数理解析研究所講究録
758巻 1991年 7-14

帰納的次元に関するパシンコフの積定理をめぐって

愛媛大学・教養部　　津田　光一（Kôichi TSUDA)

事の起こり

京都のＩＣＭ 90 の後に，筑波大学で８／３１－９／４にかけて開かれた General Topology and Geometric topology symposium に１０名を越すソ連人参加者があった．　その数だけではなく質においても，これだけのメンバーが日本の位相空間論に関する集会に集まったのは初めてのことであった．

その参加者の中に次元論の大家である B.A. Pasynkov が含まれていた．P. Aleksandrov と共著で500ページを越す次元論の専門書[2]を書いていることからも知られるように，その業績は高く評価されている．

この Pasynkov が書いている論文の数は，V.V. Fedorchuk と V.V. Filippov との３人による次元論の優れた Survey [16] にあるだけで３０を越える．　その中で当方の研究対象の１つである積空間の次元に関する論文 [12] をめぐって１つの謎があった．

それは，[12] に Announce されている重要な定理の１つである次の定理（以下 Pasynkov の積定理と呼ぶ）の詳しい証明が１５年以上経っても発表されていないということであって，実は同じ様なことが前にもあった．

定理 0[12] 積空間 $X \times Y$ が正規で rectangular かつ各因子空間 X，Y が帰納的次元 Ind に関して有限加法性を満たすならば，次の不等号が成立する．

(*) $\mathrm{Ind}\,(X \times Y) \leqq \mathrm{Ind}\, X + \mathrm{Ind}\, Y$.

前回の事情

それは1973年に出された被覆次元に関する次の同様な積定理［11］についてであって，その詳しい証明［13］が出版されたのは1981年で，この場合８年かかっている．

定理 1［11］積空間 X x Y が rectangular ならば，次の不等号が成立する．

(*) $\dim(X \times Y) \leqq \dim X + \dim Y$.

また，その間に M. Wage による反例［20］（もちろん，Pasynkov の定理に対する反例ではなく，ある意味で Pasynkov の定理の価値を高めている反例である）が発見されこの方面に関心のある研究者達がそろそろ「Pasynkov の定理は大丈夫なのか？」と疑りかけている，そんな頃に詳しい証明が発表されたわけである．

[20］に Announce されている Wage の反例をめぐっても１悶着あって，結局この Wage の反例の詳しい construction は発表されていない（詳しい construction とどこに問題があったのかは著者の学位論文［17］を参照されたい． Engelking の定評ある教科書［5,6］にも簡単な記載がある）．

さて，この詳報［13］を見て，びっくりしたことは，Pasynkov は1973年の時点で正確な証明を知っていた（つまり Announce した時点で正しい証明までちゃんと follow していた）ことが分かったことである．

もちろん，これは当り前のことであって Pasynkov の言っていることを疑う方が悪いのであるが，あまり証明が出ないということと［11］に出ている Lemma だけを眺めていてもチンプンカンプンで誰にも証明が付かなかったということが，この詳報を見た当方をうならせた原因であった．

確かに［11］に書いてある Lemma は詳報［13］とまったく同じであるから，その Lemma に証明を自分でつけ，主定理の証明に持って行けば済むことなのであるが，その間の Gap を埋めることは言うのはたやすいが，なかなか難しい作業だったのである． 逆に言うと，それだけ Paynkov の定理が傑出していて，すばらしい定理であったとも言える．
ともあれ被覆次元に関するこのすばらしい積定理については一件落着したわけである．

今回の事情
それに比べて，今回の帰納的次元の定理をめぐってはいささか事情が異なっている．

（１）　まず［12］には Lemma がなにも書かれていないということがある．
書かれているのは，Id X という invariant の定義だけであって，定理１の時のような定理０の為の Lemma は１つも書かれていない．　もっとも，この invariant Id X については，［12］以前に出された論文においてその重要性が指摘されており，筆者も，今回定理０の証明をつける段階において，その重要性とその面白さを再認識した（［4，19］参照のこと）．

（２）　後述する筑波での講演において Pasynkov が suggest してくれた uniformly locally finiteness（以下 U．L．F．と略記する）という Key point が［12］にはどこにも書かれていない（英語版はもとよりオリジナルのロシア語にもなんの記載もない）．　このことは上述の invariant Id X とも関係することであり，U．L．F．が定理０の証明の Key point であることはまちがいない［19］と思われるので，ふにおちない．　もっとも Pasynkov は［12］にある Id X の定義そのままで U．L．F．など使わないで立派に証明を付けてみせるかもしれないが．

このような経緯を踏まえて，この定理０に関心を持っている人々の advice もあり Pasynkov に定理０の証明を教えてもらえないかと筑波コンフェレンスで頼んだわけである．　そしてコンフェレンス関係者の暖かい御協力によって，Pasynkov の特別講演が実現することとなったわけである．

筑波での Pasynkov の講演

定理０の証明についての講演は英語で行なわれたが，残念ながら参加者はすべて日本人であった（総数２０名程）．　彼の英語は聴き安くスローテンポであったから我々日本人には丁度良かったが Native speaker 達には敬遠されたのかもしれない．

天才だなあと思ったのは，証明の中で色々な記号を（少なくとも１０ケ以上）その場で勝手に決めて，黒板を３回も消した後でもその記号の意味するものをちゃんと覚えていて話をした時であった．　もちろん原稿など持っていない．（ここの所はあの複雑に入り組んだ，まるで音楽のフーガの楽譜のように幾重にもからまりつつ進んでいく induction を知っている人にしか分かってもらえないかもしれないが）．

この講演の数学的な意味については，実は参加者の中に失望した者が少なからず居たことは否めない．　つまり，彼が２時間余りに渡って話してくれた証明は完璧なものではあったが，非常に特殊な場合についてのものであったからである．

つまり，積空間 X x Y がコンパクトである場合についての完璧な証明をしてくれたわけで，それがいかに特殊な場合であるかということは，一般の場合の Key point である U. L. F. 性が，この場合ただの有限性と同じものになってしまうことからも分かることと思う．

更に，この場合はすでに Filippov [8] によって詳しい証明が発表されているのでその意味では，知られている場合に対する別証明を与えたに過ぎないとも言えるからである．　当日はいろいろな行事が続いていたので一般の場合の証明には全然言及できなかったのだが，最後に Pasynkov は次のように述べた．

「一般の場合には，今日述べた証明の finite を U. L. F. に置き換えてやればよい。」

これだけでは，まだ証明の全貌が分からなかった当方は，バス停まで彼を追いかけいき，次のページにかかげるメモを書いてもらった．　たった一枚のレポート用紙の走り書きではあるが，当方には宝物のような大切なメモとなった．

その後 …

このメモには U. L. F. の定義とId X の一般の場合の定義が書いてあるだけなのだが，御存じのようにロシア語の term と英語のそれが往々にして違うことがあるので（例えば stratifiable space のことをロシア語では直訳するとウロコ空間とか言うはず）念の為 U. L. F. の定義を書いてもらったわけである．
実はこれは公式の理由で，そのルーツをたどると U. L. F. というのは次元論の大家 Katětov[9] の定義した概念であることをすっかり忘れていたというのが本音である．汗顔の至り．　また U. L. F. 性の被覆次元への応用も知られている[10]．

毎日このメモをにらみながら一般の場合の証明を考えていたわけであるが,幸いにして，自分なりに納得のゆく，一般の場合の定理０の証明を得ることが出来た [19]．しかし Pasynkov は筑波で次のように話していた．　「一般の場合の証明の載っている論文を Georgia Conference の proceeding に送ったが，どういうわけか掲載されなかった．　今，独自の論文を用意している」

X is a space

a system λ of subsets of X is ω-finite for a cover ω of X, if $\forall O \in \omega$ the set $\{L \in \lambda : L \cap O \neq \emptyset\}$ is finite

A system λ is uniformly locally finite if $\exists$ a functionally open locally finite cover ω of X such that λ is an ω-finite system ⌟

$\operatorname{Id} X \leq n$ iff $\exists$ systems σ_i, $i = -1, 0, \ldots, n' \leq n$:

1)

2) if $F_\alpha \in \sigma_i$, $\alpha \in A$, and the system $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ is uniformly locally finite then $\cup\{F_\alpha : \alpha \in A\} \in \sigma_i$

パシンコフのメモ

当方の仕事 [19]

Pasynkov の論文がいつになるか分からないし，preprint を送るのには特別の許可が必要なのだと彼から聞いていたので，それを当てにしていたら更に時間がかかるのは目に見えていた． そこで [19] に論文の形でまとめてみた．

当方の contribution はどの程度なのかという評価は，後世に譲って，ここでは，数理研では時間の都合で話すことの出来なかった Remark を述べておきたい．

（１） Ind に関する有限加法性
これは，任意の２つの閉集合 F_1，F_2 に対して $\mathrm{Ind}\,(F_1 \cup F_2) = \max\{\mathrm{Ind}\,F_i\}$ を主張するもので，この仮定なしには定理０は成立しないことが知られている[7]．また，一般にこの性質を証明しようとすると，考える空間を相当制限しなければならない（少なくとも Strongly hereditarily normal [6]）．

従って積空間に有限加法性を仮定するのと，因子だけにそれを仮定するのでは大違いなのであって（丁度，積空間の正規性は因子空間に強い影響を与えるのと同じように），定理０は<u>因子にだけ有限加法性を仮定</u>していることに注意してほしい．

実際，[19] の中で，<u>各因子空間は有限加法性を満たすのに積空間は満たさない例</u>を上げてある． この有限加法性を仮定すると，いろいろ面白いことが出て来るようで，例えば<u>コンパクト</u>空間Ｘに有限加法性を仮定するとInd X と ind X が一致することが分かっている {3]．

（２） rectangularity を拡張した概念で Pasynkov が導入したものに piecewise rectangularity というものがある[14,15,18]． これについても定理０が成立する．その証明も付けることが出来たので [19] には piecewise rectangular での証明をつけてある．

（３） 今回の定理以外にも Pasynkov には同様に証明の出ていない良い定理が沢山あるようである． 位相群にも造詣が深いようで，１人の巨人がそこに居るといった感じを持つのである．

結び

この数理解析研における講演の中で「パシンコフはミステリアスだ」と筆者が述べたことについて，集会終了後に参加者の一人から一体どこがミステリアスなのか？という質問を受けた．これについて述べてみたい．

一番のネックになっていることは，文通がいつもこちらからの一方通行になっていることである． 例えば，筆者の場合，自分で論文を書くと必ずパシンコフに送っていたが，それを受け取ったという手紙が来たことがない． ５，６回そんなことがあってそろそろ送るのをやめようと思っているとクリスマス・カードがヒョコット届いたりした（そのクリスマス・カードも翌年からはパッタリ来なくなったが）．

Current Math. などに題名だけが載って面白そうな論文を送って欲しいと手紙を書いても「なしのつぶて」だったことも２，３回ではきかない．それらの原因がはっきり分からない．

ソ連の大学組織についてよく分からないので， professor の間の格差についてはっきりしたことが言えないが，格差は歴然として存在するようである． 西側のコンフェレンスなどにも自由に出られ，西側のジャーナルにも英語で論文を自由に発表出来る，日本への電話もＥメールもなんでもござれのＡ氏と比べれば，パシンコフの場合は，これが同じモスクワ大学の先生かと思わせる程の違いがある．

パシンコフがグルジア出身と聞いたわけではないが，Chigogidze との共著 [4] の存在や，彼（グルジアのトビリシ州立大学所属）を育て上げようとする姿勢が顕著に筑波での雑談のおりなどにも見られたことなどから，更にまたひょんなことからグルジアの赤ワインを筆者にプレゼントしてくれたことなどから推して，グルジア出身であることはほぼまちがいないと思われる．

最近やっと手にいれた論文 [4] はグルジアのアカデミー紀要であるが，そこにはロシア文字とはまったく違ったグルジア文字が（おそらく題名だと思われるが）書かれており，スターリンや前外相のシュワルナゼを輩出したグルジアとの結びつきにも興味をそそられる．

彼らをめぐる諸情勢も目まぐるしく変わってきているようである[0,1]から粘り強くパシンコフと連絡を取り続けなくてはいけないと考えている．

参考文献

[0] S. ブラギンスキー ＋ V. シュヴィドコー，ソ連経済の歴史的転換はなるか，講談社現代新書，１９９１．

[1] 川崎 浹，ペレストロイカの現場を行く，同時代ライブラリー６３，１９９１．岩波書店.

[2] P.S. Aleksandrov & B.A. Pasynkov, Introduction to Dimension Theory, Nauka, Moscow, 1973 (Ruyssian).

[3] A.V. Arkhangel'skii & L.S. Pontryagin (Ed.), General Topology I, Springer-Verlag, 1990.

[4]A. Cigodze & B. A. Pasynkov, On the dimension of products of completely normal regular spaces, Soobacenija Akad. Nauk Gruzin. SSR 90 (1978)553-56.

[5] R. Engelking, General Topology, Helderman Verlag, Berlin 1989.

[6] ___________, Dimension Theory, North-Holland, Amsterdam 1978.

[7] V.V. Filippov, On the inductive dimension of the product of bicompacta Dokl. Akad. Nauk 202(1972)1016-1019 = Soviet Math. Dokl. 13(1972)250-254.

[8] ____________, On the dimension of the product of topological spaces (in Russian), Fund. Math. 105(1980)181-212.

[9] M. Katětov, On the extension of locally finite covering (in Russian), Colloq. Math. 6(1958)145-151.

[10] K. Morita, Dimension of general topological spaces, Surveys in General Topology 297-336, Academic Press, 1980.

[11] B.A. Pasynkov, On the dimension of products of normal spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR 209(1973)792-794 = Soviet Math. Dokl. 14(1973)530-533.

[12] ____________, On the dimension of rectangular products, Dokl. Akad. Nauk SSSR 221(1975)291-294 = Soviet Math. Dokl. 16(1975)344-347.

[13] ___________ , Factorization theorems in dimension theory, Uspekhi Mat. Nauk 36(1981)147-175 = Russian Math. Surveys 36(1981)175-209.

[14] ____________, On the monotonicity of dimension, Dokl. Akad. Nauk SSSR 267(1982)548-552 = Soviet Math. Dokl. 26(1982)654-658.

[15] ____________, On dimension theory, Aspects of Topology (in memory of Hugh Dowker 1912-1982) London Math. Soc. Lecture Note 93(1985)227-250.

[16] B.A. Pasynkov, V.V. Fedorchuk & V.V. Filippov, Dimension Theory, J. Soviet Math. 18(1982)789-841.

[17] K. Tsuda, Dimension theory of general spaces, Ph D thesis, Univ. of Tsukuba 1985.

[18] _______, Rectangularity versus piecewise rectangularity of product spaces, Canad. Math. Bull. 30(1987)49-56.

[19] _______, A product theorem in the large inductive dimension theory, preprint, 1991.

[20] M. Wage, The dimension of product spaces, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. (1978)4671-4672.