数理解析研究所講究録
753巻 1991年 71-87

代数拡大を定める微分方程式について

熊本大自然科学　原岡喜重（Yoshishige Haraoka）

代数体上の二次形式に関するHasseの原理の類似として、微分方程式に対するGrothendieck予想がある。即ち、解がすべて代数関数となる様な線形常微分方程式を数論的に特徴づける試みである。この予想に関して様々な研究が行われているが、具体例として、1階の方程式、Gaussの超幾何方程式、一般化超幾何方程式${}_nE_{n-1}$等については真であることが調べられている。いずれの例でも、微分方程式のglobal monodromyが計算されていることが予想の検証に本質的である。

一方K. Okuboにより展開された$\mathbb{P}^1$上のFuchs型方程式の理論によると、accessory parameterをもたない方程式のglobal monodromyは方程式の係数から代数的に計算される。上述の方程式は、いずれもaccessory parameterをもたない。そこで、Grothendieck予想を一般のaccessory parameterをもたない方程式について検証することが期待される。

本稿ではPochhammer方程式について計算を行う。これは一

つの例であるが、方程式の特異点の位置の扱い方について示唆的な例と思われる。

§1. Grothendieck予想

方程式

$$(E)\qquad a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\,y = 0,$$
$$a_i(x) \in \mathbb{Q}[x] \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

を考える。$\mathbb{Q}[x]$の代りに一般に$K[x]$（Kは代数体）を考えることができるが、簡単のため$\mathbb{Q}[x]$に限ることにする。素数pにより各$a_i(x)$の係数をmoduloすると、$\mathbb{F}_p[x]$上の方程式$(E)_p$が得られる。但し$a_i(x)$の係数の分母に現れる様な素数は考えない。

$(E)_p$の係数体$\mathbb{F}_p(x)$は正標数の微分体となるので、$(E)_p$は通常の解析的な意味を失っているが、代数的には簡単になっている。次の2点に注意しておく。

1. 微分体$\mathbb{F}_p(x)$の定数体は$\mathbb{F}_p(x^p)$となる。
2. $(E)_p$の解とは、$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in \mathbb{F}_p[[x]]$であって、$(E)_p$の$\mathbb{F}_p[[x]]$における解となるもの、と約束する。

Grothendieck予想： 殆どすべての素数 p について、$(E)_p$ が $\mathbb{F}_p(x^p)$ 上一次独立な n 個の解をもてば、(E) の解はすべて代数関数。

殆どすべて、とは、有限個を除いての意味。この予想の仮定を満たさない例としては $y'=y$ 。尚 Grothendieck予想に関しては T. Honda [1] を参照（ここまでの記述はすべて [1] に依っている）。

以下この節では、N. Katz [2] による Gauss の超幾何方程式に対する Grothendieck予想の検証について紹介する。

Gauss の超幾何方程式（以下 Gauss と略記する）

$$l(y) = x(1-x)y'' + \{c-(a+b+1)x\}y' - aby = 0$$

を考える。一般に、(E) の解がすべて代数関数になることは、(E) の global monodromy が有限群になることと同値。従ってとくに local monodromy が位数有限となることが必要となり、Gauss の場合はこれは a, b, c が有理数という条件に対応する。そこで以下 $a, b, c \in \mathbb{Q}$ と仮定する。Katz は、Grothendieck予想の仮定を満たすためのパラメター (a, b, c) についての条件と、monodromy 群が有限となるための (a, b, c) についての条件が一致することを示した。詳細は原論文を参照して頂く

ことにして、ここでは generic な場合にその粗筋を述べよう。即ち以下では (a, b, c) はある generic な条件（$l(y)=0$ の解が対数項を含まない、$l(y)$ が可約とならない等）を満たしているとする。

今、$t \in R$ に対し、$\langle t \rangle \in [0, 1)$ を

$$\langle t \rangle = t - [t]$$

で定める。但し $[\cdot]$ は Gauss 記号。

<u>命題 1.1.</u> $a, b, c \in Q$ の共通分母を N とする。このとき $l(y)=0$ の monodromy 群が有限群となるための必要十分条件は、N と互いに素なすべての $\Delta \in Z$ に対して

$$0 < \langle b\Delta \rangle < \langle c\Delta \rangle < \langle a\Delta \rangle < 1$$

又は

$$0 < \langle a\Delta \rangle < \langle c\Delta \rangle < \langle b\Delta \rangle < 1$$

が成り立つこと。

この命題は、monodromy 群が不変にする正定値 Hermitian form の存在を調べることで示される。

素数 p を固定する。$a \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p$（即ち分母に p を含まない有理数）に対し、$R_p(a) \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ を

$$a \equiv R_p(a) \mod p(\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p)$$

で定める。パラメター $(-a, -b, -c)$ をもつ Gauss

$$l'(y) = x(1-x)y'' + \{-c-(-a-b+1)x\}y' - ab\,y = 0$$

を考え、p で modulo すると、a, b, c をそれぞれ $R_p(a), R_p(b)$, $R_p(c)$ でおきかえた式が得られる。$R_p(a), R_p(b), R_p(c)$ を改めて a, b, c と書くことにして、今 $a, b, c \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ と仮定しておこう。

<u>命題 1.2</u>　$l'(y) = 0$ が、$\mathbb{F}_p(x^p)$ 上一次独立な2つの $\mathbb{F}_p[x]$ に属する解をもつための必要十分条件は、

$$a \leqq c < b \quad \text{又は} \quad b \leqq c < a$$

が成り立つこと。

<u>注意</u>　[1] によると、一般に $(E)_p$ が $\mathbb{F}_p(x^p)$ 上独立な n コの $\mathbb{F}_p[[x]]$ に属する解をもつことと、$\mathbb{F}_p(x^p)$ 上独立な n コの $\mathbb{F}_p[x]$ に属する解をもつことは同値。

証明の概略　$N := \{ f(x) \in \mathbb{F}_p[x] \mid \deg f \leq p-1 \}$ とするとき，

$$\mathrm{Ker}(\ell' : \mathbb{F}_p[x] \to \mathbb{F}_p[x]) \xleftarrow{\sim} \mathbb{F}_p[x^p] \otimes_{\mathbb{F}_p} (\mathrm{Ker}(\ell' : N \to N))$$

が成り立つ。よって　$\ell' : N \to N$　の kernel が 2 次元となる条件を求めればよい。

ℓ' の N 上の行列表現を求めよう。

$$\ell'(x^n) = P(n)x^n + Q(n)x^{n-1},$$
$$P(n) = -(n-a)(n-b), \quad Q(n) = (n+1)(n-c)$$

と書けるので，基底 $\{1, x, x^2, \cdots, x^{p-1}\}$ に関する表現行列は

$$L = \begin{pmatrix} P(0) & Q(0) & & & \\ & P(1) & Q(1) & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & P(p-2) & Q(p-2) \\ & & & & P(p-1) \end{pmatrix}$$

である。

L の kernel が 2 次元となるためには，固有値（＝対角成分 $= \{P(0), \cdots, P(p-1)\}$）の中に少くとも 2 つ 0 がなくてはならないので，$P(n)$ の形からその条件は $a \neq b$ である。今 $a < b$ と仮定する。従って

$$
L = \begin{pmatrix}
P(0) & Q(0) & & & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & & & & & & & \\
& & P(a-1) & Q(a-1) & & & & & & \\
& & & 0 & Q(a) & & & & & \\
& & & & P(a+1) & \ddots & & & & \\
& & & & & \ddots & \ddots & & & \\
& & & & & & P(b-1) & Q(b-1) & & \\
& & & & & & & 0 & Q(b) & \\
& & & & & & & & P(b+1) & \ddots \\
& & & & & & & & \ddots & Q(p-2) \\
& & & & & & & & & P(p-1)
\end{pmatrix}
$$

であるが、線で囲った部分をL'とすれば、Lのkernelが2次元 $\Longleftrightarrow$ L'のkernelが2次元。更にこれは

$$
L'' = \begin{pmatrix}
Q(a) & & & \\
P(a+1) & \ddots & & \\
& \ddots & \ddots & \\
& & P(b-1) & Q(b-1)
\end{pmatrix}
$$

のkernelが1次元という条件と同値。即ち $Q(a), \cdots, Q(b-1)$ のうちに0がなくてはならず、$Q(n)$の形から求める条件は

$$a \leqq c \leqq b-1,$$

即ち $a \leqq c < b$。$b < a$ と仮定すると同様に $b \leqq c < a$。逆にたどることにより、必要十分条件であることが分る。//

命題1.2は、$l(y)=0$ が mod p で2つの独立解をもつため

のパラメター (a, b, c) についての条件を、$(R_p(a), R_p(b), R_p(c))$ の条件の形で与えている。次の補題を用いると、殆どすべての p についてのその条件が、命題1.1で与えた (a, b, c) への条件と同値になることが示され、Katzの結果（Gaussに対するGrothendieck予想の検証）の証明が完結する。

補題 1.3. $\alpha \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ を固定する。$\Delta \in \mathbb{Z}$ を $(N, \Delta) = 1$ なる数とするとき.

$$\lim_{\substack{p \to \infty \\ p\Delta \equiv 1 \, (N)}} \frac{1}{p} R_p\left(\frac{-\alpha}{N}\right) = \begin{cases} \left\langle \dfrac{\alpha\Delta}{N} \right\rangle & \text{if } \dfrac{\alpha}{N} \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{if } \dfrac{\alpha}{N} \in \mathbb{Z}, \dfrac{\alpha}{N} \leq 0, \\ 1 & \text{if } \dfrac{\alpha}{N} \in \mathbb{Z}, \dfrac{\alpha}{N} > 0. \end{cases}$$

§2. Accessory parameter をもたない方程式

方程式

$$(E) \qquad a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = 0$$

$$a_i(x) \in \mathbb{C}[x] \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

がFuchs型であると仮定する。このとき(E)にRiemann scheme

$$P = \left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \cdots & \xi_m \\ \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1n} & \cdots & \lambda_{mn} \end{matrix} \right\}$$

が対応する。ここで $\xi_1, \cdots, \xi_m \in \mathbb{P}^1$ は(E)の確定特異点の位置を、$\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ $(j=1, \cdots, n)$ は ξ_i における exponent を表している。$\{\lambda_{ij}\}$ の間にはFuchs関係式($\sum \lambda_{ij}$ がある整数に等しい)が成り立っている。

2つの射影 π_S, π_E を、

$$\pi_S(P) = \{\xi_1, \cdots, \xi_m\},$$

$$\pi_E(P) = \left\{ \begin{matrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1n} & \cdots & \lambda_{mn} \end{matrix} \right\}$$

で定義する。

今逆に、Riemann scheme P を与えたとき、それを実現するようなFuchs型方程式(E)を考えよう。$\pi_S(P)$ は $a_0(x)$ の零点を与え、$\pi_E(P)$ は $\{a_i(x)\}$ の係数たちから定まる決定方程式(n次代数方程式となる)の根を与えているので、P を与えることで $\{a_i(x)\}$ の係数の間の代数関係式が得られる。$\pi_E(P)$ の間にFuchs関係式が成り立てば、その関係式は解をもつが、一般には解は一意には定まらない。即ち P を

実現する方程式(E)はいくつかのパラメターに依存する不定性をもつ。そのパラメターを accessory parameter と言う。従って accessory parameter をもたない方程式とは、Riemann scheme から一意的にきまる方程式である(言いかえると、特異点の近くにおける局所的な挙動が大域的な挙動を支配する様な方程式)。方程式が accessory parameter をもたないための条件は、(n, m) と $\pi_E(P)$ についての条件の形で記述される。

K. Okubo は accessory parameter をもたない方程式の理論を展開した([3])。ここではその概要を述べる。

即ち、(n, m) を固定し、更に accessory parameter をもたないための条件を満たす様な Riemann scheme のみを考えるとき、次の図式がある。

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Riemann scheme} \arrow[dl, "\pi_S"'] \arrow[dr, "\pi_E"] \arrow[dd, "\psi"] & & \\
\text{Singularities} & & \text{Exponents} \arrow[r, "e"] & \text{Monodromy data} \arrow[d, "\varphi"] \\
 & \text{Equation} \arrow[rr] & & \text{Monodromy group}
\end{tikzcd}
$$

各写像の定義は、先の P を用いると次の通りである。

$$\begin{tikzcd}
\{\xi_1, \cdots, \xi_m\} & P \arrow[l, mapsto, "\pi_S"'] \arrow[r, mapsto, "\pi_E"] \arrow[dd, mapsto, "\psi"] & \left\{\begin{matrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{1n} & \cdots & \lambda_{mn} \end{matrix}\right\} \arrow[r, mapsto, "e"] & \left\{\begin{matrix} \exp(2\pi\sqrt{-1}\lambda_{11}) & \cdots & \exp(2\pi\sqrt{-1}\lambda_{m1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \exp(2\pi\sqrt{-1}\lambda_{1n}) & \cdots & \exp(2\pi\sqrt{-1}\lambda_{mn}) \end{matrix}\right\} \arrow[d, mapsto, "\varphi"] \\
 & & & \\
 & (E) \arrow[rr, mapsto] & & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{M}$ は、ある一つの基本解系による monodromy群の $GL(n,\mathbb{C})$ への表現。ここで φ, ψ は代数的な写像になっている。accessory parameter をもたない方程式に対しては、その monodromy 表現が特異点の位置 $\pi_S(P)$ に依らずにきまる、ということに注意しておく。

§3. Pochhammer 方程式

前節の記号を流用したとき、$n=2$, $m=3$ の場合は accessory parameter がないことが分る。§1 で扱った Gauss の Riemann scheme は

$$P = \left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{matrix}\right\}$$

であるから、accessory parameter をもたない。よって前節の最

後に述べた注意によると、そのmonodromyが有限群になるという条件は(a,b,c)についての条件であって、$\pi_S(P)=\{0,1,\infty\}$には無関係である。一方Grothendieck予想は方程式(E)の係数を直接見るので、計算中に特異点の位置が陽に現れる。そこで、2つの有限特異点の位置$\{0,1\}$を動かした方程式について、Katzと類似の議論ができるかどうかを調べたい。

都合によりexponentsの表し方を少し変えて、次のRiemann schemeできまる方程式を考えよう。

$$P=\left\{\begin{matrix}\xi & \eta & \infty \\ 0 & 0 & 1-\rho \\ \lambda+\rho & \mu+\rho & -\rho-\lambda-\mu\end{matrix}\right\}.$$

これはPochhammer方程式と呼ばれるn階方程式の$n=2$の場合に当たり、その具体的な形は

$$\begin{aligned}(E)\qquad l(y) &= (x-\xi)(x-\eta)y'' \\ &\quad+\{(1-\rho-\mu)(x-\xi)+(1-\rho-\lambda)(x-\eta)\}y' \\ &\quad+(\rho-1)(\rho+\lambda+\mu)y \\ &=0\end{aligned}$$

である。今特異点の位置$\{\xi,\eta\}$は一般であるとしたいので、ξ,ηは$\mathbb{Q}(x)$上代数的独立な2つの定数であるとする。従って方程式(E)の係数体は$\mathbb{Q}(\xi,\eta)(x)$という微分体と考える。$\mathbb{Q}(\xi,\eta)[x]$の元をpでmodulusするという操作を係数($\in\mathbb{Q}$)

のみを modulo することと定めると、$(E)_p$ は $\mathbb{F}_p(\xi,\eta)[x]$ 係数の方程式になる。

我々の目標は、§1 の命題1.2に対応する命題を、(ξ,η) に関係しない形で述べることである。即ち

命題3.1. ($\lambda, \mu, \rho \in \mathbb{Q}$ が generic という条件の下で)
$(E)_p$ が $\mathbb{F}_p(\xi,\eta)(x^p)$ 上独立な2つの解を $\mathbb{F}_p(\xi,\eta)[x]$ にもつための必要十分条件は、

$$R_p(\rho-1) \leq R_p(\rho+\lambda-1) < R_p(\rho+\lambda+\mu)$$

又は

$$R_p(\rho+\lambda+\mu) \leq R_p(\rho+\lambda-1) < R_p(\rho-1)$$

が成り立つこと。

注意. exponents を (a, b, c) を用いて表すと、この条件は命題1.2の条件に対応していることが分る。

命題1.2の証明と同じく、

$$\ell(x^n) = P(n)x^n + Q(n-1)x^{n-1} + R(n-2)x^{n-2}$$

で P, Q, R を定める。即ち

$$P(n) = (n-(p-1))(n-(p+\lambda+\mu)),$$

$$Q(n) = -(n+1)\,[(\xi+\eta)(n-(p-1))-(\mu\xi+\lambda\eta)],$$

$$R(n) = (n+2)(n+1)\xi\eta.$$

l の表現行列は

$$L = \begin{pmatrix} P(0) & Q(0) & R(0) & & \\ & P(1) & Q(1) & R(1) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & R(p-3) \\ & & & & \ddots & Q(p-2) \\ & & & & & P(p-1) \end{pmatrix}.$$

これの kernel が2次元という条件は、結局（$p-1<p+\lambda+\mu$ という仮定の下で）

$$L' = \begin{pmatrix} Q(p-1) & R(p-1) & & & \\ P(p) & Q(p) & R(p) & & \\ & P(p+1) & Q(p+1) & R(p+1) & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & R(p+\lambda+\mu-2) \\ & & & & P(p+\lambda+\mu-1) & Q(p+\lambda+\mu-1) \end{pmatrix}$$

の kernel が1次元という条件に帰着する。ところが、次が成り立つ。

補題3.2. $k:=p-1$, $m:=\lambda+\mu-1$ とおく(従って $k, m \in \mathbb{Z}$, $0 \leqq k < k+m \leqq p-1$ が成り立っている)。m次行列 D_0, D_1, D_2, P を次の通り定める。

$$D_0 = \mathrm{diag}\,[\,k+1,\ k+2,\ \cdots,\ k+m\,],$$

$$D_1 = \mathrm{diag}\,[\,(k+2)_{m-1},\ (k+3)_{m-2},\ \cdots,\ k+m,\ 1\,],$$

$$D_2 = \mathrm{diag}\,[\,1,\ (1-m)\eta^{-1},\ \cdots,\ (1-m)_{m-1}\,\eta^{-(m-1)}\,],$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \binom{j-1}{0} & \binom{j-1}{1} & \cdots & \binom{j-1}{j-2} & 1 & \\ \vdots & & & & & \ddots \\ \binom{m-1}{0} & \binom{m-1}{1} & & \cdots & \binom{m-1}{m-2} & 1 \end{pmatrix}.$$

但し $(a)_n := a(a+1)\cdots(a+n-1)$ である。

このとき、

$$(D_1 D_2 P)^{-1} D_0^{-1} L' (D_1 D_2 P)$$

$$= \begin{pmatrix} (\eta-\xi)\lambda & -(m-1)\xi & & & \\ & (\eta-\xi)(\lambda-1) & -(m-2)\xi & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & (\eta-\xi)(\lambda-(m-2)) & -\xi \\ & & & & (\eta-\xi)(\lambda-(m-1)) \end{pmatrix}.$$

この補題により

$$\det L' = (k+1)_m \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(m-1))(\eta-\xi)^m。$$

ξ, η は $\mathbb{Q}$ 上代数的独立だから $(\eta-\xi)^m \neq 0$。一方 $(k+1)_m \neq 0$ でもあるので、L' の kernel が一次元という条件は

$$\lambda \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$$

となる。(ξ, η) に依らない形の条件が得られた。これから命題3.1が従う。

故に、

<u>定理3.3</u>. 2階 Pochhammer 方程式 (E) に対しても Grothendieck 予想は真。

3階以上の Pochhammer 方程式についても同様の議論が可能だが、計算が飛躍的に難しくなり、現在研究中である。

一般の accessory parameter をもたない方程式に対しては更に難しいであろうが、上記の計算は、特異点の位置の扱い方についての指針を与えるものと考えられる。

参考文献

[1] 本田 平. 代数的微分方程式, 東大セミナリー・ノート, 38.

[2] N. Katz Algebraic solutions of differential equations (p-curvature and the Hodge filtration), Inv. math., 18 (1972), 1-118.

[3] 大久保 謙二郎. On the group of Fuchsian equations, 都立大学セミナー報告 (1987).