注意。これを $\cong$ で示す。

---

定理1　$M>1$ のとき　$r=2,3,\cdots$ に対して

$$(1-M^{-s})^{\otimes r} = \underbrace{(1-M^{-s})\otimes\cdots\otimes(1-M^{-s})}_{r\text{個}}$$

$$\cong \exp\left(-\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{(2\pi i)^{k-1}}h_r^{(k-1)}\left(\frac{s\cdot\log M}{2\pi i}\right)Li_k(M^{-s})\right).$$

ここで，$\mathrm{Re}(s)>0$，

$$h_r(T)=\frac{(T+r-1)\cdots(T+1)}{(r-1)!},$$

$$Li_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^k}$$ は $k$ 次対数関数。

---

一般の $(1-M_1^{-s})\otimes\cdots\otimes(1-M_r^{-s})$ の表示は簡単ではないが　$r=2$ のときは次が成立する。

---

定理2　$M,N>1$ に対して　$\frac{\log M}{\log N}$ が無理数で

$$\liminf_{m\to\infty}\left\|m\frac{\log M}{\log N}\right\|^{\frac{1}{m}}\geqq 1$$ をみたすとする。

このとき $\mathrm{Re}(s)>0$ において

$$(1-M^{-s})\otimes(1-N^{-s}) \doteqdot \exp\Bigl( \frac{1}{2i}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\cot\Bigl(\pi m \frac{\log M}{\log N}\Bigr) M^{-ms} + \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cot\Bigl(\pi n \frac{\log N}{\log M}\Bigr) N^{-ns} + \frac{1}{2}\log(1-M^{-s}) + \frac{1}{2}\log(1-N^{-s}) \Bigr).$$

---

このような $M, N$ の例は次の2つが代表的で応用がある：

① $\dfrac{\log M}{\log N} = \dfrac{\log\alpha}{\log\beta}$ となる代数的数 $\alpha, \beta$ がある。

② $\dfrac{\log M}{\log N}$ が代数的数。

（ただし，ともに $\dfrac{\log M}{\log N}$ は無理数とする。）

なお，定理2の $(1-M^{-s})\otimes(1-N^{-s})$ は実質的に Shintani [4] によって導入された。$M=N$ のときは Hölder (1886) が起源である。Hölder, Shintani ともにこの関数を $F$ と表示している。

また，定理1は階数1のセルバーグゼータ関数のガンマ因子の計算に応用があり，ガンマ因子は

Barnesの多重ガンマ関数の積になることがわかる。これはリーマン面のセルバーグゼータ関数のガンマ因子の計算（Vignéras [5] と Cartier-Voros [1]）の拡張になっている。これらの結果およびその他の応用については論文 [2] [3] を参照下さい。

## 文　献

[1] P. Cartier and A. Voros : "Une nouvelle interprétation de la formule des traces de Selberg" C. R. Acad. Sci. Paris 307 (1988) 143-148.

[2] N. Kurokawa : "Multiple zeta functions : an example" 1990 preprint = Proc. "Zeta Functions in Geometry" (1990年8月東工大).

[3] N. Kurokawa : "Multiple sine functions and Selberg zeta functions" Proc. Japan Acad. 67 A (1991) March, 61-64.

[4] T. Shintani : "On a Kronecker limit formula for real quadratic fields" J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 24 (1977) 167-199.

[5] M.-F. Vignéras : "L'équation fonctionnelle de la fonction zêta de Selberg du groupe modulaire PSL(2, $\mathbb{Z}$)" Astérisque 61 (1979) 235-249.