数理解析研究所講究録
753巻 1991年 51-70

シュレジンガーの標準型への変換

熊本大理 河野 實彦(Mituhiko Kohno)
大分大工 大河内茂美(Shigemi Ohkohchi)

ここでの問題は「1つの確定特異点と rank1 の不確定特異点を持つ単独の線形微分方程式は Birkhoff の標準形

$$tY'=(A+tB)Y$$

に書き直せるか?」という H.L.Turrittin の問いかけから発している。この Turritin の質問に関しては大久保謙二郎氏が肯定的に答えたのであるが、この質問をもっと一般にした場合にはどうなるであろうか? つまり、原点に確定特異点を持ち rank が任意の不確定特異点を持つ場合にも単独の線形微分方程式は Birkhoff の標準形に書き直せるであろうか? また、確定特異点の個数が1つとは限らない場合には同様に標準形に(この場合には、いはゆる Schlesinger の標準形と呼ばれる形)書き直すことが可能であろうか? ということになる。 これらの疑問に対する解答として、「何個かの(p 個)確定特異点($t=t_1,t_2,...,t_p$ とする)と一般

の rank q の不確定特異点を持つ単独の線形微分方程式は Schlesinger の標準形

$$dY/dt = (\sum_{i=1}^{p} C_i/(t-t_i) + \sum_{k=0}^{q-1} B_k t^k)Y$$

に、t の有理関数による線形変換で書き直すことができる」と主張するとともに、その際に現れる線形変換を存在するが具体的な形は分からないというタイプの存在定理として導きだすのではなく、構成的に求め（当然の事として予想できるのであるが、その計算は複雑ではないが、手計算には相当の根気と体力を必要とするため）、数式処理を利用することによって変換後の微分方程式の係数行列の形を特定することができるということを主張しようというものである。

ここでは、話を分かりやすくするために、単独の線形微分方程式としては原点 $t=0$ と $t=1$ に、それぞれ、確定特異点をもち、無限遠点 $t=\infty$ には rank 1 の不確定特異点を持つ次の形の微分方程式を考えることにする。

(1) $\phi^n x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\phi^{n-i}x^{(n-i)}$

ただし、ここで $\phi = t(t-1)$ としておく。

これを Schlesinger の標準形と呼ばれる次のような方程式系に

(2) $dY/dt = (C_0/t + C_1/(t-1) + C_\infty t)Y$

変換する問題を考える。

単独方程式(1)の係数は

$$a_i(t) = \sum_{r=0}^{i-1} [a_{i,r}(0)+a_{i,r}(1)\phi]\phi^r + a_{i,i}(0)\phi^i$$

ただし、$\phi = 2t-1$ $i=1,2,...,n$

で与えられる。(t のべきはすべて ϕ および ϕ' を用いて表わすことができることを利用する。確定特異点の個数が増加した場合も同様に考える) 従って、(1)の特異点 $t=0, 1, \infty$ での特性方程式は、それぞれ

$$[\rho_0]_n = \sum_{i=1}^{n} (a_{i,0}(0)-a_{i,0}(1))(-1)^i[\rho_0]_{n-i}$$

$$[\rho_1]_n = \sum_{i=1}^{n} (a_{i,0}(0)+a_{i,0}(1))[\rho_1]_{n-i}$$

$$\lambda^n = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}(0)\lambda^{n-i}$$

ただし $[\rho]_n=\rho(\rho-1)...(\rho-n-1)$ とする。

によってあたえられ、それらの特性根は Schlesinger 方程式の係数 C_0, C_1, C_∞ の決定に反映するはずである。

実際、$x_k = d^k x/dt^k$ $(k=0,1,...,n-1)$ で $(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ の列ベクトルに関する方程式系に(1)を書き直せば

$$\phi \; dX/dt = \begin{bmatrix} 0 & \phi & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \phi \\ a_n(t)\phi^{1-n} & a_{n-1}(t)\phi^{2-n} & & a_1(t) \end{bmatrix} X$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ a_{n,n}(0) & a_{n-1,n-1}(0) & \cdots & a_{1,1}(0) \end{bmatrix} \phi \right.$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_n(0;\phi) & A_{n-1}(0;\phi) & \cdots & A_1(0;\phi) \end{bmatrix}$$

$$\left. + \phi \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_n(1;\phi) & A_{n-1}(1;\phi) & \cdots & A_1(1;\phi) \end{bmatrix} \right\} X$$

$$= [A_\infty \phi + A_0(\phi) + A_1(\phi)\phi'] X = A(t) X$$

であり、A_∞ は同伴行列で、$A_0(\phi)$ および $A_1(\phi)$ は第n行にのみ0でない成分をもつ行列である。また、この方程式にたいして、従属変数の変換を

$$Y = E(t)X = \{E_0(\phi) + E_1(\phi)\phi'\} X$$

として、この方程式系が(2)の方程式になるようにするには

$$\phi E'(t) + E(t)A(t) = (B_2\phi + B_1\phi' + B_0)E(t)$$

ただし、$C_0 = B_1 - B_0$, $C_1 = B_1 + B_0$, $C_\infty = B_2$

の関係を満足するように定めればよいことが容易に分かる。そこで、この関係式を ϕ と ϕ' の項に分けて比較すれば

(3) $\phi\{dE_0/d\phi\} + E_1(A_\infty\phi + A_0) + E_0A_1 = B_1E_0 + (B_2\phi + B_0)E_1$

(4) $(1+4\phi)\phi\{dE_1/d\phi\} + 2\phi E_1 + E_0(A_\infty\phi + A_0) + (1+4\phi)E_1A_1$

$$= (B_2\phi + B_0)E_0 + (1+4\phi)B_1E_1$$

の２式を満足するように E_0, E_1, B_0, B_1, B_2 を定めればよい。その際、以下のことに注意する必要がある。

① E_0 は対角成分が１の下三角行列、E_1 は対角成分が0の下三角行列

② E_0, E_1 は ϕ^{-1} の多項式で定数項なしで、k 番目の subdiagonal は k次の多項式

③ B_0, B_1 は下三角行列で、B_2 は A_∞ と等しい

これらの事実に留意して(3),(4)を行列の成分に関する式で

書き下せば以下のようになる。

(5) $\phi e_{j,j-1}(1;\phi)=\beta_{j,j}(1)+\phi e_{j+1,j}(1;\phi)$

$(j=1,2,...,n-1)$

(6) $\phi e_{n,n-1}(1;\phi)+A_1(1;\phi)=\beta_{n,n}(1)$

(7) $\phi\{de_{j,j-k}(0;\phi)/d\phi\}+\phi e_{j,j-k-1}(1;\phi)$

$=\sum_{l=j-k}^{n}\beta_{j,l}(1)e_{l,j-k}(0;\phi)+$

$\sum_{l=j-k+1}^{n}\beta_{j,l}(1)e_{l,j-k}(1;\phi)+\phi e_{j+1,j-k}(1;\phi)$

$(j=2,3,...,n-1;k=1,2,...,j-1)$

(8) $\phi\{de_{n,n-k}(0;\phi)/d\phi\}+\phi e_{n,n-k-1}(1;\phi)+A_{k+1}(1,\phi)$

$=\sum_{l=n-k}^{n}\beta_{n,l}(1)e_{l,n-k}(0;\phi)+$

$\sum_{l=n-k+1}^{n}\beta_{n,l}(1)e_{l,n-k}(1;\phi)$

$+\phi\left(\sum_{l=n-k+1}^{n}a_{n+1-l,n+1-l}(0)\ e_{j+1,j-k}(1;\phi)\right)$

$(k=1,2,...,n-1)$

(9) $\phi e_{j,j-1}(0;\phi)=\beta_{j,j}(0)+\phi e_{j+1,j}(0;\phi)$

$(j=1,2,...,n-1)$

(10) $\phi e_{n,n-1}(0;\phi)+A_1(0;\phi)=\beta_{n,n}(0)$

(11) $(1+4\phi)\phi\{de_{j,j-k}(1:\phi)/d\phi\}$

$+2\phi\, e_{j,j-k}(1;\phi) + \phi\, e_{j,j-k-1}(0;\phi)$

$=\sum_{i=j-k}^{n} \beta_{j,i}(0)e_{i,j-k}(0:\phi)+$

$(1+4\phi)\sum_{i=j-k-1}^{n} \beta_{j,i}(1)e_{i,j-k}(1:\phi)$

$+\phi\, e_{j+1,j-k}(1:\phi)$

$(j=2,3,\ldots,n-1;k=1,2,\ldots,j-1)$

(12) $(1+4\phi)\phi\{de_{n,n-k}(1:\phi)/d\phi\}+\phi\, e_{n,n-k-1}(0:\phi)$

$2\phi\, e_{n,n-k}(1:\phi)+A_{k-1}(0,\phi)$

$=\sum_{i=n-k}^{n} \beta_{n,i}(0)e_{i,n-k}(0:\phi)+$

$(1+4\phi)\sum_{i=n-k-1}^{n} \beta_{n,i}(1)e_{i,n-k}(1:\phi)$

$+\phi\left(\sum_{i=n-k+1}^{n} a_{n+1-i,n+1-i}(0)e_{j-1,j-k}(0;\phi)\right)$

$(k=1,2,\ldots,n-1)$

ただし、ここで行列の成分表示を

$E_h(\phi)=(e_{i,j}(h;\phi))$

$B_h=(\beta_{i,j}(h))$ $(h=0,1;i,j=1,2,\ldots,n)$

とするとともに、(5)-(12)式で

$$e_{j,k}(0;\phi)=0,\quad e_{j,k}(1;\phi)=0 \quad (\text{if } k \leqq 0)$$

であるとする。

(5)-(12)の関係式から、$E_n(\phi)$の k-subdiagonalの要素である $(e_{i,i-k}(h;\phi))$ はϕの負べきの k次の多項式であることがわかる。いま

$$e_{n,n-k}(h;\phi)=\xi_k(h)\phi^{-k}+\ldots$$

$$(k=1,2,\ldots,n-1;h=0,1)$$

とおいて係数$\xi_k(h)$を求めてみる。(6)と(10)からただちに

$$(13)\quad \begin{cases} \xi_1(1)+a_{1,0}(1)=\beta_{n,n}(1) \\ \xi_1(0)+a_{1,0}(0)=\beta_{n,n}(0) \end{cases}$$

が得られると同時に、これらの関係式を(8)(12)に代入して、ϕの負べき（k次の）項を比較して

$$(14)\quad \begin{cases} \xi_{k+1}(1)+a_{k+1,0}(1)=(\beta_{n,n}(1)+k)\xi_k(0) \\ \qquad\qquad +\beta_{n,n}(0)\xi_k(1) \\ \xi_{k+1}(0)+a_{k+1,0}(0)=\beta_{n,n}(0)\xi_k(0) \\ \qquad\qquad +(\beta_{n,n}(1)+k)\xi_k(1) \end{cases}$$

$$(k=1,2,\ldots,n-1)$$

を得る。ただし

(15)　$\xi_n(h)=0 \quad (h=0,1)$　とする。

これから、(13)式を(14)式に代入し、(15)式が成り立つように $\xi_1(1)$と$\xi_1(0)$を定めればよいことがわかる。

この手続きが可能であることを言うために、以下のように書き直してみることにする。

$$\begin{cases} \mu(0)=\beta_{n,n}(1)-\beta_{n,n}(0) \\ \eta_k(0)=\xi_k(1)-\xi_k(0) \\ \mu(1)=\beta_{n,n}(1)+\beta_{n,n}(0) \\ \eta_k(1)=\xi_k(1)+\xi_k(0) \end{cases}$$

とおくと、(13)(14)式は次のようにかける。

$$(15)\quad \begin{cases} \eta_1(0)=\mu(0)+(a_{1,0}(0)-a_{1,0}(1)) \\ \eta_{k+1}(0)=-(\mu(0)+k)\eta_k(0)+(a_{k+1,0}(0)-a_{k+1,0}(1)) \end{cases}$$

$$(k=1,2,...,n-1)$$

$$(16)\quad \begin{cases} \eta_1(1)=\mu(1)-(a_{1,0}(0)+a_{1,0}(1)) \\ \eta_{k+1}(1)=(\mu(1)+k)\eta_k(1)-(a_{k+1,0}(0)+a_{k+1,0}(1)) \end{cases}$$

$$(k=1,2,...,n-1)$$

ここで、(15)(16)式にたいしてつぎの補題を適用する。

補題　$\rho_l(l=1,2,...,n)$は代数方程式

$$[\rho]_N+\eta_1[\rho]_{N-1}+...+\eta_N=\prod_{l=1}^{N}(\rho-\rho_l)$$

の根として与えられるものとする。このとき、μを未知変数として次の関係式を満たすとする。

$$\xi_1=(\mu-(N-1))+\eta_1$$

$$\xi_k=(\mu-(N-k))\xi_{k-1}+\eta_k \qquad (k=2,3,...,N-1)$$

$$0=\mu\xi_{N-1}+\eta_N$$

このとき、μは$\rho_l(l=1,2,...,N)$の1つに等しい。例えば$\mu=\rho_N$とすると

$$\begin{vmatrix} \xi_1+\rho-(N-2) & -1 & & & \\ \xi_2 & \rho-(N-3) & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ \xi_{N-1} & & 0 & & \rho \end{vmatrix}$$

$$=[\rho]_{N-1}+\xi_1[\rho]_{N-2}+...+\xi_{N-1}$$

$$=\prod_{l=1}^{N-1}(\rho-\rho_l)$$

が成立する。

この補題の結果、$\mu(0)+(n-1)$, $\mu(1)+(n-1)$はそれぞれの特性根$\rho(0)$, $\rho(1)$で与えられることが分かる。そこで

$$\mu(0)=\rho_n(0)-(n-1),\ \mu(1)=\rho_n(1)-(n-1)$$

として、係数$\xi_k(h)$を関係式(13)-(16)式から一意的に決定できる。またこのとき、B(h)の対角成分である$\beta_{n,n}(h)$も決定されていることに注意しておく。

次には

$$e_{n,n-k}(h;\phi)=\xi_k(h)\phi^{-k}+\ ...$$

の決定と同様の議論をn⇒n-1として行なう。続いてn-1⇒n-2...として進めればよい。これによって、B(h) の対角成分を決定することができる。(関係式が複雑になっていくが、補題を利用して話を展開してゆく点は全く同様である。)

さらに、これまでの結果を利用して

$$e_{n,n-k}(h:\phi)=\xi_k(h)\phi^{-k}+\ldots \quad (k=2,3,\ldots,n-1)$$

での右辺の第2項の係数を決定する。このとき $\beta_{n,n-1}(h)$ も決定できる。この議論をn⇒n-1つづいてn-1⇒n-2....と進めていけばよい。これによって、B(h) の主対角の一段下のsubdiagonalの成分を定めることができる。 その後、第3項の係数の決定へと進んで行けばよい。

その結果、次の事実が言える。

単独の線形微分方程式(1)は、有理関数による線形変換で(2)の Schlesinger 標準形に変換され、C_0,C_1 の対角成分は $(\rho_0(1),\rho_0(2)-1,\ldots,\rho_0(n)-(n-1))$, $(\rho_1(1),\rho_1(2)-1,\ldots,\rho_1(n)-(n-1))$ で、C_∞ は $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ を固有値にもつ同伴行列である。ただし $\rho_0()$,$\rho_1()$ は 0,1 での(1)の特性根とする。

また、REDUCEでのプログラム例を以下にしめしておく。

```
ARRAY AA0(N,N);
  FOR I:=1:N DO
   BEGIN
     FOR K:=0:N DO WRITE
        AA0(I,K):=SUB(SS=0,SUB(S=0,DF(A(I),S,K)))/(FOR J:=1:K PRODUCT J);
   END;
ARRAY AA1(N,N);
  FOR I:=1:N DO
   BEGIN
     FOR K:=0:N DO WRITE
        AA1(I,K):=DF(SUB(S=0,DF(A(I),S,K)),SS)/(FOR J:=1:K PRODUCT J);
   END;
OPERATOR P0;
OPERATOR P1;
ARRAY MKSI0(N,N,N);
ARRAY MKSI1(N,N,N);
%% STEP1  %%
 MKSI0(N,N-1,1):=P0(N)-(N-1)+AA0(1,0)-AA1(1,0);
 MKSI1(N,N-1,1):=P1(N)-(N-1)-(AA0(1,0)+AA1(1,0));
 FOR K:=1:N-2 DO WRITE
  MKSI0(N,N-(K+1),K+1):=-(P0(N)-(N-1)+K)*MKSI0(N,N-K,K)+AA0(K+1,0)-AA1(K+1,0);
 FOR K:=1:N-2 DO WRITE
  MKSI1(N,N-(K+1),K+1):=(P1(N)-(N-1)+K)*MKSI1(N,N-K,K)-AA0(K+1,0)-AA1(K+1,0);
%%  step2  %%
  MKSI0(N-1,N-2,1):=P0(N-1)-(N-2)+MKSI0(N,N-1,1);
  MKSI1(N-1,N-2,1):=P1(N-1)-(N-2)+MKSI1(N,N-1,1);
  FOR K:=1:N-2 DO WRITE
     MKSI0(N-1,N-1-(K+1),K+1)
         :=-(P0(N-1)-(N-2)+K)*MKSI0(N-1,N-1-K,K)+MKSI0(N,N-(K+1),K+1);
  FOR K:=1:N-2 DO WRITE
     MKSI1(N-1,N-1-(K+1),K+1)
         :=(P1(N-1)-(N-2)+K)*MKSI1(N-1,N-1-K,K)+MKSI1(N,N-(K+1),K+1);
%%  STEP3  %%
 FOR J:=2:N-1 DO
   BEGIN
      WRITE
       MKSI0(N-J,N-J-1,1):=P0(N-J)-(N-J-1)+MKSI0(N-J+1,N-J,1);
      WRITE
       MKSI1(N-J,N-J-1,1):=P1(N-J)-(N-J-1)+MKSI1(N-J+1,N-J,1);
     FOR K:=1:N-J-1 DO WRITE
       MKSI0(N-J,N-J-(K+1),K+1)
       :=-(P0(N-J)-(N-J-1)+K)*MKSI0(N-J,N-J-K,K)+MKSI0(N-J+1,N-J+1-(K+1),K+1);
```

```
    FOR K:=1:N-J-1 DO WRITE
       MKSI1(N-J,N-J-(K+1),K+1):=(P1(N-J)-(N-J-1)+K)*MKSI1(N-J,N-J-K,K)
             +MKSI1(N-J+1,N-J+1-(K+1),K+1);
  END;
%%% step4  %%%%%
ARRAY B0(N,N),B1(N,N);
 FOR I:=1:N DO
   BEGIN
    WRITE      B0(I,I):=P1(I)-P0(I);
    WRITE      B1(I,I):=(P0(I)+P1(I))/2-(I-1);
   END;
 MKSI0(N,N-2,1)
     :=B+AA0(1,1)*MKSI0(N,N-1,1)-AA1(2,1)+AA0(2,1)
       -(4*B1(N,N)+2)*(MKSI1(N,N-1,1)+MKSI0(N,N-1,1))*(1/2);
 FOR K:=2:N-1 DO
   BEGIN
      MKSI0(N,N-(K+1),K):=-(P0(N)-(N-K-1))*MKSI0(N,N-K,K-1)
           -B*MKSI0(N-1,N-1-(K-1),K-1)-AA1(K+1,1)+AA0(K+1,1)
           +AA0(1,1)*MKSI0(N,N-K,K)-(4*B1(N,N)+4*K-2)*
                (MKSI1(N,N-K,K)+MKSI0(N,N-K,K))*(1/2);
   END;
   C:=MKSI0(N,0,N-1)$
   C0:=SUB(B=0,C)$
   C1:=DF(C,B)$
   B:=-C0/C1;
 CLEAR C,C0,C1;
 MKSI0(N,N-2,1):=B+AA0(1,1)*MKSI0(N,N-1,1)-AA1(2,1)+AA0(2,1)
       -(4*B1(N,N)+2)*(MKSI1(N,N-1,1)+MKSI0(N,N-1,1))*(1/2);
 FOR K:=2:N-1 DO
   BEGIN
      MKSI0(N,N-(K+1),K):=-(P0(N)-(N-K-1))*MKSI0(N,N-K,K-1)
           -B*MKSI0(N-1,N-1-(K-1),K-1)-AA1(K+1,1)+AA0(K+1,1)
           +AA0(1,1)*MKSI0(N,N-K,K)-(4*B1(N,N)+4*K-2)*
                (MKSI1(N,N-K,K)+MKSI0(N,N-K,K))*(1/2);
   END;
 MKSI1(N,N-2,1):=BB+AA0(1,1)*MKSI1(N,N-1,1)-AA1(2,1)-AA0(2,1)
        +(4*B1(N,N)+2)*(MKSI1(N,N-1,1)+MKSI0(N,N-1,1))*(1/2);
 FOR K:=2:N-1 DO
    BEGIN
      MKSI1(N,N-(K+1),K):=(P1(N)-(N-K-1))*MKSI1(N,N-K,K-1)
           +BB*MKSI1(N-1,N-1-(K-1),K-1)-AA1(K+1,1)-AA0(K+1,1)
           +(4*B1(N,N)+4*K-2)*(MKSI1(N,N-K,K)+MKSI0(N,N-K,K))*(1/2)
```

```
          +AA0(1,1)*MKSI1(N,N-K,K);
    END;
   CC:=MKSI1(N,0,N-1)$
   CC0:=SUB(BB=0,CC)$
   CC1:=DF(CC,BB)$
   BB:=-CC0/CC1;
  CLEAR CC,CC0,CC1;
  MKSI1(N,N-2,1):=BB+AA0(1,1)*MKSI1(N,N-1,1)-AA1(2,1)-AA0(2,1)
          +(4*B1(N,N)+2)*(MKSI1(N,N-1,1)+MKSI0(N,N-1,1))*(1/2);
  FOR K:=2:N-1 DO
     BEGIN
       MKSI1(N,N-(K+1),K):=(P1(N)-(N-K-1))*MKSI1(N,N-K,K-1)
            +BB*MKSI1(N-1,N-1-(K-1),K-1)-AA1(K+1,1)-AA0(K+1,1)
            +(4*B1(N,N)+4*K-2)*(MKSI1(N,N-K,K)+MKSI0(N,N-K,K))*(1/2)
            +AA0(1,1)*MKSI1(N,N-K,K);
     END;
  WRITE B0(N,N-1):=(BB-B)/2;
  WRITE B1(N,N-1):=(BB+B)/2;
  CLEAR B,BB,C0,C,CC,C1,CC0,CC1;
%%%%  STEP5  %%%%%
FOR J:=1:N-2 DO
 BEGIN
      MKSI0(N-J,N-J-2,1):=B-(4*B1(N-J,N-J)+2)*
                (MKSI1(N-J,N-J-1,1)+MKSI0(N-J,N-J-1,1))*(1/2);
     FOR K:=2:N-J-1 DO
        BEGIN
          MKSI0(N-J,N-J-(K+1),K)
              :=(B0(N-J,N-J)-B1(N-J,N-J)+K-1)*MKSI0(N-J,N-J-K,K-1)
                +B*MKSI0(N-J-1,N-J-1-(K-1),K-1)+MKSI0(N-J+1,N-J-K,K)
                 -(4*B1(N-J,N-J)+4*K-2)*
                    (MKSI1(N-J,N-J-K,K)+MKSI0(N-J,N-J-K,K))*(1/2);
        END;
     C:=MKSI0(N-J,0,N-J-1)$
     C0:=SUB(B=0,C)$
     C1:=DF(C,B)$
     B:=-C0/C1;
   CLEAR C,C0,C1;
      MKSI0(N-J,N-J-2,1):=B-(4*B1(N-J,N-J)+2)*
                (MKSI1(N-J,N-J-1,1)+MKSI0(N-J,N-J-1,1))*(1/2);
     FOR K:=2:N-J-1 DO
        BEGIN
          MKSI0(N-J,N-J-(K+1),K)
```

```
            :=(B0(N-J,N-J)-B1(N-J,N-J)+K-1)*MKSI0(N-J,N-J-K,K-1)
             +B*MKSI0(N-J-1,N-J-1-(K-1),K-1)+MKSI0(N-J+1,N-J-K,K)
            -(4*B1(N-J,N-J)+4*K-2)*(MKSI1(N-J,N-J-K,K)
                +MKSI0(N-J,N-J-K,K))*(1/2);
       END;
    MKSI1(N-J,N-J-2,1):=BB+(MKSI1(N-J+1,N-J-1,1)+MKSI0(N-J+1,N-J-1,1))
         +(4*B1(N-J,N-J)+2)*(MKSI1(N-J,N-J-1,1)+MKSI0(N-J,N-J-1,1));
    FOR K:=2:N-J-1 DO
      BEGIN
        MKSI1(N-J,N-J-(K+1),K):=(B1(N-J,N-J)+B0(N-J,N-J)-K+1)
             *MKSI1(N-J,N-J-K,K-1)+BB*MKSI1(N-J-1,N-J-1-(K-1),K-1)
             +MKSI1(N-J+1,N-J-K,K-1)+(4*B1(N-J,N-J)+4*K-2)*
                (MKSI1(N-J,N-J-K,K)+MKSI0(N-J,N-J-K,K))*(1/2);
      END;
     CC:=MKSI1(N-J,0,N-J-1)$
     CC0:=SUB(BB=0,CC)$
     CC1:=DF(CC,BB)$
     BB:=-CC0/CC1;
   CLEAR CC,CC0,CC1;
    MKSI1(N-J,N-J-2,1):=BB+(MKSI1(N-J+1,N-J-1,1)+MKSI0(N-J+1,N-J-1,1))
         +(4*B1(N-J,N-J)+2)*(MKSI1(N-J,N-J-1,1)+MKSI0(N-J,N-J-1,1));
    FOR K:=2:N-J-1 DO
      BEGIN
        MKSI1(N-J,N-J-(K+1),K):=(B1(N-J,N-J)+B0(N-J,N-J)-K+1)
               *MKSI1(N-J,N-J-K,K-1)+BB*MKSI1(N-J-1,N-J-1-(K-1),K-1)
             +MKSI1(N-J+1,N-J-K,K-1)+(4*B1(N-J,N-J)+4*K-2)*
                (MKSI1(N-J,N-J-K,K)+MKSI0(N-J,N-J-K,K))*(1/2);
      END;
    WRITE
     B0(N-J,N-J-1):=(BB-B)/2;
    WRITE
     B1(N-J,N-J-1):=(BB+B)/2;
     CLEAR B,BB,C0,C1,CC0,CC1;
 END;
     CLEAR B,BB,C0,C1,CC0,CC1;
%%%%% step6 %%%%%%
FOR M:=3:N DO
  BEGIN
      MKSI0(N,N-M,1):=B+ (FOR I:=1:M-1 SUM AA0(I,I)*MKSI0(N-I+1,N-M+1,1))
              -AA1(M,M-1)+AA0(M,M-1)-(FOR I:=1:M-1 SUM
               2*B1(N,N-I+1)*(MKSI1(N-I+1,N-M+1,1)+MKSI0(N-I+1,N-M+1,1)) )
               -(MKSI1(N,N-M+1,1)+MKSI0(N,N-M+1,1));
```

```
if n)m then do
 begin
   FOR K:=M:N-1 DO
     BEGIN
       MKSI0(N,N-(K+1),K-M+2):=-(K-M+1)*MKSI0(N,N-K,K-M+1)
           -(FOR I:=0:M-2 SUM (B1(N,N-I)-B0(N,N-I))*MKSI0(N-I,N-K,K-M+1) )
           -B*MKSI0(N-1,N-1-(K-1),K-1)
           +(FOR I:=1:M-1 SUM (AA0(I,I)*MKSI0(N-I+1,N-K,K-M+2)) )
            -AA1(K+1,M-1)+AA0(K+1,M-1)-(FOR I:=0:M-2 SUM (2*B1(N,N-I)*
                   (MKSI1(N-I,N-K,K-M+2)+MKSI0(N-I,N-K,K-M+2))) )
           +(-2*K+2*M-3)*(MKSI1(N,N-K,K-M+2)+MKSI0(N,N-K,K-M+2));
     END;
 end;
   C:=MKSI0(N,0,N-M+1)$
   C0:=SUB(B=0,C)$
   C1:=DF(C,B)$
   B:=-C0/C1;
 CLEAR C,C0,C1:
   MKSI0(N,N-M,1)
         :=B+ (FOR I:=1:M-1 SUM  AA0(I,I)*MKSI0(N-I+1,N-M+1,1))
           -AA1(M,M-1)+AA0(M,M-1) -(FOR I:=1:M-1 SUM
            2*B1(N,N-I+1)*(MKSI1(N-I+1,N-M+1,1)+MKSI0(N-I+1,N-M+1,1)) )
            -(MKSI1(N,N-M+1,1)+MKSI0(N,N-M+1,1));
if n)m then do
 begin
   FOR K:=M:N-1 DO
     BEGIN
       MKSI0(N,N-(K+1),K-M+2):=-(K-M+1)*MKSI0(N,N-K,K-M+1)
           -(FOR I:=0:M-2 SUM
                 (B1(N,N-I)-B0(N,N-I))*MKSI0(N-I,N-K,K-M+1) )
           -B*MKSI0(N-1,N-1-(K-1),K-1)
           +(FOR I:=1:M-1 SUM  (AA0(I,I)*MKSI0(N-I+1,N-K,K-M+2)) )
            -AA1(K+1,M-1)+AA0(K+1,M-1)
           -(FOR I:=0:M-2 SUM  (2*B1(N,N-I)*
                   (MKSI1(N-I,N-K,K-M+2)+MKSI0(N-I,N-K,K-M+2))) )
           +(-2*K+2*M-3)*(MKSI1(N,N-K,K-M+2)+MKSI0(N,N-K,K-M+2));
     END;
 end;
   MKSI1(N,N-M,1)
     :=BB + (FOR I:=1:M-1 SUM  ( AA0(I,I)*MKSI1(N-I+1,N-M+1,1) ))
       -AA1(M,M-1)-AA0(M,M-1)+(MKSI1(N,N-M+1,1)+MKSI0(N,N-M+1,1))
       + (FOR I:=1:M-1 SUM  ( B1(N,N-I+1)*(MKSI1(N-I+1,N-M+1,1)
```

```
                    +MKSI0(N-I+1,N-M+1,1))*(1/2) ));
if n)m then do
 begin
   FOR K:=M:N-1 DO
     BEGIN
       MKSI1(N,N-(K+1),K-M+2):=(K-M+1)*MKSI1(N,N-K,K-M+1)
            + BB*MKSI1(N-M+1,N-K,K-M+1) + (FOR I:=0:M-2 SUM
                     (B1(N,N-I)+B0(N,N-I))*MKSI1(N-I,N-K,K-M+1) )
            -AA1(K+1,M-1)-AA0(K+1,M-1)
            + (FOR I:=1:M-1 SUM (AA0(I,I)*MKSI1(N-I+1,N-K,K-M+2)) )
            + (FOR I:=0:M-2 SUM
             (2*B1(N,N-I)*(MKSI1(N-I,N-K,K-M+2)+MKSI0(N-I,N-K,K-M+2))) )
            -(-2*K+2*M-3)*(MKSI1(N,N-K,K-M+2)+MKSI0(N,N-K,K-M+2)):
      END;
  end;
   CC:=MKSI1(N,0,N-M+1)$
   CC0:=SUB(BB=0,CC)$
   CC1:=DF(CC,BB)$
   BB:=-CC0/CC1;
  CLEAR CC,CC0,CC1;
    MKSI1(N,N-M,1)
      :=BB + (FOR I:=1:M-1 SUM
               ( AA0(I,I)*MKSI1(N-I+1,N-M+1,1) ))
         -AA1(M,M-1)-AA0(M,M-1)+(MKSI1(N,N-M+1,1)+MKSI0(N,N-M+1,1))
         + (FOR I:=1:M-1 SUM ( B1(N,N-I+1)*(MKSI1(N-I+1,N-M+1,1)
                    +MKSI0(N-I+1,N-M+1,1))*(1/2) ));
if n)m then do
 begin
   FOR K:=M:N-1 DO
     BEGIN
       MKSI1(N,N-(K+1),K-M+2):=(K-M+1)*MKSI1(N,N-K,K-M+1)
            + BB*MKSI1(N-M+1,N-K,K-M+1) + (FOR I:=0:M-2 SUM
                     (B1(N,N-I)+B0(N,N-I))*MKSI1(N-I,N-K,K-M+1) )
            -AA1(K+1,M-1)-AA0(K+1,M-1)
            + (FOR I:=1:M-1 SUM (AA0(I,I)*MKSI1(N-I+1,N-K,K-M+2)) )
            + (FOR I:=0:M-2 SUM
              (2*B1(N,N-I)*(MKSI1(N-I,N-K,K-M+2)+MKSI0(N-I,N-K,K-M+2))) )
            -(-2*K+2*M-3)*(MKSI1(N,N-K,K-M+2)+MKSI0(N,N-K,K-M+2));
      END;
  end;
 WRITE
  B0(N,N-M+1):=(BB-B)/2;
```

```
     WRITE
      B1(N,N-M+1):=(BB+B)/2;
      CLEAR B,BB,C,C0,C1,CC,CC0,CC1;
%%%%% STEP7(CONTINUED) %%%%%%
     J:=1;
     WHILE (J<N-M+1) DO
        BEGIN
            MKSI0(N-J,N-J-M,1):=B -(FOR I:=1:M-1 SUM 2*B1(N-J,N-J-I+1)*
                      (MKSI1(N-J-I+1,N-J-M+1,1)+MKSI0(N-J-I+1,N-J-M+1,1)))
                 -(MKSI1(N-J,N-J-M+1,1)+MKSI0(N-J,N-J-M+1,1));
            FOR K:=M:N-J-1 DO
             BEGIN
                MKSI0(N-J,N-J-(K+1),K-M+2):=-(K-M+1)*MKSI0(N-J,N-J-K,K-M+1)
                    -(FOR I:=0:M-2 SUM (B1(N-J,N-J-I)-B0(N-J,N-J-I))
                              *MKSI0(N-J-I,N-J-K,K-M+1) )
                    -B*MKSI0(N-J-1,N-J-1-(K-1),K-1) + MKSI0(N-J+1,N-J-K,K-M+2)
                    -(FOR I:=0:M-2 SUM (2*B1(N-J,N-J-I)*
                      (MKSI1(N-J-I,N-J-K,K-M+2)+MKSI0(N-J-I,N-J-K,K-M+2))) )
                    +(-2*K+2*M-3)
                       *(MKSI1(N-J,N-J-K,K-M+2)+MKSI0(N-J,N-J-K,K-M+2));
             END;
           C:=MKSI0(N-J,0,N-J-M+1)$
           C0:=SUB(B=0,C)$
           C1:=DF(C,B)$
           B:=-C0/C1;

          CLEAR C,C0,C1;
           MKSI0(N-J,N-J-M,1):=B -(FOR I:=1:M-1 SUM
                    2*B1(N-J,N-J-I+1)*
                      (MKSI1(N-J-I+1,N-J-M+1,1)+MKSI0(N-J-I+1,N-J-M+1,1)))
                -(MKSI1(N-J,N-J-M+1,1)+MKSI0(N-J,N-J-M+1,1));
           FOR K:=M:N-J-1 DO
            BEGIN
               MKSI0(N-J,N-J-(K+1),K-M+2)
                 :=-(K-M+1)*MKSI0(N-J,N-J-K,K-M+1)
                   -(FOR I:=0:M-2 SUM
                    (B1(N-J,N-J-I)-B0(N-J,N-J-I))*MKSI0(N-J-I,N-J-K,K-M+1) )
                   -B*MKSI0(N-J-1,N-J-1-(K-1),K-1)+MKSI0(N-J+1,N-J-K,K-M+2)
                   -(FOR I:=0:M-2 SUM
                          (2*B1(N-J,N-J-I)*(MKSI1(N-J-I,N-J-K,K-M+2)
                                 +MKSI0(N-J-I,N-J-K,K-M+2))) )
                   +(-2*K+2*M-3)
```

```
            *(MKSI1(N-J,N-J-K,K-M+2)+MKSI0(N-J,N-J-K,K-M+2)):
   END;
  MKSI1(N-J,N-J-M,1)
     :=BB + MKSI1(N-J+1,N-J-M+1,1)
       + (MKSI1(N-J,N-J-M+1,1)+MKSI0(N-J,N-J-M+1,1))
       + (FOR I:=1:M-1 SUM
          (2*B1(N-J,N-J-I+1)*
              (MKSI1(N-J-I+1,N-J-M+1,1)+MKSI0(N-J-I+1,N-J-M+1,1)) ));
   FOR K:=M:N-J-1 DO
    BEGIN
      MKSI1(N-J,N-J-(K+1),K-M+2):=(K-M+1)*MKSI1(N-J,N-J-K,K-M+1)
           + BB*MKSI1(N-J-M+1,N-J-K,K-M+1)
           + (FOR I:=0:M-2 SUM
              (B1(N-J,N-J-I)+B0(N-J,N-J-I))*MKSI1(N-J-I,N-J-K,K-M+1) )
           + MKSI1(N-J+1,N-J-K,K-M+2)
           + (FOR I:=0:M-2 SUM (2*B1(N-J,N-J-I)*
               (MKSI1(N-J-I,N-J-K,K-M+2)+MKSI0(N-J-I,N-J-K,K-M+2))) )
         -(-2*K+2*M-3)*(MKSI1(N-J,N-J-K,K-M+2)+MKSI0(N-J,N-J-K,K-M+2));
    END;
  CC:=MKSI1(N-J,0,N-J-M+1)$
  CC0:=SUB(BB=0,CC)$
  CC1:=DF(CC,BB)$
  BB:=-CC0/CC1;
 CLEAR CC,CC0,CC1;
  MKSI1(N-J,N-J-M,1):=BB + MKSI1(N-J+1,N-J-M+1,1)
       + (MKSI1(N-J,N-J-M+1,1)+MKSI0(N-J,N-J-M+1,1))
       + (FOR I:=1:M-1 SUM  (2*B1(N-J,N-J-I+1)*
             (MKSI1(N-J-I+1,N-J-M+1,1)+MKSI0(N-J-I+1,N-J-M+1,1)) ));
   FOR K:=M:N-J-1 DO
    BEGIN
      MKSI1(N-J,N-J-(K+1),K-M+2):=(K-M+1)*MKSI1(N-J,N-J-K,K-M+1)
           + BB*MKSI1(N-J-M+1,N-J-K,K-M+1)
           + (FOR I:=0:M-2 SUM
              (B1(N-J,N-J-I)+B0(N-J,N-J-I))*MKSI1(N-J-I,N-J-K,K-M+1) )
           + MKSI1(N-J+1,N-J-K,K-M+2)
           + (FOR I:=0:M-2 SUM   (2*B1(N-J,N-J-I)*
                 (MKSI1(N-J-I,N-J-K,K-M+2)+
                     MKSI0(N-J-I,N-J-K,K-M+2))) )
         -(-2*K+2*M-3)*(MKSI1(N-J,N-J-K,K-M+2)+MKSI0(N-J,N-J-K,K-M+2));
    END;
WRITE     B0(N-J,N-J-M+1):=(BB-B)/2;
WRITE     B1(N-J,N-J-M+1):=(BB+B)/2;
```

```
      CLEAR B,BB,C,C0,C1,CC,CC0,CC1;
     J:=J+1;
   END;
 END;
END;
END;
```

参考文献

[1] M.Kohno: A simle reduction of single linear differential equations to Birkhoff and Schlesinger's canonical systems. Kumamoto J.Math. 2,9-27(1989)

[2] T.Hamano and S.Ohkohchi: Reduction of general single linear differential equations to Schlesinger's canonical systems. Kumamoto J.Math. 3,27-54(1990)

[3] 河野實彦：REDUCEでReduceをII 数理解析研究所講究録 729 122-139(1990)