

Cyclopean form について

北大理 前田 芳孝 (Yoshitaka Maeda)

これは三宅敏恒氏と共同によるものであり、詳細は文献 [4] を見て下さい。

H を複素上半平面とし、自然数 N に対し

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

とおく。

定義 1 H 上の C^∞ -function $f(z)$ が $k \in \mathbf{Z}$, $\lambda \in \mathbf{C}$ について

$$(i) \quad f|_k \gamma(z) = f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) (cz+d)^{-k} = f(z)$$

$$\text{for } \forall \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$$

$$(ii) \quad -4y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}(z) + 2iky \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \lambda f(z)$$

($z = x + iy$)

(iii) $\forall \gamma \in SL_2(\mathbf{Z})$ に対して、 $\exists A, B > 0, C$ such that

$$\left| f|_k \gamma(x + iy) \right| \leq Ay^C \quad \text{on } y > B$$

をみたすとき、 $f(z)$ を automorphic eigenform of weight k with respect to $\Gamma(N)$ belonging to an eigenvalue λ と云う。その全体を $A_k(N; \lambda)$ とおく。

$f(z) \in A_k(N; \lambda)$ は $4\lambda \neq (1-k)^2$ (以下これを仮定する) のとき、つぎの Fourier 展開を持つ:

$$(*) \quad f(z) = cy^{s_0} + dy^{1-k-s_0}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega(4\pi ny/T; k+s_0, s_0) e(nz/T)$$

$$+ y^{-k} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega(4\pi n y / T; s_0, k+s_0) e(-n\bar{z}/T)$$

$$(e(z) = \exp(2\pi i z))$$

$T > 0$: constant

s_0 : $X^2 - (1-k)X + \lambda = 0$ の一根

$$\omega(t; \alpha, \beta) = t^\alpha \Gamma(\beta)^{-1} \int_0^\infty e^{-ut} (1+u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du$$

$$(\operatorname{Re}(\beta) > 0)$$

定義2 (*) に於いて, cy^{s_0} , dy^{1-k-s_0} を $f(z)$ の constant terms と云う.

定義3 $\forall \gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ について $f|_k \gamma$ の 2つの constant terms が 0 となる時, $f(z)$ を cusp form と云う. その全体を $S_k(N; \lambda)$ とおく.

$f(z), g(z) \in A_k(N; \lambda)$ とし, 少なくとも一方は cusp form とするとき, Petersson 内積

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma(N) \backslash H} \overline{f(z)} g(z) y^{k-2} dx dy$$

$$(z = x + iy)$$

が定義される.

定義4 $N_k(N; \lambda) = \{g(z) \in A_k(N; \lambda) \mid \langle f, g \rangle = 0 \text{ for } \forall f \in S_k(N; \lambda)\}$

定義5 $-k/2 < \operatorname{Re}(s_0) < (1-k)/2$ なる s_0 に対して $\lambda = s_0(1-k-s_0)$ であるとする. $f(z) \in N_k(N; \lambda)$ が $\forall \gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ について $f|_k \gamma$ の constant term $cy^{s_0} = 0$ となる時 $f(z)$ を cyclopean form と云う. その全体を $C_k(N; \lambda)$ とおく.

cyclopean form は Dirichlet の L -函数の非自明な零点の存在と関連がある ([1] をみよ).

定理 $C_k(N; \lambda)$ は $\{E_k(z, s_0; \chi) \mid \chi \in \mathcal{R}\}$ で生成される。

ここで χ は次の条件をみたす Dirichlet character defined mod N を動く：

$$\chi(-1) = (-1)^k \quad \text{且} \quad L(2s_0 + k, \chi) = 0.$$

また \mathcal{R} は $\Gamma_0(N) \setminus SL_2(\mathbb{Z})$ の代表系を動く：

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

$$E_k(z, s_0; \chi) = y^{s_0} \sum_{\substack{n \\ m, n = -\infty}}^{\infty} \chi(n) (mNz + n)^{-k} |mNz + n|^{-2s_0}$$

参考文献

- [1] G. Shimura: On the Eisenstein series of Hilbert modular groups, Revista Mat. Iberoamer. 1(1985), 1-42.
- [2] T. Miyake: Modular Forms, Springer-Verlag, 1989.
- [3] T. Miyake: On the spaces of Eisenstein series of Hilbert modular groups, Revista Mat. Iberoamer. 3(1987), 357-369.
- [4] T. Miyake-Y. Maeda: On elliptic cyclopean forms, to appear J. Math. Kyoto Univ..