数理解析研究所講究録
752巻 1991年 77-85

Apéry Numbers and Modular Forms

神戸大・自然科学 石川恒男
(Tsuneo Ishikawa)

§0. 序

1978年，R. Apéryは

$$a(0)=1 \quad , \quad a(1)=5 \quad ,$$

(1) $n^3a(n)=(34n^3-51n^2+27n-5)a(n-1)-(n-1)^3a(n-2)$

で定義される数列『アペリー数』を使って，$\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ の無理数性の証明をした。([11]を見よ。) 初めの数項は，

1, 5, 73, 1445, 33001, 819005, 21460825, 584307365, ….

であり，一般項は

$$a(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2$$

で与えられる。アペリー数の初等的な合同式の研究は，[2][6]，[10]で得られている。またF. Beukersは，$\zeta(3)$の無理数性の別証明[1]，[3]を通じて，アペリー数の研究が代数的微分方程式や代数幾何，形式群，modular formsなどに関連していることを発見した。この小論では，$a(n)$の母関数の性質から，$a(n)$とあるmodular formのフーリエ係数との合同式，すなわち，k，ℓを互いに素な自然数，$P\equiv\ell \pmod{k}$なる素

数に対して，

$$a\left(\frac{p-\ell}{k}\right) \equiv \gamma_p \pmod p$$

なる形の合同式について，F. Beukersの結果と最近の結果を述べようと思います。ここで γ_p はあるmodular formの p 番目のフーリエ係数である。

§1．$a(n)$ の母関数について．

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) t^n$$

をアペリー数の母関数とする。漸化式(1)より $A(t)$ は次の3階の線型微分方程式：

(2) $$(t^4 - 34t^3 + t^2)\frac{d^3y}{dt^3} + (6t^3 - 153t^2 + 3t)\frac{d^2y}{dt^2} + (7t^2 - 112t + 1)\frac{dy}{dt} + (t-5)y = 0$$

の $t=0$ の周りの正則解になっている。この微分方程式は特殊な形で，$y_0 = A(t)$，y_1，y_2 を(2)の解空間の生成元とすると，2階の微分方程式：

(3) $$(t^3 - 34t^2 + t)\frac{d^2v}{dt^2} + (2t^2 - 51t + 1)\frac{dv}{dt} + \frac{1}{4}(t-10)v = 0$$

のある2解 v_0，v_1（v_0 は $t=0$ の周りの正則解）で，

$$y_0 = v_0^2 \ , \quad y_1 = v_0 v_1 \ , \quad y_2 = v_1^2$$

と書ける。すなわち(3)のsymmetric tensorである。さらに，

$$t = \frac{x(1-9x)}{1-x} \ , \quad v = \sqrt{1-x}\cdot u$$

によって，(3)は，

(4) $$x(x-1)(9x-1)\frac{d^2u}{dx^2} + (27x^2 - 20x + 1)\frac{du}{dx} + (9x-3)u = 0$$

となる。これは楕円曲線の族：

(5) $$Y^2+(1+x)XY-(x^2-x)Y = X^3-(x^2-x)X^2$$

に付随したPicard-Fuchs方程式，すなわち楕円曲線の1-formの周期の満す微分方程式である。([12]を見よ。)(2)についてもあるK3曲面の族の2-formの周期の満たす方程式であることが[5]で示されている。

modular formsとの関係について次の命題がわかっている。

<u>命題1</u>（F. Beukers, J. Stienstra）

$f(x)$を$f(0)=1$なる(4)の$x=0$の周りの正則解とする。

$$x(\tau)=\frac{\eta(6\tau)^8\eta(\tau)^4}{\eta(2\tau)^8\eta(3\tau)^4},\qquad \eta(\tau)=q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n),\ q=e^{2\pi i\tau}$$

$\tau\in\mathbb{H}$ はDedekind η-関数

とすると

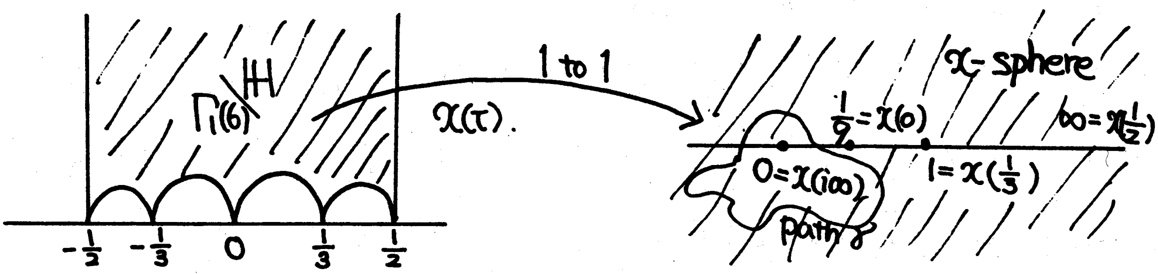
$$f(x(\tau)) = E_1(\tau,\chi) = 1+3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\chi(k)q^k}{1-q^k}$$

ここで $\chi(k)=\begin{cases}1 & k\equiv 1 \mod 6\\ -1 & k\equiv 5 \mod 6\\ 0 & \text{その他}.\end{cases}$

これは(4)が重さ1のEisenstein級数$E_1(\tau,\chi)$に付随したK-方程式([13]を見よ)であることを示している。証明は$x(\tau)$が，合同部分群

$$\Gamma_1(6)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})\ \middle|\ \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&*\\0&1\end{pmatrix}\mod 6\right\}$$

に関するmodular関数であり，図のように$\Gamma_1(6)$の基本領域をx-sphereに写すことを用いる。



$g(\tau)=E_1(\tau,X)$, $\tilde{g}(\tau)=\tau g(\tau)$ とおくと.

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\sigma\tau)&=a\tilde{g}(\tau)+bg(\tau)\\ g(\sigma\tau)&=c\tilde{g}(\tau)+dg(\tau)\end{aligned}\qquad \forall\sigma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_1(6)$$

となる。$x(\tau)$の local inverse による xの関数 $g(x)$, $\tilde{g}(x)$を考えると $\sigma\in\Gamma_1(6)$ に対応した path γにより

$$(6)\qquad \begin{aligned}\tilde{g}(x)&\xrightarrow{\gamma}a\tilde{g}(x)+bg(x)\\ g(x)&\xrightarrow{\gamma}c\tilde{g}(x)+dg(x)\end{aligned}$$

の変換を受けることがわかる。$g(x)$, $\tilde{g}(x)$は

$$\begin{vmatrix}g&g'\\\tilde{g}&\tilde{g}'\end{vmatrix}g''-\begin{vmatrix}g&g''\\\tilde{g}&\tilde{g}''\end{vmatrix}g'+\begin{vmatrix}g'&g''\\\tilde{g}'&\tilde{g}''\end{vmatrix}g=0$$

の解で, (6)より行列式の部分はxの有理関数になることがわかり, 直接計算で(4)と等しいことがわかる。詳しい証明は. [4], [12], [13] を見られたい。

命題1と微分方程式(2), (3), (4)の関係より. 次が得られる。

<u>定理1</u> (F. Beukers)

$$t(\tau)=\frac{x(1-9x)}{1-x}=\left\{\frac{\eta(\tau)\eta(6\tau)}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)}\right\}^{12}$$

とおくと

$$A(t(\tau))=\frac{1}{24}\left\{2E_2(2\tau)-3E_2(3\tau)-5E_2(\tau)+30E_2(6\tau)\right\}$$

ただし　$E_2(\tau) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}$　：重さ2のEisenstein.

定理2（T. Ishikawa, F. Beukers）

$k, l \in \mathbb{N}$ で $(k, l) = 1$ とする。

$$\lambda(\tau) = \left\{\frac{\eta(k\tau)\eta(6k\tau)}{\eta(2k\tau)\eta(3k\tau)}\right\}^{12/k}$$

とする。このとき，

$$A(\lambda^k)\,d\lambda^l = l\cdot F_{k,l}(\tau)\frac{dq}{q} \quad .$$

ここで，

(7)　$$F_{k,l}(\tau) = \eta(k\tau)^{m-2}\eta(2k\tau)^{10-m}\eta(3k\tau)^{6-m}\eta(6k\tau)^{m-6} - 9\eta(k\tau)^{m-6}\eta(2k\tau)^{6-m}\eta(3k\tau)^{10-m}\eta(6k\tau)^{m-2}$$

，$m = 12l/k$ で，k乗根の分岐は正の実軸で正の値をとるように定めておく。

定理1，2の詳しい証明は，それぞれ[4]，[9]を参照して下さい。

§2．合同式．

目標の合同式を得るために次の命題を準備しておく。

命題2（F. Beukers, T. Ishikawa）

pを素数とし，

$$\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n t^{n-1}\,dt \quad (u_n \in \mathbb{Z}_p)$$

$$t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n x^n \quad (w_n \in \mathbb{Z}_p,\ w_1 = 1)$$

として

$$\omega(t(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n x^{n-1} dx \qquad (v_n \in \mathbb{Z}_p)$$

となるとする。このとき

(i) $\quad u_p \equiv v_p \pmod{p}$

(ii) $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{Z}_p$ で $p \mid \beta_p$ のとき 次の (a), (b) は 同値。 $m, r \in \mathbb{N}$

(a) $\quad u_{mp^r} + \alpha_p u_{mp^{r-1}} + \beta_p u_{mp^{r-2}} \equiv 0 \pmod{p^r}$

(b) $\quad v_{mp^r} + \alpha_p v_{mp^{r-1}} + \beta_p v_{mp^{r-2}} \equiv 0 \pmod{p^r}$

証明は直接計算である。これと定理2を合わせて次の結果がわかる。

<u>定理3</u> (T. Ishikawa, F. Beukers)

$F_{k,l}(\tau)$ を (7) のようにとり,

$$F_{k,l}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(k,l)} q^n \quad , \quad q = e^{2\pi i \tau}$$

とおく。$\gamma_n^{(k,l)} \in \mathbb{Z}_p$ ($p \equiv l \pmod{k}$) である。このとき,

(i) $k, l \in \mathbb{N}$, $(k, l) = 1$ とする。$p \equiv l \pmod{k}$ なる素数に対して

$$a\left(\frac{p-l}{k}\right) \equiv \gamma_p^{(k,l)} \pmod{p}$$

(ii) $k = 1$, $l = 1$ のとき, 素数 p に対して, ($m, r \in \mathbb{N}$)

$$a(mp^r - 1) - \gamma_p^{(1,1)} a(mp^{r-1} - 1) + p^3 a(mp^{r-2} - 1) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

(iii) $k = 2$, $l = 1$ のとき, 奇素数 p に対して, (m:odd, $r \in \mathbb{N}$)

$$a\left(\frac{mp^r - 1}{2}\right) - \gamma_p^{(2,1)} a\left(\frac{mp^{r-1} - 1}{2}\right) + p^3 a\left(\frac{mp^{r-2} - 1}{2}\right) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

証明。(i)は命題2と定理2より求まる。(ii)は

$$F_{1,1}(\tau) = \frac{\eta(6\tau)^6\eta(\tau)^{10}}{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)^6} - 9\cdot\frac{\eta(\tau)^6\eta(6\tau)^{10}}{\eta(3\tau)^2\eta(2\tau)^6}$$
$$= \frac{1}{240}\{E_4(\tau) - 36E_4(6\tau) - 28E_4(2\tau) + 63E_4(3\tau)\},$$

$\gamma_p^{(1,1)} = \sigma_3(p) = 1 + p^3$ であって，$E_4(\tau)$ が Hecke form であることから，命題2を用いる。(iii)は [4] の結果である。

<u>例</u>。$k=3$，$l=1$ とすると

$$F_{3,1}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(3,1)}q^n = \frac{\eta(3\tau)^2\eta(6\tau)^6\eta(9\tau)^2}{\eta(18\tau)^2} - q\frac{\eta(6\tau)^2\eta(9\tau)^6\eta(18\tau)^2}{\eta(3\tau)^2}$$
$$= q - 11q^4 - 25q^7 - 15q^{10} + 20q^{13} + \cdots\cdots$$

$p=7$ ならば，

$$a\left(\frac{7-1}{3}\right) = a(2) = 73 \equiv -25 = \gamma_7^{(3,1)} \pmod 7$$

$p=13$ ならば，

$$a\left(\frac{13-1}{3}\right) = a(4) = 33001 \equiv 20 = \gamma_{13}^{(3,1)} \pmod{13}.$$

関数 $F_{k,l}(\tau)$ は一般に正則ではないので，Hecke 作用素の理論が使えず，(ii)(iii)のような結果は得られないが，$l=1$ のときは，次のことが成り立つであろうと思われる。

<u>予想</u>

$p\equiv 1 \pmod k$ なる素数とし，$m\equiv 1 \pmod k$，$r\in\mathbb{N}$ とすると

$$a\left(\frac{mp^r-1}{k}\right) - \gamma_p^{(k,1)}a\left(\frac{mp^{r-1}-1}{k}\right) + p^3a\left(\frac{mp^{r-2}-1}{k}\right) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

$k=1,2$，$l=1$ の場合には，より高い p 巾を法とする合同式も得られている。F. Beukers は，それらを「Super congruences 凸と呼んでいる。

<u>定理4</u> (T. Ishikawa)

(8) $\quad a(\frac{p-1}{2}) \not\equiv 0 \pmod p$

となる素数 p に対して,

$$a\left(\frac{p-1}{2}\right) \equiv \gamma_p^{(2,1)} \pmod{p^2}$$

証明は[6]の結果と定理3(iii)を用いる。([7],[8]を見よ。)(8)が成り立たないような素数は, p < 10万に対して p = 11, 3137 だけであって, その2つに対しても定理4は成り立っているので, (8)の条件は不要であろうと思われる。

参考文献

[1] F. Beukers, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. 11 (1979), 268～272.

[2] ———, Some congruences for the Apéry numbers, J. Number Theory, 21 (1985), 141～155.

[3] ———. Irrationality proofs using modular forms, Jour. arith. Besunçon, Astérisque 147-148 (1987), 271～283.

[4] ———, Another congruences for the Apéry numbers, J. Number Theory. 25 (1987), 201～210.

[5] ——— and C.A.M. Peters, A family of K3 surface and $\zeta(3)$, J. Reine Angew. Math. 351 (1984), 42～54.

[6] I. Gessel, Some congruences for Apèry numbers, J. Number Theory, 14 (1982), 362 ~ 368.

[7] T. Ishikawa, On Beukers conjecture, Kobe J. Math. 6 (1989), 49 ~ 52.

[8] ———, Super congruence for the Apèry numbers, Nagoya Math. J. 118 (1990), 195 ~ 202.

[9] ———, Congruences between binomial coefficients $\binom{2f}{f}$ and Fourier coefficients of certain η-products, preprint.

[10] Y. Mimura, Congruenc properties of Apèry numbers, J. Number Theory, 16 (1983), 138 ~ 146.

[11] A. J. van der Pooten, A proof that Euler missed … Apèry proof of the irrationality of $\zeta(3)$, Math. Intelligencer 1 (1979) 195 ~ 203.

[12] J. Stienstra and F. Beukers, On the Picard-Fuchs equation and the formal Brauer group of certain elliptic K3 surface, Math. Ann. 271 (1985), 269 ~ 304.

[13] P.F. Stiller, A note on automorphic forms of weight one and weight three, Trans. Amer. Math. Soc. 291 (1985), 503 ~ 518.