数理解析研究所講究録
758巻 1991年 64-71

Homeomorphism group の評価写像について

筑波大学数学系　川村　一宏 (Kazuhiro Kawamura)

Homogeneous continuum の homeomorphism group の位相的な性質を調べることは、連続体理論の重要な問題である。これを調べる上で一つの手掛りを与えるのが「評価写像 (evaluation map) が completely regular map である」という事実である (Theorem 1.3)。completely regular map は bundle map の概念を一般化したものであるから、各 fibre の性質を知ることが重要になるが、残念ながら評価写像の fibre はあまり'良い'空間とはいえない。そこで homeomorphism group を含む空間を新たに考え、その上に complete regularity を保ったまま評価写像を拡張し、なおかつ fibre が'良い'空間になるようにできないか? という問題を考える。

wild な空間を調べるために、その空間を多面体の inverse limit として表現する、というのは一般的な方法であるが、homeomorphism group は inverse limit に対してうまく振舞わない。一方 J. Kennedy により homeomorphism group をある hyperspace に埋め込む方法が得

られている。hyperspace や inverse limit に対して'うまく'振舞うことは古典的に知られているから、これを手掛りとすることにする。ここでの方法は、一般的な homogeneous continuum に対してはあまり有効とはいえないが、pseudo-arc に対してはある程度の情報を与えることがわかる。

§1. 定義と知られている結果

Compact connected metric space を continuum と呼ぶことにする。Continuum X に対し、X 上の homeomorphism の全体に sup. metric を入れたものを H(X) で表わし、X の homeomorphism group という。これは completely metrizable, separable topological group である。

Def. 1.1 (1) Continuum X が homogeneous であるとは、任意の $x, y \in X$ に対し homeomorphism $f: X \to X$ が $f(x) = y$ をみたすようにとれることである。

(2) Homogeneous continuum X の点 p を固定する。写像 $e_p: H(X) \to X$ を

$$e_p(f) = f(p) \quad (\forall f \in H(X))$$

で定義して、X の(p における)評価写像(evaluation map)という。

Def. 1.2. metric space の間の写像 $f: X \to Y$ が completely regular であるとは、f が次の条件をみたすことである。

任意の $\varepsilon>0$ に対して次の様な $\delta>0$ が存在する:

任意の $y,z\in Y$ with $d(y,z)<\delta$ に対して homeomorphism

$h:f^{-1}(y)\to f^{-1}(z)$ が、$d(h,\mathrm{id}_X)<\varepsilon$ となるようとれる。

(注) 通常は f の fibre が全て compact であることも要求されるが、ここでは J.T. Rogers に従って上の様に定義しておく。

Homogeneous continuum の評価写像はもちろん surjective だが、更に

Theorem 1.3. X が homogeneous continuum, $p\in X$ とする。このとき

$e_p: H(X)\to X$ は completely regular である。(本質的に Effros の定理).

$H_p(X):=\{f\in H(X)\mid f(p)=p\}$ とおくと、

任意の $q\in X$ に対して $e_p^{-1}(q)\approx H_p(X)$

であるのは明らかである。

Def. 1.4. X を continuum とする。

(1) $\pi_i: X\times X\to X$ を第 i 座標への射影とする ($i=1,2$)。

(2) X の空でない subcontinuum の全体に Hausdorff metric を入れたものを $C(X)$ で表わし、X の hyperspace と呼ぶ。

(3) $C^{\pi}(X)=\{K\in C(X\times X)\mid \pi_i(K)=X \quad i=1,2\}$ とおく。

Theorem 1.5. ([Ken]). $\varphi : H(X) \longrightarrow C^{\pi}(X \times X)$ を

$$\varphi(f) = \mathrm{graph}\, f \ (= \{(x, f(x)) \mid x \in X\})$$

と定義すると、φ は埋め込みである。

§2. 評価写像の拡張

Theorem 1.5 における埋め込みを考えた時、$f \in H(X)$ に対して $f(p) = \pi_2(\mathrm{graph} f \cap p \times X)$ であることに注意して次の定義をする。以下 $p \in X$ は固定する。

Def. 2.1. X は homogeneous continuum とする。$C_*^{\pi}(X)$ と写像 $E_p : C_*^{\pi}(X) \to X$ を

$$C_*^{\pi}(X) = \{K \in C^{\pi}(X) \mid K \cap (p \times X) \text{ は 1 点集合}\}$$

$$E_p(K) = \pi_2(K \cap p \times X)$$

と定義する。また $C_p^{\pi}(X)$ を

$$C_p^{\pi}(X) = \{K \in C_*^{\pi}(X) \mid K \cap (p \times X) = \{(p,p)\}\}$$ とおく.

定義から直ちに、

Prop. 2.2. $E_p : C_*^{\pi}(X) \to X$ は completely regular で次の図式は可換.

$$\begin{tikzcd} C_*^{\pi}(X) \arrow[dr, bend left, "E_p"] & \\ H(X) \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "e_p"'] & X \end{tikzcd}$$

更に $E_p^{-1}(q) \approx C_p^{\pi}(X)$ $(\forall q \in X)$ である.

$A, B \in C_p^\pi(X)$ に対して、$C_p^\pi(X)$ 内で A, B を結ぶ arc $\alpha(A,B)$ が、直径 $d_H(A,B)$ でとることができる。このことを使って [Ke] の方法により、次のことが示せる。

Theorem 2.3. X が homogeneous とするとき、E_p の fibre は全て completely metrizable, separable ANR である。

$C_*^\pi(X)$ の定義から想像できる様に、$H(X)$ は $C_*^\pi(X)$ の中で非常に'薄く'埋め込まれている。実際、homogeneous continuum が the Property of Kelley をもつことから次のことがわかる。

Prop. 2.4. 任意の $\varepsilon>0$ に対して次のような ε-homotopy H:C
$H: C_*^\pi(X)\times[0,1] \longrightarrow C_*^\pi(X)$ が存在する。

(1) $H_0 = id_{C_*^\pi(X)}$ (2) $H(C_*^\pi(X)\times[0,1)) \subseteq C_*^\pi(X) \setminus \varphi(H(X))$

§3. pseudo-arc への応用.

Def. 3.1 (1) continuum が arc の inverse limit として表わされる時、<u>arc-like</u> という。

(2) arc-like かつ homogeneous である continuum が位相的に唯一つ存在し（[Bi_1], [Bi_2]）、それを <u>pseudo-arc</u> という。以下 pseudo-arc を P で表わ

す。

§2で述べた方法をPに適用すると、

Theorem 3.1　$E_p : C^{\pi}_{*}(P) \to P$ は 2.2～2.4 に加えて次の性質をもつ.

(1)　$E_p^{-1}(q) \approx l_2 \left(= \{(x_i) \mid x_i \in \mathbb{R}\right.$ かつ $\left.\sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty \} : \text{Hilbert space}\right)$ $(\forall q \in P)$.

(2)　$\varphi(H(P))$ は $C^{\pi}_{*}(P)$ の中で dense

(3)　写像 $s : P \to C^{\pi}_{*}(P)$ が、$E_p \circ s = id_P$ をみたす様にとれる。

(3)は E_p が section を持つことを主張するもので、s の値域を $H(P)$ にとることができないことが知られている。従って(3)は空間を $C^{\pi}_{*}(P)$ まで拡げたことの利点の一つと言える。また(2)はその拡げ方が'途方もなく大きいものではない'ことを示している、といえる。

(2)の証明は [S] から直ちに得られる。また(3)は(1)及び Prop. 2.2 を Michael の selection theorem と合わせて使えばよい. (1)は次の様なステップに分けて示される。

ステップ1.　Pを次の様な arc $I_n = [0_n, 1_n]$ の inverse limit として表わす.

(i)　$P = \varprojlim (I_n,\ p_n^m : I_m \to I_n)$

(ii)　$p_n^{m\,-1}(0_n) = \{0_m\}$　$\forall m \geq \forall n$　かつ　(0_n) は P を定義する.

このとき　$E_p^{-1}(p) = C^{\pi}_{p}(P) = \varprojlim \left(C^{\pi}_{0_n}(I_n),\ p_n^{m*}\right)$　であることがわか

る。但し $p_n^{m*}: C_{o_m}^{\pi}(I_m) \to C_{o_n}^{\pi}(I_n)$ は、

$$p_n^{m*}(K) = p_n^m \times p_n^m(K)$$

により定義される写像。このとき [Ka] により p_n^{m*} は surjection.

ステップ2. $C_{o_n}^{\pi}(I_n) \approx l_2$ を示す。これを示すため、

$$\hat{C}_{o_n}^{\pi}(I_n) = \{ K \in C^{\pi}(I_n) \mid K \cap o_n \times I \ni (o_n, o_n) \}$$

とおく。$\hat{C}_{o_n}^{\pi}(I_n) \approx Q$ (= Hilbert cube) であることが [Cu-Sh] により分かる。[Cu] による、Q の中の $s = (0,1)^{\infty} \approx l_2$ の特徴付けを確かめることにより $C_{o_n}^{\pi}(I_n) \approx l_2$ となる。

ステップ3. [N] の方法を適用して、$p_n^{n+1*}: C_{o_{n+1}}^{\pi}(I_{n+1}) \to C_{o_n}^{\pi}(I_n)$ は cell-like map であることがわかる。ステップ2から p_n^{n+1*} は near-homeomorphism であり、最後に [M] により $C_p^{\pi}(P) \approx l_2$ であることがわかる。

参考文献

[Bi_1], R.H. Bing, A homogeneous indecomposable plane continuum, Duke Math. 15 (1948), 729-742.

[Bi_2], ———, Each homogeneous nondegenerate chainable continuum is a pseudo-arc, Proc. A.M.S. 10 (1959), 345-346.

[Cu], D.W. Curtis. Boundary sets in the Hilbert cube, Top. and its Appl. 20 (1985), 201-221.

[Cu-Sh], ——— - R.M. Shori, Hyperspaces which characterize simple homotopy type, Gen. Top. and its Appl. 6 (1976), 153-165.

[Ka], K. Kawamura, Span zero continua and the pseudo-arc, Tsukuba J. Math. 14 (1990), 327-341.

[Ke], J.L. Kelley, Hyperspaces of continua, Trans. A.M.S. 52 (1942), 22-36.

[Ken], J. Kennedy, Compactifying the space of homeomorphisms, Colloq. Math. 56 (1988), 41-58.

[N], S.B. Nadler, Induced universal maps and some hyperspaces with fixed point property, Proc. A.M.S. 100 (1987), 749-754.

[S], M. Smith, Concerning the homeomorphisms of the pseudo-arc X as a subspace of C(X×X), Houston J. Math. 12 (1986), 431-440.

[M], J. Mioduszewski, Mappings of inverse limits, Colloq. Math. 10 (1964), 39-44.

以上.