数理解析研究所講究録
756巻 1991年 64-67

Teichmüller空間の de Rham 複体への Fenchel-Nielsen flow の作用

東大理 河澄響矢 (Nariya Kawazumi)

種数 g の compact Riemann面の moduli空間 $\mathbb{M}_g$ ($g \geqq 2$) の実 cohomology環 $H^*(\mathbb{M}_g ; \mathbb{R})$ は種数 g の閉曲面 Σ_g を fiber とする fiber 束の実特性類の全体と一致し、重要な対象である。moduli空間 $\mathbb{M}_g$ が、種数 g compact Riemann面の Teichmüller空間 T_g を曲面 Σ_g の写像類群 $\mathcal{M}_g$ の自然な作用によって割った商空間であることを思い出す：

$$\mathbb{M}_g = T_g / \mathcal{M}_g$$

他方、写像類群と算術群の類似性（及び相違）は Harer 等によって様々に述べられている。この話は、それをやや粗雑な形で推し進めたものである。

C^∞ 多様体 M について、M 上の C^∞ 微分形式全体のなす複体、即ち M の de Rham複体を $\Omega^*(M)$ で表すことにする。

算術群 Γ の場合、Γ を離散部分群として含む半単純 Lie 群 G とその極大 compact 群 K について包含準同型

$$H^*(\Omega^*(G/K)^G) \to H^*(\Omega^*(G/K)^\Gamma) = H^*(\Gamma\backslash G/K)$$

を考えると、これが * 充分小で同型となり、$SL(\infty, \mathbb{Z})$, $Sp(2\infty, \mathbb{Z})$ などの実 cohomology が求まったのであった。(松島村上 [Ma] Borel [B])

これを写像類群 $\mathcal{M}_g$ についても考えたい。

Dehn-Lickorish により、写像類群 $\mathcal{M}_g$ は Dehn twist によって生成されている。Dehn twist を、「角 θ, $\theta \in \mathbb{R}$, で止める」ことにより得られる Teichmüller 空間 T_g 上の flow が Fenchel-Nielsen flow である。そこで Fenchel-Nielsen flow 全体の生成する T_g の変換群を FN と書くと、群 FN は写像類群 $\mathcal{M}_g$ を「離散的に」含む「連続な」群となる。また、群 FN は T_g に推移的に作用する。(cf. [AG] pp 138-141. 尚、FN それ自身の性質はほとんど不明である。)(種数 1 の場合、同様の構成を行うと、$\mathcal{M}_1 = SL(2, \mathbb{Z})$ に対し、$FN = SL(2, \mathbb{R})$ となる。) そこで、包含準同型

$$H^*(\Omega^*(T_g)^{FN}) \to H^*(\Omega^*(T_g)^{\mathcal{M}_g}) = H^*(M_g)$$

を考えることができる。

結果 $* \leqq 3g-5$ について

$$H^*(\Omega^*(T_g)^{FN}) = \Omega^*(T_g)^{FN} = \mathbb{R}[\omega].$$

が成立つ。ここに $\omega \in \Omega^2(T_g)$ は Weil-Petersson Kähler 形式を表す。 ——

これを既知の結果と組合せて次がえられる。

系 包含準同型

$$H^*(\Omega^*(T_g)^{FN}) \to H^*(\Omega^*(T_g)^{\mathcal{M}_g}) = H^*(\mathbb{M}_g)$$

は

安定的に単射である。（森田 [Mo]）

$* \geqq 4$ については安定的にも全射ではない。（森田 [Mo]）

$* = 0, 1, 2$ について同型である。（Harer [H], Powell [P]）

結果 ⇒ 系の証明　森田 [Mo] により安定的に（i.e. $* \ll g$）

$\mathbb{R}[e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots] \subset H^*(\mathbb{M}_g; \mathbb{R})$,　$\deg e_i = 2i$

となることが知られている。知られているように $\frac{1}{2\pi^2}[\omega] = e_1$ であるから、1行目の結果が分る。e_i ($i \geqq 2$) $\notin$ Image であるから2行目が分る。//

したがって、不幸なことであるが、群 FN を使っては、compact Riemann 面の moduli 空間 $\mathbb{M}_g$ の安定実 cohomology を決定することはできない、ということが分る。

結果の証明は、閉曲面 Σ_g の pants 分解に伴う Fenchel-Nielsen 座標に関する tensor 計算を用いる。Wolpert [W3] に従い、pants 分解を保ち、向きを逆にする Σ_g の対合 ρ を用いる。ρ の作用により、$\Omega^*(T_g)^{FN}$ は ± 1 固有空間に分解する。これにより $\Omega^*(T_g)^{FN}$ の計算が可能になる。$* \geqq 2$

について、計算は、複雑だが、初等的である。他方$k=1$では、測地長函数のWeil-Petersson Hessianの正値性[W4]を使う。

実際の計算を御覧になりたい方は、preprintを御請求下さい。

REFERENCES

[Ab] W. Abikoff, "The Real analytic Theory of Teichmüller Space," Lecture Note in Math. **820**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1976.

[Ah] L. V. Ahlfors, *Some remarks on Teichmüller's space of Riemann surfaces*, Ann. of Math. **74** (1961), 171–191.

[B] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 235–272.

[G1] W. M. Goldman , *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces*, Adv. Math. **54** (1984), 200–225.

[G2] ———————, *Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations*, Invent. Math. **85** (1986), 263–302.

[H] J. L. Harer, *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. **72** (1983), 221–239.

[K] S. P. Kerckhoff, *The Nielsen realization problem*, Ann. of Math. **117** (1983), 235–265.

[L] W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math. **76** (1962), 531–540.

[Ma] Y. Matsushima, *On Betti numbers of compact, locally symmetric Riemannian manifolds*, Osaka Math. J. **14** (1962), 1–20.

[Mo] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. **90** (1987), 551–577.

[P] J. Powell, *Two theorems on the mapping class group of a surface*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), 347–350.

[W1] S. Wolpert , *The Fenchel-Nielsen deformation*, Ann. of Math. **115** (1982), 501–528.

[W2] ————, *On the symplectic geometry of deformations of a hyperbolic surface*, Ann. of Math. **117** (1983), 207–234.

[W3] ————, *On the Weil-Petersson geometry of the moduli space of curves*, Amer. J. Math. **107** (1985), 969–997.

[W4] ————, *Geodesic length functions and the Nielsen problem*, J. Differential Geom. **25** (1987), 275–296.