数理解析研究所講究録
757巻 1991年 122-132

Microdifferential Equations with Non-Involutory Characteristics.

防衛大　打越 敬祐
(Keisuke Uchikoshi).

要旨　従来，Fuchsian 双曲型作用素と呼ばれていたものについて，Levi 条件のない一般的な情況で 右(左)パラメトリクスを構成する。

§0. 主要結果

$(x,\xi)\in\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^n$ とし，$\mathring{x}^* = (0,0,\cdots,0,\sqrt{-1})\in\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^n$ とする。$P\in\mathcal{E}_{\mathring{x}^*}$ が

(1) $$P(x,D) = (x_1D_1)^m + \sum_{j=0}^{m-1} P^{(j)}(x,D)(x_1D_1)^j$$

という形になっているとする。ここで，$(x_1D_1)^j=(x_1D_1)\cdots(x_1D_1)$ とし，

(2) $$\operatorname{ord} P^{(j)}\ (= P^{(j)} \text{ の階数}) \le m-j-1, \qquad 0\le j\le m-1$$

とする．以下，ℓ階作用素 $X \in \mathcal{E}_{\mathfrak{X}^*}$ に対し，Xの完全表象 (resp. 主要表象) を $\sigma(X)$ (resp. $\sigma_\ell(X)$) と記す．(1), (2) より，$\sigma_m(P) = (x_1\xi_1)^m$ である．$\kappa \in \mathbb{Q}$ ($\kappa < 1$) を，

(3) $$\kappa = \max_{0 \le j \le m-1} (\mathrm{ord}\, P^{(j)}/m-j)$$

とする．$\kappa \le 0$ のとき，P は Levi 条件をみたすという．
従来は，Levi 条件を仮定したとき $Pu=0$ の解 u の特異性の伝播に関する多くの研究がなされた．以下，Levi 条件がなくてもほとんど同様の結果が成立することを示す．

$d \subset \{0, \cdots, m-1\}$ を，

(4) $$d = \{0 \le j \le m-1 ;\ \mathrm{ord}\, P^{(j)} = \kappa(m-j)\}$$

と定める．

(5) $$\lambda^m + \sum_{j \in d} \sigma_{\kappa(m-j)}(P^{(j)})\lambda^j = 0$$

の根を $\lambda = \lambda_j(x, \xi)$, $0 \le j \le m-1$ とする（λ_j を特性根と呼ぶ）．

例1. $P = (x_1 D_1)^m + P^{(0)}(x', D')$ $(x' = (x_2, \cdots, x_n))$
とする ($\mathrm{ord}\, P^{(0)} \le m-1$)．$\kappa = \mathrm{ord}\, P^{(0)}/m$ であり，Levi 条件とは $\mathrm{ord}\, P^{(0)} \le 0$ のことである．また，$0 \le j \le m-1$ に対して

$$\lambda_j(x,\xi) = \exp\left(\frac{1}{m}(2j+1)\pi\sqrt{-1}\right)\cdot\left(\sigma_{m-1}(P^{(0)})\right)^{1/m},$$

となる．

x^* を通る λ_1 の陪特性帯を $b(x^*)$ とする：

$$b(x^*) = \{(x_1, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \sqrt{-1}) \in \sqrt{-1}S^*M\}.$$

従来よく知られている結果を記す：

<u>定理0</u>. $k \le 0$, $\lambda_j \notin \{-1, -2, \dots\}$, $0 \le j \le m-1$ とすると，

(6) $\quad u \in \mathcal{C}_{x^*}$, $Pu = 0$, $b(x^*) \cap \mathrm{supp}\, u = \phi$

なら $u = 0$ at x^* である．

以下，常に $0 < k\ (<1)$ とする．本稿の主要結果を記す：

<u>定理1</u>. $0 < k < 1$, $\lambda_j \notin \{0, -1, -2, \dots\}$, $0 \le j \le m-1$,
$(|\xi/|\xi| - (0, \dots, 0, \sqrt{-1})| \ll 1)$ とすると，(6) のとき
$u = 0$ at x^* である．

<u>注意</u>. $\lambda_j \notin \{0, -1, -2, \dots\}$ という条件について説明する．
各 λ_j は ξ について k 次斉次だから，

$$\lambda_j \notin \{0, -1, -2, \dots\},\ 0 \le j \le m-1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_j \cdot \xi_n^{-k} \ne k\, \xi_n^{-k}, \qquad k = 0, -1, \dots, \quad 0 \le j \le m-1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_j \ne 0,\ \arg \lambda_j \ne (2l+1)\pi, \qquad l \in \mathbb{Z},\ 0 \le j \le m-1$$

となる.

§1. パラメトリクス.

(1), (2) をみたす $P(x,D)$ を1階作用素の行列に直す.

$$L = x_1 D_1 I_m + \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 \\ P^{(0)} & \cdots & & P^{(m-1)} \end{pmatrix} \quad (m,m)\text{行列}$$

とする. $u, f \in \mathcal{E}_{x}^{*}$ に対し,

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ x_1 D_1 u \\ \vdots \\ (x_1 D_1)^{m-1} u \end{pmatrix}, \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \quad m\text{次ベクトル}$$

として, $Pu = f \iff L\vec{u} = \vec{f}$ なので L を考えればよい.

L の右(左)パラメトリクスを考えるため, 次の準備を行なう.

定義2. ① $k(x,y) \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}$ として,

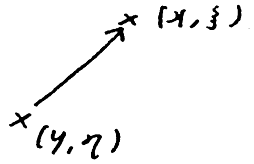
$$\mathrm{supp}'\, k = \{(x,y,\xi,\eta);\ (x,y,\xi,-\eta) \in \mathrm{supp}\, k\}.$$

② $A \subset \sqrt{-1}\, T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$, $B \subset \sqrt{-1}\, T^*\mathbb{R}^{2n} \setminus \mathbb{R}^{2n}$ に対し

$$B \circ A = \{(x,\xi) \in \sqrt{-1}\, T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n;\ \exists (y,\eta) \in A,\ (x,y,\xi,\eta) \in B\}.$$

注意. ①において, $\mathrm{supp}\, k$ (resp. $\mathrm{supp}'\, k$) を核関数の台 (resp. 作用素の台) という.

② において、$(x, y, \xi, \eta) \in B$ のとき、点 (y, η) から点 (x, ξ) に向かうベクトルを考える。



$(y, \eta) \in A$ なら $(x, \xi) \in B \circ A$
である。つまり、右図では
発点 $\in A$，矢印 $\in B$ としたとき、$B \circ A$ は終点全体を表わす。

さて，$k(x, y) \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n}$ (defined at $(\mathring{x}^*, -\mathring{\xi}^*)$) が，次の条件 (ア) or (ア)$'$ をみたすとする ($C > 0$ は十分大):

(ア) $\mathrm{supp}' k \subset H = \{(x, y, \xi, \eta) \in \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^{2n} \setminus \mathbb{R}^{2n};$

① $x_j = y_j,\ \xi_j = \eta_j,\ 2 \le j \le n$,

② $x_1 y_1 \ge 0,\ |x_1| \ge |y_1|$,

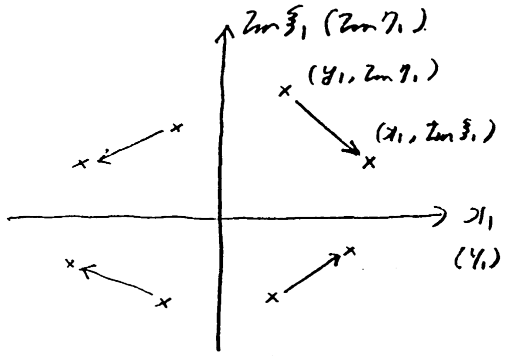
③ $\mathrm{Im}\,\xi_1 \cdot \mathrm{Im}\,\eta_1 \ge 0,\ |\mathrm{Im}\,\xi_1| \le |\mathrm{Im}\,\eta_1|$,

④ $\mathrm{Im}\,\xi_n \ge C|\mathrm{Im}\,\xi_j|,\ |\mathrm{Im}\,\eta_j|,\ 1 \le j \le n-1\}$.

(ア)$'$ $\mathrm{supp}' k \subset H' = \{(x, y, \xi, \eta);\ (y, x, \eta, \xi) \in H\}$.

注意. (ア)の意味は以下の通り．ω を $\mathring{x}^*$ の小近傍とし，$f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}$，$\mathrm{supp}\, f \subset\subset \omega$ とすると，(ア)のとき，$\int k(x, y) f(y)\, dy \in \mathcal{C}_{\mathring{x}^*}$ は well-def で，$\mathrm{supp}\left(\int k f\, dy\right) \subset H \circ \mathrm{supp}\, f$ となる．上に述べた通り，$(y, \eta) \in \mathrm{supp}\, f$，$(x, y, \xi, \eta) \in H$ のとき，(y, η) から (x, ξ) へ向かうベクトルを全て寄せ集めれば，$\mathrm{supp} \int k f\, dy$ を上から評価できる．そこでこのベクトル

の性質を調べればよい．(x_1, ξ_1) を時間（に関する文字），$(x_2, \cdots, x_n, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ を空間（に関する文字）と考えて，このベクトルは(カ)の①により，空間方向には0ベクトルである．つまり，この積分作用素は空間方向に microlocal property をもつ（singularity をふやさない）．一方，時間方向の $(y_1, \mathrm{Im}\,\eta_1)$ と $(x_1, \mathrm{Im}\,\xi_1)$ を同一の平面に書き込むと右図の様になる（(カ)の②，③より）．つまりこの2点は同一象限上にあり，このベクトルは横軸（resp. 縦軸）方向に遠心的（resp. 求心的）である．(ウ)をみたす $k(x, y)$ の定める積分作用素は，こういうベクトルに沿って singularity を伝播させる（(ウ)′ の場合は逆向きに伝播させる）．



以上の議論は Hanges の論法である．さて，L について次の結果を得る：

<u>定理3.</u> ① 定理1の仮定のもとで，(ウ)をみたす積分核 $K(x, y)$ ($m \times m$ 行列) が存在し，K の定める積分作用素 S は $SL(x, D) = Id.$ (at $\mathring{x}^*$) をみたす．

② P の特性根 $\lambda_j(x, \xi)$ が $\lambda_j \notin \{0, 1, 2, \cdots\}$ をみたすとき，(ウ)′ をみたす積分核 $K'(x, y)$ ($m \times m$ 行列) をが存在し，K' の定め

る積分作用素 S' は $L S' = Id.$ (at $\mathring{x}^*$) をみたす。

定理1. は定理2. ①から出てくる。定理3. ① は②のバリエーションから出てくる。そこで定理3. の②について、以下証明の概略を述べる。

§2. シンボルクラス.

以下常に $1 \ll C_1 \ll C_2 \ll C_3$ という3つの定数を固定する。$\sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^n \subset T^*\mathbb{C}^n$ と考えて、$T^*\mathbb{C}^n$ の変数をも (x, ξ) と書く。$i = 0, 1, 2, \cdots$ に対し、

$$\begin{aligned}\Omega_i = \{ & C_1|\mathrm{Re}\, x_j|,\ C_1|\mathrm{Im}\, x_j| < 1,\quad 1 \le j \le n,\\ & \mathrm{Im}\,\xi_n > C_2(i+1),\\ & \mathrm{Im}\,\xi_n > C_2|\mathrm{Im}\,\xi_j|,\quad 1 \le j \le n-1,\\ & \mathrm{Im}\,\xi_n > C_3|\mathrm{Re}\,\xi_j|,\quad 1 \le j \le n\}.\end{aligned}$$

C_1, C_2, C_3 が目ざわりであるが、$\Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots$ はいずれも ξ^* 方向の錐を表わす。$\Omega_\cdot = \{\Omega_0, \Omega_1, \cdots\}$ とする。

定義4. $\mathcal{S}_+(\Omega_\cdot)$ は次の条件をみたす形式和 $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(x, \xi)$ 全体を表わす：各 T_i は Ω_i で正則で、$\exists C \gg 1, \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$,

$$|T_i(x,\xi)| \le C_\varepsilon\, C^{-i} \exp\{(-\mathrm{Re}\langle x, \xi\rangle)_+ + \varepsilon\, \mathrm{Im}\,\xi_n\}$$

on Ω_i, $i = 0, 1, 2, \cdots$ ($t_+ = \max(0, t)$, $t \in \mathbb{R}$).

例 $T_i = c^{-i}\exp\left(\int_0^{x_1} -t\xi_1\,dt\right)$, $i=0,1,2,\cdots$ なら $\sum T_i \in \mathcal{S}_+$.

$\Delta_i = \{\xi \in \sqrt{-1}\,\mathbb{R}^n;\ \mathrm{Im}\,\xi_n > C_2(i+1),\ \mathrm{Im}\,\xi_n > C_2|\mathrm{Im}\,\xi_k|,$ $1 \leq k \leq n-1\}$ として, $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(x,\xi) \in \tilde{\mathcal{S}}_+(\Omega_\circ)$ に対し,

$$\check{T}(x,y) = (2\pi\sqrt{-1})^{-n}\sum_{i=0}^{\infty}\int_{\Delta_i} e^{(x-y)\xi}\,T_i(x,\xi)\,d\xi$$

とする. $\check{T}(x,y)$ は適当な複素領域で正則となり, $\check{T}(x,y)$ はあるマイクロ函数 $sp\,\check{T}(x,y)$ を与え, $sp\,\check{T}(x,y)$ は条件(ア)′をみたすことがわかる. $\check{T}(x,y)$ を積分核とする作用素を象徴的に $T(x,D) = \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x,D)$ と書き, このとき $\sigma(T) \sim \sum_{i=0}^{\infty} T_i(x,\xi)$ と記す. このとき, 次のことがわかる,

命題5. $A(x,D) \in \mathcal{E}_{\mathring{x}^*}$ を $l\,(<\infty)$ 階の microdifferential operator とし, $\sigma(A) \sim \sum_{j=0}^{\infty} A_j(x,\xi)$ ($A_j(x,\xi)$ は ξ について $(l-j)$ 次斉次) とする. $\sum_{i=0}^{\infty} T_i(x,\xi) \in \tilde{\mathcal{S}}_+(\Omega_\circ)$ に対し,

$$T'_i(x,\xi) = \sum_{j+k+|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha A_j\,\partial_x^\alpha T_k$$

とすると, $\sum_{i=0}^{\infty} T'_i(x,\xi) \in \tilde{\mathcal{S}}_+(\Omega_\circ)$ であり,

$$\sigma(A(x,D)T(x,D)) \sim \sum_{i=0}^{\infty} T'_i(x,\xi).$$

となる.

$T_i(x,\xi)=\delta_{i0}$, $i=0,1,2,\cdots$ なら, $\Psi(x,D)=Id$. である. そして, 定理3 の②の条件のもとで,

$$\sigma(L(x,D)\,T(x,D))\sim I_m+0+0+\cdots$$

となるような $\sum_{i=0}^{\infty}T_i(x,\xi)\in\hat{\mathcal{S}}_+(\Omega_\cdot)$ を求めることが可能なのである. そこで定理3 の②が成立する.

上述の $\sum_{i=0}^{\infty}T_i(x,\xi)$ をもとめる計算は省略するが, 最も簡単な例だけをあげておく ($\alpha\in\mathbb{C}$):

$$L=x_1D_1I_m+\begin{pmatrix}0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1\\ \alpha D_n^{m-1} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=x_1D_1I_m+L'.$$

とする. 漸近展開の番号を少しずらして(ずらしてもよい)

(8) $\quad(x_1\xi_1+x_1\partial_{x_1})U+L'(\xi_n)U=I_m$

を解く.

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \xi_n^{K} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \xi_n^{(m-1)K}\end{pmatrix}$$

として, (8)の左から Λ^{-1}, 右から Λ^{+1} をかけて,

(9) $\quad(x_1\xi_1+x_1\partial_{x_1})\Lambda^{-1}U\Lambda+\Lambda^{-1}L'\Lambda\cdot\Lambda^{-1}U\Lambda=I_m$

を解く.

$$\Lambda^{-1}L'\Lambda=\begin{pmatrix}0 & -\xi_n^{K} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -\xi_n^{K}\\ \alpha\xi_n^{K} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

となり，$\Lambda^{-1}L'\Lambda$ の固有値は，$\lambda_j = \exp\left(\frac{1}{m}(2j+1)\pi\sqrt{-1}\right)\alpha^{1/m}\xi_n^{k}$，$0 \le j \le m-1$ となる．$\Lambda^{-1}L'\Lambda = M'$，$\Lambda^{-1}U\Lambda = V$ と書いて，

(10) $\qquad (x_1\xi_1 + x_1\partial_{x_1})V + M'V = 0$

とする．問題を少しかえて，M' の固有値が

$$\lambda_j = \mu_j \cdot \xi_n^{k}, \quad 0 \le j \le m-1$$

とする．ここで，μ_j は定数で，$(\arg \mu_j) + \frac{k}{2}\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，$0 \le j \le m-1$，とする（本当は $(\arg \mu_j) \ne (2l+1-\frac{k}{2})\pi$，$l \in \mathbb{Z}$，$0 \le j \le m-1$ でよいが，このときは計算は複雑になる）．更に，M' が対角行列の場合を考えることにする．このとき，(10)の解として，

$$V = \int_0^{x_1} \exp\left(-x_1\xi_1 I_m - M'\log x_1 + t\xi_1 I_m + M'\log t\right)\frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^1 \exp\left(-(1-s)x_1\xi_1 I_m + (M' - I_m)\log s\right) ds$$

をとると，$V + 0 + 0 + \cdots \in \mathcal{E}_+(\Omega_\cdot)$ となる．

文献 §1 の議論は

[1]. N. Hanges, Parametrices and propagations of singularities for operators with non-involutary characteristics, Indiana Univ. Math. J., 28(1979),

87-97
による、

$P(x,D)$ が Levi 条件をみたす場合の研究は夥しい。
hyperfunction 関係のものだけ挙げておく。

[2]. S. Nakane, Propagation of singularities and uniqueness in the Cauchy problem at a class of doubly characteristic points, Comm. Partial Differential Equations, 6(1981), 917-927.
[3]. T. Ôaku, A canonical form of a system of microdifferential equations with non-involutory characteristics and branching of singularities, Invent. Math., 65(1982), 491-525.
[4] H. Tahara, Fuchsian type equations and hyperbolic equations, Japan J. Math., 5(1979), 245-347.