数理解析研究所講究録
756巻 1991年 33-40

U(1) gauge 理論にもとづく3次元多様体の位相不変量 I

東大・理 牛腸 徹 (Toru Gocho)

§1. introduction.

数年前. Witten は [W] において新らしい type の3次元多様体(及びその中の link)の位相不変量の存在を物理的な議論により示した。そこでは不変量を Feynmann の径路積分により定義するという論法がとられている。これを直接に扱うことは現在の数学ではできないので. この"積分"が持つべき性質を抽出して不変量を公理的にとらえようという考えが Atiyah, Segal により提出され(Atiyah のいう topological quantum field theory [A])数学サイドとしてはこの公理にのるように不変量を厳密に構成するという態度がとられているように思われる。中でも [K], [R-T] などにより現在ではこうした不変量の数学的な存在は確立されている.

さて. original の [W] における考え方. 及びこれに関連した Atiyah 周辺の人達の研究によると. この不変量

は微分幾何学的な構成が可能なように思われる。彼らの主張にもとづき、できる限り幾何学的に不変量を構成し、理解したいというのが筆者の希望である。そのために、[W]においては非可換なgauge群に対する場合が扱われているが、まずgauge群が可換なU(1)のときに同様の構成を幾何的にexplicitに行なうことから始めようと思ったわけである。以下[W]における考え方をbaseにこの場合の不変量の構成を説明したい。

§2. 不変量構成のあらまし

Mをclosed oriented 3次元多様体とし、$P_M = M \times U(1)$をtrivial U(1) bundleとする。このとき$\mathcal{A}_M$をP_M上のconnection space $\mathcal{A}_M \cong \Omega^1(M, \sqrt{-1}\mathbb{R})$として、$\mathcal{A}_M$上に$CS(A) = \frac{1}{4\pi}\int_M A \wedge dA$なる関数$CS : \mathcal{A}_M \longrightarrow \mathbb{R}$を考える。このときWitten流に不変量を定義すれば、

$$Z_k(M) = \int_{\mathcal{A}_M} e^{\sqrt{-1}kCS(A)} \mathcal{D}A \qquad (k \text{ は parameter})$$

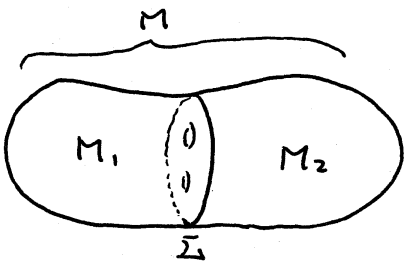
となる。

こうしたものが数学的にとらえられるようなものにまでreduceできるmagicは、Mがnon-emptyな境界をもつ場合にも不変量$Z_k(M)$を拡張して考えることができる点にある。すなわち、Mの境界∂Mを$\partial M = \Sigma$として、

P_Σ, $\mathcal{A}_\Sigma$ などを上で M を Σ にかえたものとし、$r : \mathcal{A}_M \to \mathcal{A}_\Sigma$ を restriction map とするとき、拡張された不変量 $Z_k(M)$ は $\mathcal{A}_\Sigma$ 上の関数 $Z_k(M) : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathbb{C}$ として、

$$Z_k(M)(a) = \int_{r^{-1}(a)} e^{\sqrt{-1}\,k\,CS(A)} \mathcal{D}A$$

により定義される。



このように不変量を拡張して考える利点は、

$M = M_1 \cup_\Sigma M_2$, $\partial M_1 = \Sigma = -\partial M_2$ と分解したときに、

$$\begin{aligned} Z_k(M) &= \int_{\mathcal{A}_M} e^{\sqrt{-1}\,k\,CS(A)} \mathcal{D}A \\ &= \int_{\mathcal{A}_M} e^{\sqrt{-1}\,k\,CS(A_1) + \sqrt{-1}\,k\,CS(A_2)} \mathcal{D}A \qquad , A_i = A|_{M_i} \\ &= \int_{\mathcal{A}_\Sigma} Z_k(M_1)(a)\, \overline{Z_k(M_2)(a)}\, \mathcal{D}a \\ &= \langle Z_k(M_1), Z_k(M_2) \rangle \end{aligned}$$

と $Z_k(M)$ が $Z_k(M_1)$ と $Z_k(M_2)$ の pairing で定義できる点にある。

さて、ここでは説明を略すが、M が non-empty な境界 $\partial M = \Sigma$ をもつときの不変量 $Z_k(M)$ は、Σ 上に complex structure J を fix するごとに、complex gauge 変換群 $\mathcal{G}_\Sigma^{\mathbb{C}} = C^\infty(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ による symmetry で割ってやることで、商空間 $\mathcal{M}_{\Sigma,J} = \mathcal{A}_\Sigma /\!/ \mathcal{G}_\Sigma^{\mathbb{C}}$ 上の holomorphic line bundle $\mathcal{L}_{\Sigma,J}^{(k)} \to \mathcal{M}_{\Sigma,J}$ の holomorphic section とみなすことができる。ただしこのために parameter k は $k \in \mathbb{Z}$ と量子化

される。（$\mathcal{A}_\Sigma$ は trivial bundle $\mathbb{C} \to \Sigma$ 上の holomorphic line bundle structure 全体とみなせ、$\mathcal{G}_\Sigma^{\mathbb{C}} = GL(\mathbb{C})$ であることから $\mathcal{M}_{\Sigma,J}$ は degree 0 の line bundle の moduli 空間いわゆる Picard variety となる。）これにより、original の $Z_k(M) : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathbb{C}$ を $Z_k(M) \in H^0(\mathcal{M}_{\Sigma,J}, \mathcal{L}_{\Sigma,J}^{(k)})$ ととらえなおすという idea が生まれ、不変量 $Z_k(M)$ は、M の境界 $\partial M = \Sigma$ に付随した有限次元 vector space の元としてとらえなおすことができる。（これが Atiyah の topological quantum field theory の idea である。）

今、$H^0(\mathcal{M}_{\Sigma,J}, \mathcal{L}_{\Sigma,J}^{(k)})$ を $\mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)}$ と書き、$\mathcal{H}_\Sigma^{(k)} = \bigcup_J \mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)}$ を Σ の Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_\Sigma$ 上の vector bundle とみなすとき、$\mathcal{H}_\Sigma^{(k)}$ には projective flat connection が入るというのが [W] の主張である。さらに $\mathcal{H}_\Sigma^{(k)}$ には Σ の mapping class group $\Gamma_\Sigma = \mathcal{D}iff^+(\Sigma)/\mathcal{D}iff_0^+(\Sigma)$ が作用し、この connection に対する monodromy 表現として $\mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)}$ 上に Γ_Σ が projective linear に作用することになる。実際に gauge 群が $U(1)$ のときには上記 $\mathcal{H}_\Sigma^{(k)}$ は Siegel 上半平面上の vector bundle に拡張し、Γ_Σ は Siegel modular 群 $Sp(2g, \mathbb{Z})$（g は Σ の genus）を通して作用する。（ここで Γ_Σ の作用をもつために $k \in 2\mathbb{Z}$ と量子化される。）

このとき得られる monodromy 表現は次のようになる。

$\mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)}$ は $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^g$ を parameter とする unitary base $\{\Psi_\ell\}_{\ell\in(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^g}$ をもつ Hilbert 空間となり、$\mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)}$ 上の $Sp(2g,\mathbb{Z})$ の作用は generator に対して、

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\cdot\Psi_\ell = k^{-g/2}\sum_{\ell'} e^{2\pi\sqrt{-1}\,{}^t\ell'\cdot\ell/k}\,\Psi_{\ell'}$$

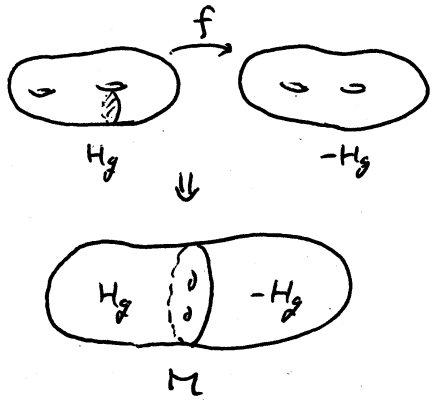
$$\begin{pmatrix} A & \\ & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}\cdot\Psi_\ell = \sum_{\ell'} a_{\ell'\ell}\,\Psi_\ell\ , \qquad A\in GL(g,\mathbb{Z})$$

ここで $a_{\ell'\ell} = \begin{cases} 1 & \text{if } {}^tA\ell'=\ell \\ 0 & \text{if } {}^tA\ell'\neq\ell \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & B \\ & 1 \end{pmatrix}\cdot\Psi_\ell = e^{\sqrt{-1}\pi\,{}^t\ell B\ell/k}\,\Psi_\ell\ , \qquad B\in M_g(\mathbb{Z}),\ {}^tB=B$$

で与えられる。

こうして $\partial M=\Sigma$ のとき $Z_k(M)$ の属すべき Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\Sigma,J}^{(k)}$ 及びそこへの mapping class group Γ_Σ の作用が定まると closed oriented 3次元多様体 M に対する不変量が任意の M は Heegaard 分解をもつことを利用して定義できる。すなわち H_g を genus g の handle body, $\partial H_g=\Sigma_g$, $f\in\Gamma_{\Sigma_g}$ として、M が、$M=H_g\cup_f(-H_g)$ と表わせるとすると、topological quantum field theory の要請から $Z_k(M)=\langle f\cdot Z_k(H_g),\ Z_k(H_g)\rangle$ となるなければならないことが分かる。したがってこの $Z_k(M)$ が M の Heegaard 分解の仕方によらないように、



$Z_K(H_g)$ が定義できればよいことになる。$Z_K(M)$ の不変性は Reidemeister-Singer の stabilization theorem を用いて確かめられる。これは [K] において用いられた idea であるが、我々の場合にも当然適用できる。実際、$Z_K(H_g) = K^{(g-1)/2}\Psi_0$ とすればよいことが分かる。

こうして得られた不変量は $\mathcal{H}^{(K)}_{\Sigma,J}$ への表現が projective のため、$Z_K(M) \in \mathbb{C}/U(1)$ となる。（実際には monodromy 表現 $\Gamma_\Sigma \to U(\mathcal{H}^{(K)}_{\Sigma,J})/U(1)$ は $\Gamma_\Sigma \to U(\mathcal{H}^{(K)}_{\Sigma,J})/\{\pm 1\}$ まで持ち上がるので $Z_K(M) \in \mathbb{C}/\{\pm 1\}$ となる。）

計算例を少しあげると、

- M : homology 3 sphere に対して

$$Z_K(M) = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

- $$Z_K(\Sigma_g \times S^1) = K^g \quad (= \dim \mathcal{H}^{(K)}_{\Sigma,J})$$

- $M = L_{p,q}$ lens 空間に対して

$$\frac{q}{p} = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots + \cfrac{1}{n_r}}} \qquad (n_i \in \mathbb{Z})$$

とするとき

$$A = \begin{pmatrix} n_1 & 1 & & & \\ 1 & -n_2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \mp 1 & \\ & & \mp 1 & \pm n_r \end{pmatrix}$$

なる $A \in M_r(\mathbb{Z})$ を用いて

$$Z_K(L_{p,q}) = \frac{1}{K^{(r+1)/2}} \sum_{l \in (\mathbb{Z}/K\mathbb{Z})^r} e^{-\pi\sqrt{-1}\, {}^t l A l / K}$$

などとなる。

最後に、こうした不変量が3次元多様体Mのどのような不変量と関係しているのかを調べることは、gauge群を非可換にした場合の不変量がどのような種類の不変量の拡張となっているのかを知る上でも大切なことである。これに関しては、現在大槻氏による研究が進行中なのでそちらに期待したいと思う。又、一般の境界付き3次元多様体M に対する不変量 $Z_k(M)$ も gauge群が $U(1)$ のときには、$H^1(M, \mathbb{Z}) \to H^1(\partial M, \mathbb{Z})$ という restriction map により割に直接的に定義ができるようなので、この点でも非可換 gauge 群の場合の理解に役立つのではないかと期待している。

(references)

[A]. M.F. Atiyah, Topological quantum field theories, Publ. I.H.E.S. 68 (1989) 175-186

[G] T. Gocho, The topological invariant of three-manifolds based on the U(1) gauge theory (preprint)

[K]. T. Kohno, Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class group I (preprint)

[R-T]. N. Reshetikhin, V. Turaev, Invariants of 3-manifolds via Link polynomials and Quantum group.

Invent. Math. 103 (1991), 547-597

[W]. E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial

Comm. Math. Phys. 121 (1989) 351-399