数理解析研究所講究録
759巻 1991年 144-147

代数体の λ-invariant と normal basis

東京農工大　小松啓一　(Keiichi Komatsu)

有限次代数体 k に対して，その整数環を O_k で表し，有限次ガロア拡大 K/k に対し，そのガロア群を $G(K/k)$ で表す。

定義　有限次ガロア拡大 K/k が normal integral basis を持つとは，O_K の元 α が存在して，$\{\alpha^\sigma\}_{\sigma\in G(K/k)}$ が O_K/O_k の basis になることである。このとき，α は K/k の normal integral basis を生成するという。

この normal integral basis については次の Noether の結果が基本的である。

定理　有限次ガロア拡大 K/k が normal integral basis を持つならば，K/k は tamely ramify である。

上の定理によれば，$\mathbb{Z}_p$-拡大の中間体は normal integral basis を持たないが，最近 Kersten, Michaliček [1] に

より，$\mathbb{Z}_p$－拡大に対して，興味深い normal basis が導入された。即ち，p を奇素数とし，K/k を $\mathbb{Z}_p$－拡大とし，

$$k \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots \subset K \qquad (k_n : k) = p^n$$

とする。

定義　$\mathbb{Z}_p$－拡大 K/k が広義 normal integral basis を持つとは，すべての自然数 n に対して，$\mathcal{O}_{K_n}[\frac{1}{p}]$ の元 α_n が存在して，$\{\alpha_n^{\sigma}\}_{\sigma \in G(K_n/k)}$ が $\mathcal{O}_{K_n}[\frac{1}{p}]/\mathcal{O}_{k}[\frac{1}{p}]$ の basis になることである。

この定義をもちいて，[1] で次の定理が示された。

定理　奇素数 p に対して，$\zeta_1 = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}}$，$k = \mathbb{Q}(\zeta_1)$ k^+ を k の最大実部分体とし，h^+ を k^+ の類数とする。このとき，次の (1) と (2) は同値である。

(1)　h^+ は p で割れない。

(2)　k のすべての $\mathbb{Z}_p$－拡大は広義 normal integral basis を持ち，k^+ の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$－拡大の λ－invariant は 0 になる。

上の定理から，$\mathbb{Z}_p$－拡大の広義 normal integral basis

の存在と類数，特に岩沢不変量の間に関係があると思われるが，この小論では虚２次体の $\mathbb{Z}_p$－拡大の広義 normal integral basis と λ－invariant の関係について述べる。そこで，F を虚２次体とし，$k=F(\zeta_1)$ とし，

$\chi : G=G(k/F) \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ を Teichmüller character 即ち，G から p 進整数環の乗法群 $\mathbb{Z}_p^\times$ への homomorphism で $\zeta_1^g=\zeta_1^{\chi(g)}$ $\quad \forall g\in G$ となるものとする。さらに G の位数を #G とし，$e_i=\frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi(g)^i g^{-1}$ と置く。このとき次の定理が得られた。

定理　p を奇素数，$\zeta_1=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}}$，F を虚２次体 $k=F(\zeta_1)$，k^+ を k の最大実部分体，A^+ を k^+ のイデアル類群の p sylow 部分群，F_∞ を F の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$－拡大とする。さらに，p の上にある k^+ の素 ideal はただ１つで，A^{+e_1} は non-trivial とする。このとき，F の $\mathbb{Z}_p$－拡大 K で $K\cap F_\infty=F$ で，K/F が広義 normal integral basis を持つものが存在するならば，k^+ の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$－拡大の λ－invariant は 0 でない。

系　正の整数 m を square free とし，$F=\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ とする。このとき上の $k=F(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}})=\mathbb{Q}(\sqrt{-m},\sqrt{-3})$，$k^+=\mathbb{Q}(\sqrt{3m})$

となる。k^+ の類数が 3 で割れ，3 の上にある k^+ の素イデアルがただ 1 つで，F の $\mathbb{Z}_p$-拡大 K で $K \cap F_\infty = F$ で K/F が広義 normal integral basis を持つものがあるならば，k^+ の cyclotomic $\mathbb{Z}_3$-拡大の λ-invariant は 0 でない。

Reference

[1] I. Kersten and J. Michaliček, On Vandiver's conjecture and $\mathbb{Z}_p$-extensions of $\mathbb{Q}(\zeta_{p^m})$, J. Number Theory 32 (1989), 371-386