数理解析研究所講究録
758巻 1991年 21-43

PARTITION CALCULUS in $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$

防衛大　加藤昭男 (Akio KATO)

いわゆる set の partition calculus は広く研究されているが、この partition を topological space において考えた "topological partition calculus" が最近話題になっている。特に W. Weiss (Toronto大学, カナダ), Malykhin (ソ連) の研究が著しい。この稿では Stone-Čech の remainder $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ (ω は自然数全体) の最も簡単な partition について調べる。この研究は W. W. Comfort (Wesleyan大学, USA) と S. Shelah (イスラエル) と私との共同研究による結果である。

$[X]^\kappa = \{x \subseteq X : |x| = \kappa\}$

Topological spaces X, Y 及び cardinals κ, λ に対し、矢印の表現 $X \to (Y)^\kappa_\lambda$ は次の意味とする：

$[X]^\kappa$ を λ 個に任意に分割 $[X]^\kappa = \bigcup_{i<\lambda} P_i$ したとき、或る $i<\lambda$ と、Y の homeomorphic copy $Y' \subseteq X$ とが見つかり、$[Y']^\kappa \subseteq P_i$ となる。

我々が取扱うのは $k=1$, $\lambda=2$ の簡単な場合であり、このとき $X \to (Y)^1_2$ は次の意味となる：

"Topological space X を任意に2つに分けた $X = P_0 \cup P_1$ とき、topological space Y は P_0 か P_1 のいずれかの中へ homeomorphic に embed される。"

こゝで注意したいのは、分割 $X = P_0 \cup P_1$ は全く任意な単なる set としての分割であって、P_0, P_1 が Borel set でなければならないとかの付加条件は全く付いていないということである。それにもかゝわらず P_0 か P_1 かのどちらかが topological space Y の copy を含まなければならない、ということである。この "set theory" と "topology" とがうまくからんでいる点が興味を引くのである。まず次の明らかだが基礎的な事実を確認しておく：

$X \to (Y)^1_2$ のとき、$X \subseteq X'$, $Y' \subseteq Y$ ならば $X' \to (Y')^1_2$ である。

（一般に $X \subseteq X'$ は X が X' の中に homeomorphic に embed されることを表わしている。）具体例を挙げよう。Real line $\mathbb{R}$ の中の subset S で、S も $\mathbb{R} \setminus S$ も Cantor set C を全く含まないものがある、というのは Bernstein のよく知られた結果であるが、これは $\mathbb{R} \not\to (C)^1_2$ と表わされる。一方、有理数の空間 $\mathbb{Q}$ に対しては $\mathbb{Q} \to (\mathbb{Q})^1_2$

が成立することは見易い。 ω_1 に通常の interval topology を考えた場合，stationary & co-stationary set の存在は，$\omega_1 \not\to (\omega_1)^1_2$ と表わされる。興味ある未解決問題として $X \to (C)^1_2$ （C は Cantor set）となる regular space X が存在するか？ という問題がある。GCH のもとでは存在しないことがわかっている。次を参照せよ。

*W. Weiss "Partitioning topological spaces" In: The Math. of Ramsey Theory (Ed: Nesetril & Rodl) Springer-Verlag (1990)

*W. Weiss, "Weiss's Questions" In: Open Problems in Topology (Ed. van Mill & Reed) pp.77-84 North-Holland (1990)

*V. Malykhin "Results on Consistency in Topology" Trans. Moscow Math. Soc. (1987) pp.145-171 (Труды Москов. Матем. Общ. Том 49 : 1986)

我々は relation $\omega^* \to (Y)^1_2$ について調べる。§1では $|Y| = 2^{\mathfrak{c}}$ のとき否定的であることを示し，§2では単純な P-space については肯定的であることを示し，§3では，$Y = \omega \cup \{p\} \subseteq \beta\omega$ （$p \in \omega^*$ は任意）について否定的であることを示す。この最後の結果から すべての infinite, countably compact space Y について否定的であることがわかる。§1は Comfort の結果。§2は 私の結果。§3は Shelah による。Shelah の note は たった2ページの書きなぐりであり，これを解釈するのに かなりの時間がかかってしまった。

§1. Failure for large spaces.

1.1 Lemma. $Y \subseteq \omega^*$ のとき collection $\{A \subseteq \omega^* : A \approx Y\}$ の cardinality は $2^{\mathfrak{c}}$ である。($\approx$ は "homeomorphic" の意.)

Proof. 上の collection を $\mathcal{A}$ と記す。ω^* の中に pairwise disjoint な copies of ω^* を $2^{\mathfrak{c}}$ 個とれるから $|\mathcal{A}| \geq 2^{\mathfrak{c}}$ である。一方, Y の density $\leq$ Y の weight $\leq$ ω^* の weight $= \mathfrak{c}$ だから Y から ω^* の中への continuous maps の個数は $\leq |\omega^*|^{\mathfrak{c}} = (2^{\mathfrak{c}})^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$ である。$\therefore |\mathcal{A}| \leq 2^{\mathfrak{c}}$. ☺

証明の終りは, "smile" で示しますので relax して下さい。この 1.1 により, Bernstein set の構成と全く同じ手法により次の定理が得られる。

1.2 Theorem. $\forall$space Y, $|Y| = 2^{\mathfrak{c}}$ に対し, $\omega^* \not\to (Y)^1_2$.

Proof. $|Y| = 2^{\mathfrak{c}}$ とする。もちろん $Y \subseteq \omega^*$ としてよい。ω^* の partition $\omega^* = P_0 \cup P_1$ で, どちらの P_i も copy of Y を含まないものを作る。1.1 により $\{A \subseteq \omega^* : A \approx Y\} = \{A_\xi : \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$ とかける。$|A_\xi| = 2^{\mathfrak{c}}$ だから, "Disjoint Refinement Lemma" (cf. Comfort-Negrepontis "The theory of ultrafilters" Springer (1974) p.146) により, disjoint collection $\{B_\xi : \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$ で,

$B_\xi \subseteq A_\xi$, $|B_\xi| = 2^{\mathfrak{c}}$ なるものをとれる。各 B_ξ から 1 点 x_ξ をとり、$P_0 = \{x_\xi : \xi < 2^{\mathfrak{c}}\}$, $P_1 = \omega^* \setminus P_0$ と定めれば求める partition $\omega^* = P_0 \cup P_1$ が得られる。

§2. <u>Affirmative for Simple P-spaces</u>.

G_δ-subset が常に open になるような space は P-space といわれる。(X, τ) が topology τ をもつ space であるとき、その中の G_δ-subsets 全体を改めて open base と考えれば新しい topological space が得られる。この P-space を $(X, P\tau)$ または単に PX と表わす。$Y \subseteq X$ ならば $PY \subseteq PX$ であるから、次は明らか。

2.1 <u>Lemma</u>. $X \to (Y)^1_2$ ならば、$PX \to (PY)^1_2$.

次の lemma は van Douwen による。証明は J. van Mill "An introduction to $\beta\omega$" in the Handbook of Set-theoretic Topology (1984) の 558-559 ページを見よ。これは純粋に ZFC の結果である！

2.2 <u>Lemma</u>. Weight $\leq \mathfrak{c}$ のすべての P-space は ω^* の中に embed される。

この 2.2 は、"P-space Y に対しては、$Y \hookrightarrow \omega^*$ と $Y \hookrightarrow \{0,1\}^{\mathfrak{c}}$ とは equivalent である" と言い表わしてもよい。我々の partition calculus においては、P-space を

問題にする限り，ω^* の役割は，$\{0,1\}^{\mathfrak{c}}$ と同じであることが言える。すなわち，

2.3 <u>Theorem</u>. 任意の P-space Y に対し，$\omega^* \to (Y)^1_2$ は，$\{0,1\}^{\mathfrak{c}} \to (Y)^1_2$ と同等である。

<u>Proof</u>. $\omega^* \subseteq \{0,1\}^{\mathfrak{c}}$ であるから，前者が成立すれば後者が成立することは明らかである。そこで，いま，後者の成立を仮定せよ。2.1 により $P(\{0,1\}^{\mathfrak{c}}) \to (Y)^1_2$. $P(\{0,1\}^{\mathfrak{c}})$ は weight $\mathfrak{c}$ の P-space であるから，2.2 により embeddable into ω^*. ゆえに，$\omega^* \to (Y)^1_2$ を得る。☺

κ を infinite cardinal とする。Set $\kappa+1 = \kappa \cup \{\kappa\}$ 上に次のような topology を考えた space を P_κ と表わす：subset κ は discrete & open であり，point κ の回りの nbd base は，$\kappa+1$ に interval topology を考えたときのものと同じである。$\mathrm{cof}(\kappa) > \omega$ のとき，P_κ は (non-discrete な) P-space である。次の lemma は簡単であるが essential である。

2.4 <u>Lemma</u>. 任意の infinite card. κ に対し，$P_\kappa \times P_\kappa \to (P_\kappa)^1_2$ が成立する。

<u>Proof</u>. $P_\kappa \times P_\kappa = X_0 \cup X_1$ を任意の partition とする。一般性を失うことなく、点 $(\kappa,\kappa) \in P_\kappa \times P_\kappa$ は、X_0 に属するとしてよい。 $S_\xi = \{\xi\} \times (P_\kappa \setminus \xi)$, $\xi < \kappa$, とおくと、$S_\xi \approx P_\kappa$. 従って、もし"或る $\xi < \kappa$ に対し $S_\xi \subseteq X_1$"となるならば、$P_\kappa \hookrightarrow X_1$ である。そうでない場合は、各 $\xi < \kappa$ に対し、$S_\xi \cap X_0$ は non-empty であり、ここから 1 点 p_ξ をとれる。このとき subset $\{p_\xi : \xi < \kappa\} \cup \{(\kappa,\kappa)\}$ は P_κ に homeo. な subspace in X_0 であるから $P_\kappa \hookrightarrow X_0$.

$\omega_1 \le \kappa \le \mathfrak{c}$ & $\mathrm{cof}(\kappa) > \omega$ のとき、$P_\kappa \times P_\kappa$ は weight $\le \mathfrak{c}$ の P-space であるから、2.2 と 2.4 とから次を得る。

2.5 <u>Theorem</u>. $\omega_1 \le \kappa \le \mathfrak{c}$, $\mathrm{cof}(\kappa) > \omega$ なるすべての card. κ に対し、$\omega^* \to (P_\kappa)^1_2$ が成立する。

ω^* の中には cardinal $2^{\mathfrak{c}}$ の P-space も存在するから、1.2 により、relation $\omega^* \to (Y)^1_2$ がすべての P-space $Y \hookrightarrow \omega^*$ について成立するわけではない。具体例としては $Y = P(\omega^*)$ 又は $P(\{0,1\}^{\mathfrak{c}})$ がある。 C_κ を discrete space κ の one-point compactification とする時、2.4 と同様に $C_\kappa \times C_\kappa \to (C_\kappa)^1_2$ が成立する。従って、たとえば $\{0,1\}^\kappa \to (C_\kappa)^1_2$ for every κ である。

§3. Failure for $\omega \cup \{p\}$.

$p \in \omega^*$ を任意の point とし，以下完全に fix する。Subspace $\omega \cup \{p\} \subseteq \beta\omega$ を考えるとき，$\omega^* \not\to (\omega \cup \{p\})^1_2$ となることを示す。この § の結果は，次の Shelah の note の"解読"による。

* * * SHELAH'S NOTE * * * * *

Now we can pin down the problem of $\omega^* \to (\omega \cup \{p\})^1_2$.

Call $X \subseteq \omega^*$ p-closed* if :

(a) if $\lim_p \langle q_n : n \in \omega \rangle \in X$, then $\{n \in \omega : q_n \in X\} \in p$;

equivalently ;

(a)* if $r \in X$, $p \leq_{RF} r$, then $\langle \exists q_n \in X : n \in \omega \rangle$, $\lim_p \langle q_n : n \in \omega \rangle = r$.

We try to choose by induction on $i < 2^{\mathfrak{c}}$, X_i, h_i such that

(a) X_i, h_i increasing, continuous

(b) X_i is p-closed*

(c) $h_i : X_i \to \{\text{green}, \text{red}\}$ with no monochromatic copy of $\omega \cup \{p\}$.

Let $<^*$ be the well-ordering of ω^* of order type $2^{\mathfrak{c}}$. For $i = 0$, let $X_0 = \phi$. For i limit, take union. For $i = j+1$ choose $s_i \in \omega^* \setminus X_j$ $<^*$-minimal.

Subcase (a) : X_j is not p-closed in the old sense.

$X_i \triangleq X_j \cup \{ r : r = \lim_p \langle q_\ell : \ell \in \omega \rangle ,\ q_\ell \in X_j \}$

$h_i \triangleq h_j \cup \{ (r, 1 - \lim_p \langle h_j(q_\ell) : \ell \in \omega \rangle) : r \in X_i \setminus X_j \}$

By the uniqueness claim h_i is O.K.

Subcase (b) : X_j is p-closed in the old sense.

We choose by induction on $n \in \omega$ for every $\eta \in {}^n\omega$:

$q_\eta \in \omega^*$ & A_η such that

$$\begin{cases} q_{\langle\rangle} = s_i , \quad A_\eta \in q_\eta , \quad A_{\eta\hat{}\langle i\rangle} \subseteq A_\eta \\ \langle A_{\eta\hat{}\langle i\rangle} : i \in \omega \rangle \text{ are pairwise disjoint} \\ \lim_p \langle q_{\eta\hat{}\langle i\rangle} : i \in \omega \rangle = q_\eta \end{cases}$$

No problem to do this —— the A_η wittness $\eta \neq \nu \Rightarrow q_\eta \neq q_\nu$.

Now give color to q_η according to length(η) even or odd.

* * * * * * * * * * * * *

このnoteの中で馴じみにくい概念は"p-closed*"であるが、これが実は、ω^*に非常にfinerなtopologyを入れた時のopen setの概念と同じになるのである。

以下、Xは、常にω^*のsubsetを表わすとする。Xの中のcountable, discrete subsets全体を$\mathbb{D}(X)$と表わす。"countable"は、いつもcountably infiniteの意とする。各$A \in \mathbb{D}(X)$に対し、"p-orbit" w.r.t. A を A[p] と記す。すなわち、

$$A[p] \triangleq \{ \beta f(p) \mid f:\omega \approx A \} \subseteq A^* \subseteq \omega^*$$

ここで. $\beta f : \beta\omega \approx \mathrm{cl} A$ は f の Stone extension である。即ち $A[p]$ は. A の p-limits 全体である。"$x \in A[p]$" と同値な条件を列挙する：

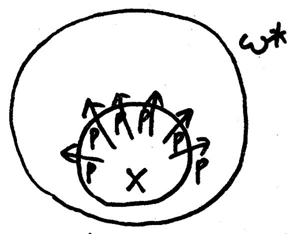
$$x \in A[p] \overset{def.}{\longleftrightarrow} \exists f : \omega \approx A \quad \beta f(p) = x$$

$$\longleftrightarrow \exists f : \omega \hookrightarrow A \quad \beta f(p) = x$$

$$\longleftrightarrow \exists f : \omega \to A, \quad f \text{ is 1-1 on some } C \in p \ \& \ \beta f(p) = x.$$

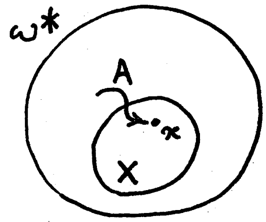
X と. X の中の discrete sets の p-limits 全体とを合せたものを. X^p と記す：

$$X^p \triangleq X \cup \bigcup \{ A[p] : A \in \mathbb{D}(X) \}.$$



$X^p = X$, すなわち, $\forall A \in \mathbb{D}(X)$ $A[p] \subseteq X$ の時. X は p-<u>closed</u> といわれる。（これは "p-compact" よりも弱い： X は. $\forall f : \omega \to X$ $\beta f(p) \in X$ のとき p-compact と呼ばれる。） 次の条件が成立するとき. X を p-<u>open</u> と呼ぶ：

$$\forall x \in X.\ \forall A \in \mathbb{D}(\omega^*) \ (x \in A[p] \to x \in (A \cap X)[p]).$$



ここで, 一般に. subset $C \subseteq \omega^*$ が finite の時は. $C[p] = \phi$ と約束する。この p-open なる概念は Shelah's note の "p-closed*" に対応するものである。

3.1 <u>Lemma</u>. $A \in \mathbb{D}(\omega^*)$, $B \subseteq A$ のとき. $A[p] \cap B^* = B[p]$.
従って. $A = B \cup C$ ならば $A[p] = B[p] \cup C[p]$ である。

<u>Proof</u>. $A[p] \cap B^* \subseteq B[p]$ を示せばよい。$x \in A[p] \cap B^*$ とすると. $\exists f : \omega \approx A$, $\beta f(p) = x$ & $f^{-1}(B) \in p$. よって. $g : \omega \to B$ を $g = f$ on $f^{-1}(B)$ なる任意の function とすれば. g は 1-1 on $f^{-1}(B) \in p$, かつ $\beta g(p) = x$ であるから $x \in B[p]$. ☺

3.2 <u>Cor</u>. $X = X_0 \cup X_1$ ならば $X^p = X_0^p \cup X_1^p$.

<u>Proof</u>. 3.1 により $A \in \mathbb{D}(X)$ に対し
$A[p] = (A \cap X_0)[p] \cup (A \cap X_1)[p]$ となるから。☺

次の lemma は "p-open" なる命名を正当化する。

3.3 <u>Lemma</u>. X は p-open $\leftrightarrow$ $\omega^* \setminus X$ は p-closed.

<u>Proof</u>. X : p-open $\leftrightarrow$ $\forall A \in \mathbb{D}(\omega^*)$ $A[p] \cap X \subseteq (A \cap X)[p]$.
ここで 3.1 により $A[p] = (A \cap X)[p] \cup (A \setminus X)[p]$ であることに注意すれば. $\leftrightarrow$ $\forall A \in \mathbb{D}(\omega^*)$ $(A \setminus X)[p] \cap X = \phi$
$\leftrightarrow$ $\forall B \in \mathbb{D}(\omega^* \setminus X)$ $B[p] \cap X = \phi$, i.e. $B[p] \subseteq \omega^* \setminus X$.
$\leftrightarrow$ $\omega^* \setminus X$: p-closed. ☺

次の fact は、Frolík によるもので、通常 "no type produces itself" と表現される。証明は Katětov "A theorem on mappings" Comment Math. Univ. Carolinae 8 (1967) 431-433 又は、Walker の本 "The Stone-Čech compactifications" Springer (1974) p.152 を見よ。

3.4 <u>Fact</u>. Embedding $\beta\omega \hookrightarrow \omega^*$ は、fixed points をもたない。

この事実を我々の言葉で表わせば次のようになる。

3.5 <u>Lemma</u>. $A, B \in \mathbb{D}(\omega^*)$ の時、$A \subseteq B^* \to A[p] \cap B[p] = \phi$.

<u>Proof</u>. もし、$x \in A[p] \cap B[p]$ とすると、
$B \overset{\exists f}{\approx} \omega \overset{\exists g}{\approx} A$, $\beta f(x) = p$, $\beta g(p) = x$. よって、$h \doteq g \circ f : B \approx A$ とおけば、$\beta h : \beta B \approx \beta A \subseteq B^*$, $\beta h(x) = x$. ゆえに、embedding $\beta B \hookrightarrow B^*$ が fixed pt をもつことになり、3.4 に矛盾する。 ☺

3.5 は次のように拡張されるが、この 3.6 が Shelah's note における "the uniqueness claim" だと思われる。

3.6 <u>Lemma</u>. ${}^\forall A, {}^\forall B \in \mathbb{D}(\omega^*)$ に対し、

$$A[p] \cap B[p] = (A \cap B)[p] .$$

Proof. $A[p] \cap B[p] \subseteq (A \cap B)[p]$ を示せばよい。

$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^*) \cup (A \setminus \mathrm{cl}\, B)$ であるから, $A[p]$ は, 次の disjoint union の形にかける:

$A[p] = (A \cap B)[p] \cup (A \cap B^*)[p] \cup (A \setminus \mathrm{cl}\, B)[p]$.

3.5 により $(A \cap B^*)[p] \cap B[p] = \emptyset$ であるから,

$A[p] \cap B[p] \subseteq (A \cap B)[p] \cup (A \setminus \mathrm{cl}\, B)[p]$.

A, B の symmetry により, 全く同様にして

$A[p] \cap B[p] \subseteq (A \cap B)[p] \cup (B \setminus \mathrm{cl}\, A)[p]$. がわかる。

$(A \setminus \mathrm{cl}\, B) \cup (B \setminus \mathrm{cl}\, A)$ は countable, discrete subset in ω^* であるから, もちろん C^*-embedded in ω^* であり, とくに

$(A \setminus \mathrm{cl}\, B)^* \cap (B \setminus \mathrm{cl}\, A)^* = \emptyset$. $\therefore$ $(A \setminus \mathrm{cl}\, B)[p] \cap (B \setminus \mathrm{cl}\, A)[p] = \emptyset$.

ゆえに, $A[p] \cap B[p] \subseteq (A \cap B)[p]$ がわかる。 ☺

3.7 *Lemma*. $\forall x \in X^p \setminus X$, $\forall A \in \mathbb{D}(\omega^*)$ に対し

$x \in A[p]$ ならば $x \in (A \cap X)[p]$ である。

Proof. $x \in X^p \setminus X$, $A \in \mathbb{D}(\omega^*)$, $x \in A[p]$ とせよ。

$x \in X^p \setminus X$ だから $x \in B[p]$ for some $B \in \mathbb{D}(X)$. よって, 3.6 により $x \in (A \cap B)[p]$. $A \cap B \subseteq A \cap X$ だから $x \in (A \cap X)[p]$.

☺

この lemma から 次を得る。

3.8 <u>Cor.</u> X : p-open $\rightarrow$ X^p : p-open. ☺

一般に、$X \not\rightarrow (Y)^1_2$ は、次のような function g の存在を主張している：

$g : X \rightarrow 2 = \{0,1\}$ s.t. $\forall h : Y \hookrightarrow X$ $g \circ h : Y \rightarrow 2$ onto.

いま、0を白色、1を赤色と考えれば g は X の各点を色分けしており、X の中にあるどんな copy of Y も2色にぬられている、と解釈できる。我々の目標は、色分け関数 $g : \omega^* \rightarrow 2$ で、ω^* の中のどんな copy of $\omega \cup \{p\}$ も2色にぬられているものを構成することである。まず最初に、coloring function が与えられた場合、それを extend する方法を考える。

3.9 <u>Lemma.</u> X : p-open とする。Coloring function $g : X \rightarrow 2$ は、X の中のどの copy of $\omega \cup \{p\}$ も2色に色分けしているとする。この時、g を extend する coloring function $\hat{g} : X^p \rightarrow 2$ で、X^p の中のどの copy of $\omega \cup \{p\}$ も2色に色分けするものが存在する。

<u>Proof.</u> $X_0 = g^{-1}(0)$, $X_1 = g^{-1}(1)$ とおくと、

$$X = X_0 \cup X_1, \quad X_0 \cap X_1 = \emptyset.$$

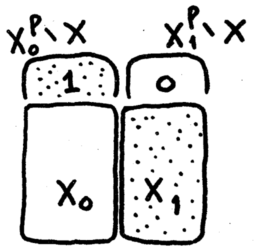
3.2 により $X^p = X_0^p \cup X_1^p$. 3.6 により

$$(X_0^p \setminus X) \cap (X_1^p \setminus X) \subseteq (X_0 \cap X_1)^p = \phi.$$

(注意: $X_0^p \cap X_1 \neq \phi$ or $X_0 \cap X_1^p \neq \phi$ とはなり得る。)

よって、disjoint な分割

$$X^p = X \cup (X_0^p \setminus X) \cup (X_1^p \setminus X)$$



が得られる。Coloring function $\tilde{g}$ on X^p を次のように定める:

$\tilde{g} = g$ on X,

$\tilde{g}(x) = 1$ if $x \in X_0^p \setminus X$, $\tilde{g}(x) = 0$ if $x \in X_1^p \setminus X$.

このとき、$\tilde{g}$ が求めるものであることを示す。$A \cup \{x\}$ が任意の copy of $\omega \cup \{p\}$ in X^p であるとせよ。しからば、$x \in A[p]$, $A \in D(\omega^*)$. 次の3つの cases が起り得る:

(1) $x \in X$ or (2) $x \in X_0^p \setminus X$ or (3) $x \in X_1^p \setminus X$.

Case (3) は、(2) と同様だから、(1), (2) の cases を考えればよい。

Case (1): X は p-open だから $x \in (A \cap X)[p]$. すなわち、$(A \cap X) \cup \{x\}$ は copy of $\omega \cup \{p\}$ in X である。よって、既に g により $(A \cap X) \cup \{x\}$ は、2色に色分けされている。

Case (2): 3.7 により、$x \in (A \cap X_0)[p]$. ゆえに、$\tilde{g}$ は、point x を color 1 に、$A \cap X_0$ を color 0 に、ぬり分けるから、もちろん $A \cup \{x\}$ は 2色にぬり分けられている。

☺

Subset $X \subseteq \omega^*$ に対し，X を含む最小の p-closed set を p-cl X と表わし，p-<u>closure</u> of X という。Increasing sequence of sets X_α $(\alpha < \omega_1)$ を，

$$X_0 = X$$

$$X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta \text{ if } \alpha : \text{limit}, \qquad X_\alpha = X_\beta^p \text{ if } \alpha = \beta+1$$

と定めれば，$\text{p-cl}\, X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ である。p-open sets の union は常に p-open であるから，3.8 により次が言える。p-open & p-closed な set を p-<u>clopen</u> ということにする。

3.10 <u>Cor.</u> X : p-open $\longrightarrow$ p-cl X : p-clopen. ☺

3.8 の御陰で，3.9 の操作を何回でも繰返せるから，次の lemma を得る。

3.11 <u>Lemma.</u> X : p-open であり，coloring function $g : X \to 2$ は，X の中の，どの copy of $\omega \cup \{p\}$ も 2 色に色分けしているとする。この時，g は p-clopen set p-cl X の上に extend され，その extension $\tilde{g}$: p-cl $X \to 2$ は，$\underbrace{}_{\text{p-cl X の中の}}$ どの copy of $\omega \cup \{p\}$ も 2 色に色分けする。☺

この lemma 3.11 は 強力な結果であるが、これを apply するためには その仮定を満たす p-open set がなければならない。(Empty set $X = \phi$ から始めたのでは empty set $p\text{-cl}\, X = \phi$ に終ってしまう。) そのため、次の "p-satellite set" の概念が必要になってくる。

$$\mathrm{Ac}(p) \triangleq \bigcup \{ A[p] : A \in \mathbb{D}(\omega^*) \} \quad , \quad \mathrm{Inac}(p) \triangleq \omega^* \setminus \mathrm{Ac}(p)$$

とおく。 $x \in \mathrm{Ac}(p)$ となるのは、 $x \in A[p]$ となる $A \in \mathbb{D}(\omega^*)$ が存在する時であるから、 $\mathrm{Ac}(p)$ は、 x の外側 $\omega^* \setminus \{x\}$ から p により "accessible" であるような点 x の集まりである。従って、 $\mathrm{Inac}(p)$ は p により "inaccessible" な点の集まりである。 Fact 3.4 により、 $p \in \mathrm{Inac}(p)$ である。また、明らかに すべての weak P-points は $\mathrm{Inac}(p)$ に属すから、

$$\omega^* = \mathrm{Ac}(p) \cup \mathrm{Inac}(p) , \qquad |\mathrm{Ac}(p)| = |\mathrm{Inac}(p)| = 2^{\mathfrak{c}} .$$

$x \in \omega^*$ とする。 x を含む subset in ω^* が

$$\{ x_s : s \in T \} \quad \text{where } T \text{ is a subtree in } \omega^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} \omega^n$$

($\omega^{<\omega}$ は inclusion $\subseteq$ による tree $(\omega^{<\omega}, \subseteq)$ である)

の形に表わされ、次の4つの条件を満す時、p-<u>satellite</u> set of x といい、 $S(x,p)$ と記す:

(1) $\langle\rangle \in T$ & $x_{\langle\rangle} = x$ ($\langle\rangle$は empty seq. $\in \omega^{<\omega}$)

(2) $\exists$ a system $\{U_s : s \in T\}$ of clopen sets in ω^* such that

$x_s \in U_s$ for every $s \in T$.

$U_s \cap U_t = \phi$ if s is incomparable with t

$U_s \supseteq U_t$ if $s \subseteq t$.

(3) $x_s \in Ac(p)$ ならば, $\{n \in \omega : s\hat{}n \in T\}$ は infinite

であり, $x_s \in B_s[p]$

where $B_s = \{x_{s\hat{}n} : s\hat{}n \in T\} \in \mathbb{D}(\omega^*)$

(4) $x_s \in Inac(p)$ ならば, s は maximal node in T.

明らかに, ω^* の各点 x は, 或る p-satellite set $S(x, p)$ に含まれる。また, $x \in Inac(p)$ のとき に限り, $S(x, p) = \{x\}$ である。 p-open sets の任意個の union は p-open であり, p-open sets の有限個の intersection は p-open であるから, p-open sets 全体は, topology on ω^* を定める。この new topology on ω^* を τ_p と表わす。 3.6 により p-satellite set は p-open である。また, X : p-open ならば $\forall x \in X$ に対し, $x \in S(x, p) \subseteq X$ なる p-satellite set をとれる。ゆえに,

3.12 Lemma. p-satellite sets 全体は, open base for τ_p である。すなわち, X : p-open $\longleftrightarrow$ $\forall x \in X$ $\exists$ p-satellite $S(x,p) \subseteq X$.
☺

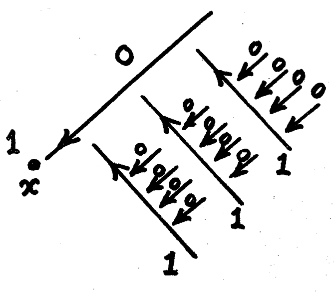
従って, p-open set は, (ω^*, τ_p) における open set であり, p-closed set は, (ω^*, τ_p) における closed set である。また, p-closure p-cl X は, X を含む minimal な p-closed set であるから, X の closure w.r.t. τ_p である。ω^* の通常の topology を τ と表わせば, τ_p は τ より(ずっと) finer であり, 従って, τ_p は Hausdorff である。しかし, $|S(x,p)| \leq \omega$ であり, $|S(x,p)| = \omega$ のとき, $|\text{p-cl } S(x,p)| = \mathfrak{c}$ であるから, τ_p は T_3 ではない。3.10 を考慮すれば, 結局, 次のように言える:

(ω^*, τ_p) は, extremally disconnected, Hausdorff, non-regular space である。

さて, $S(x,p) = \{x_s : s \in T\}$ を任意の p-satellite とせよ。Function $g : S(x,p) \to 2$ を

$$g(x_s) = \begin{cases} 1 & \text{if the length } |s| \text{ is even,} \\ 0 & \text{if } |s| \text{ is odd} \end{cases}$$

と定めれば, 3.6 により, $S(x,p)$ の中の任意の copy of $\omega \cup \{p\}$ は, 2色にぬり分けられていることがわかる。



3.13 <u>Lemma</u>. 任意の p-satellite set $S(x,p)$ 上には、coloring function $g : S(x,p) \to 2$ で、$S(x,p)$ の中の、どの copy of $\omega \cup \{p\}$ も2色に色分けするものが存在する。☺

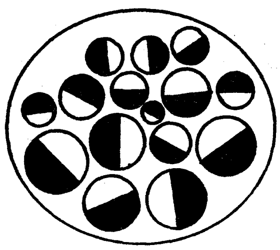
この 3.13 と、3.11 とを組合せれば Main theorem が得られる。

3.14 <u>Theorem</u>. (Shelah) $\omega^* \not\to (\omega \cup \{p\})^1_2$.

<u>Proof</u>. New topological space (ω^*, τ_p) において、maximal disjoint collection $\{S_\alpha : \alpha < 2^{\mathfrak{c}}\}$ of p-satellite sets をとる。この "maximality" から、$X \triangleq \bigcup_{\alpha < 2^{\mathfrak{c}}} S_\alpha$ とおけば、$\omega^* = p\text{-cl}\, X$ となる。$g_\alpha : S_\alpha \to 2$ を、3.13 により保証される coloring function とし、$g \triangleq \bigcup_{\alpha < 2^{\mathfrak{c}}} g_\alpha : X \to 2$ と定めれば、各 S_α は p-open であるから、この g は、3.11 の仮定を満たす。3.11 によりこの g を extend した

$$\hat{g} : \omega^* = p\text{-cl}\, X \to 2$$

を考えれば、これは、ω^* の中の、どの copy of $\omega \cup \{p\}$ をも2色に色分けしている。☺



ω^*

任意の infinite, countably compact subspace $C \subseteq \omega^*$ は, copy of $\omega \cup \{p\}$ for some $p \in \omega^*$ を含むから.

3.15 <u>Cor.</u> 任意の infinite, countably compact space C に対し

$$\omega^* \not\to (C)^1_2 .$$

C が compact の場合は, 3.15 は, 1.2 からの帰結であるが, もちろん, ω^* の中には, countably compact space で cardinality $\mathfrak{c}$ のものがたくさんある。たとえば, どんな subset $X \subseteq \omega^*$, $\omega \leq |X| \leq \mathfrak{c}$ に対しても, $C = p\text{-cl}\, X$ は, そのような例である。

§4. Open Questions

$\omega^* \to (Y)^1_2$ となる space Y を完全に characterize できれば申し分ないが, これは現在のところ御先まっ暗な夢である。 2.5, 2.2, 1.2 に鑑みて, 次の question が生ずる。

4.1 <u>Question.</u> Weight of $Y \leq \mathfrak{c}$ & $|Y| \leq \mathfrak{c}$ なる任意の P-space Y に対し, $\omega^* \to (Y)^1_2$ が成立するか?

3.14 からは次の疑問がわく。

4.2 <u>Question</u>. 任意の non-discrete, countable space Y に対し, $\omega^* \not\to (Y)^1_2$ であろうか？

一般に, ω^* の中の countable, discrete subset は比較的扱い易いが, 任意の countable subset となると, 構造が非常に複雑なものがあるため扱いづらくなる。たとえば, ω^* の中には, dense-in-itself な countable subset E_0 で,

$$\forall A \in \mathbb{D}(\omega^*)\ \forall x \in E_0\ (x \notin A \to x \notin \mathrm{cl}\, A)$$

($\mathrm{cl}\, A$ は closure in ω^*) なる性質をもつものが存在する。この E_0 の中の discrete subset は, E_0 においては常に closed になるのであるから, このような E_0 に対しては, 3.14 は無力である。 E_0 の作り方は, J. van Mill "Sixteen topological types in $\beta\omega\setminus\omega$" Top. & Appl. 13 (1982) 43-57 の 3.3 (pp.53, 54) による: Cantor set C の absolute E を考える。$\pi: E \twoheadrightarrow C$ を perfect, irreducible map とする。まず, E を, ω^* の中に, c-OK set となるように embed する。しからば, $\omega^* \setminus E$ の中の任意の countable subset H に対し $E \cap \mathrm{cl}\, H = \phi$ である。C は, 1-st countable, 0-dimensional であるから, 上の van Mill の論文の方法で, 各 $t \in C$ に対し, 点 $x_t \in \pi^{-1}(t)$ で,

$$\forall A \in \mathbb{D}(E \setminus \{x_t\})\quad x_t \notin \mathrm{cl}\, A$$

なる性質をもつものを選べる。C は separable だから

$\exists\, C_0$: countable, dense in C.

$E_0 \triangleq \{x_t : t \in C_0\}$ と定めれば，π が irreducible であることから これは dense in E である。明らかに，E_0 の各点 x は，その外側 $\omega^* \setminus \{x\}$ にある countable discrete subset によっては近づけない。☺