数理解析研究所講究録
761巻 1991年 126-134

Zonal 多項式について

広大・理　木幡篤孝 (Atsutaka Kowata)

§0. Intro

Zonal 多項式は，E. Cartan [2]，H. Weyl [12] を始めとする表現論においてSchur多項式と並んで，重要なものとして研究され，対称空間上の球函数として拡張され，(Helgason [5]，Harish-Chandra [4])，今尚その様々な方向への拡張が研究されつつある。(Macdonald [10]，Jing-Yamada [9])。

他方，統計学に於いて，James [7] は多変量解析学にZonal 多項式を用いる画期的な方法を導入した。しかし統計学に於いては具体的な座標によるzonal多項式の具体的な式が必要となる。実際，James [8] では，代数的表現論の研究を行いつつZonal多項式の具体的な表示を得ようとしたが，特別な場合を除いては成功していない。

ここでは，3×3 正定値対称行列上のzonal多項式を対称行列の固有値の基本対称式に関する explcit な式で表わす。

尚，Lemma 1 と定理の証明の一部は和田涼子さん(広大・経科)によるものである。

§1. Preliminaries

nを正整数とする。$\mathcal{Y}$で3×3実正定値対称行列全体，V_nで$\mathcal{Y}$上の複素数値n次同次多項式全体のなすベクトル空間を表わす。$G=GL(3,\mathbb{R})$，$K=O(3,\mathbb{R})$をそれぞれ，3次の一般線型群，実直交群とすると，自然に$\mathcal{Y}$とG/Kは同一視される。V_n上のGの表現ρを次の式で定義する。

$$\rho(g)\varphi(y)=\varphi(g^{-1}\cdot y\cdot {}^t g^{-1})$$

ここに，$\varphi\in V_n$，$y\in\mathcal{Y}$，$g\in G$とする。

nの3分割を$\mathcal{P}_n$で表わそう。つまり

$$\mathcal{P}_n=\left\{ \underline{n}=(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{Z}_+^3 \;;\; \begin{matrix} n_1\geq n_2\geq n_3 \\ n_1+n_2+n_3=n \end{matrix} \right\}。$$

ここに　$\mathbb{Z}_+=\{n \;;\; \text{non-negative integers}\}$とする。

各$\underline{n}=(n_1,n_2,n_3)$に対し

$$\psi_{\underline{n}}(y)=y_{11}^{\,n_1-n_2}(y_{11}y_{22}-y_{12}^2)^{n_2-n_3}(\det y)^{n_3}$$

とおく。$(y=(y_{ij})\in\mathcal{Y})$　更に$V_{\underline{n}}$で，$\{\rho(g)\psi_{\underline{n}}\;;\;g\in G\}$により張られるベクトル空間を表わすことにする。この時，よく知られている（例えば[1]）ように$V_n=\bigoplus_{\underline{n}\in\mathcal{P}_n}V_{\underline{n}}$が成り立つ。

$$V_n^I=\{\varphi\in V_n\;;\;\rho(k)\varphi=\varphi\quad\forall k\in K\}$$

$$V_{\underline{n}}^I=V_{\underline{n}}\cap V_n^I$$

とおくと，[2]により，$\dim V_{\underline{n}}^I=1$となり，$V_{\underline{n}}^I$の生成元はzonal多項式と呼ばれる。

統計学の記法と合すために，V_π^I の生成元 C_π を次の式が成り立つようにとる。

$$(\mathrm{tr}\, y)^n = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} C_\pi(y)$$

C_π の定義からあるzeroでない定数 c があって

$$C_\pi(y) = c\int_{O(3)} \rho(k)\psi_\pi(y)dk$$

と書ける。ここに $\int_{O(3)} dk = 1$ とする。任意の $y \in \mathcal{Y}$ に対して ${}^t k y k = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda$ ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は y の固有値) となる $k \in O(3)$ がとれ，zonalの定義から C_π は λ の関数となる。実際上の積分から，次の積分表示を得る。

$$C_\pi(\lambda) = c'(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{n_3}\int_{O(3)} (a_{11}^2\lambda_1 + a_{12}^2\lambda_2 + a_{13}^2\lambda_3)^{n_1-n_2}(a_{33}^2\lambda_1\lambda_2 + a_{13}^2\lambda_2\lambda_3 + a_{23}^2\lambda_1\lambda_3)^{n_2-n_3}dk$$

ここに c' はnon-zeroな定数で $k = (a_{ij}) \in K$ とする。

$\mathbb{D}(G/K)$ で G/K 上の G－不変な微分作用素のなす環とする。Schurのlemmaを用いると

$$D(V_n) \subset V_n \quad , \quad D(V_\pi) \subset V_\pi \qquad \forall D \in \mathbb{D}(G/K)$$

が分ることにより，zonal多項式 C_π は G/K ($\cong \mathcal{Y}$) 上の球函数であることが知られる。(例えば see [5])

§2. Zonal 多項式の係数について

ここでは，対称行列の固有値の基本対称式による展開の係数を具体的に求める。§1で見たように C_κ は zonal spherical function であるから，特に $\mathcal{Y}$ 上の Laplace-Bertrami 作用素の固有函数である。今 Δ で動径方向を表わすことにすると，次の式で表わされる。

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\right)^2 + \sum_{\substack{i \neq j \\ 1 \leq i, j \leq 3}} \lambda_i^2 (\lambda_i - \lambda_j)^{-1} \frac{\partial}{\partial\lambda_i}$$

(cf. [8]). 更に [8] から

$$\Delta C_\kappa = \chi(\kappa) C_\kappa$$

ここに $\chi(\kappa) = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_1 - n_3$.

さて $s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $s_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$, $s_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$

とおくと，$C_\kappa(\lambda)$ は $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の対称多項式となるから，C_κ は s_1, s_2, s_3 の多項式でもある。そこでこの変数 s に関する微分方程式を作る。

$$\Omega C_\kappa = \chi(\kappa) C_\kappa$$

$$\Omega = (s_1^2 - 2s_2)\left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)^2 + (2s_2^2 - 2s_1 s_3)\left(\frac{\partial}{\partial s_2}\right)^2 + 3s_3^2\left(\frac{\partial}{\partial s_3}\right)^2$$
$$+ (2s_1 s_2 - 6s_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2}\right) + 4s_2 s_3\left(\frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_3}\right) + 2s_1\left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right) + 3s_3\left(\frac{\partial}{\partial s_3}\right)$$

ここで $C_\pi = \sum_{\nu \in \Lambda_n} a_\pi(\nu) s_1^{\nu_1} s_2^{\nu_2} s_3^{\nu_3}$ と表わす。ここに

$$\Lambda_n = \{ \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{Z}_+^3 \, ; \, \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 = n \}$$

とする。前述の Ω に関する微分方程式から次の関係式が出る。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(P(\nu) - \chi(\pi))\, a_\pi(\nu) \\ &= (\nu_1+2)(\nu_1+1)\, a_\pi(\nu_1+2, \nu_2-1, \nu_3) \\ &\quad + (\nu_2+2)(\nu_2+1)\, a_\pi(\nu_1-1, \nu_2+2, \nu_3-1) \\ &\quad + 3(\nu_1+1)(\nu_2+1)\, a_\pi(\nu_1+1, \nu_2+1, \nu_3-1) \end{aligned} \qquad (1)$$

ここに $P(\nu) = \nu_1^2 + 2\nu_2^2 + 3\nu_3^2 + 2\nu_1\nu_2 + 4\nu_2\nu_3 + 2\nu_1\nu_3 + \nu_1\nu_2$.

さてこの漸化式を解わけだが，必ずしも解は一意的でないので，次の条件を加えることにする。

$$a_\pi(\nu) = 0 \qquad (\nu \notin \Lambda_n) \qquad (2)$$

$$\text{if} \quad \nu_3 < n_3 \Rightarrow a_\pi(\nu) = 0 \qquad (3)$$

$$\text{if} \ \nu_1+\nu_2+\nu_3 > f_1 \ \text{or} \begin{cases} \nu_1+\nu_2+\nu_3 = f_1 \\ \nu_2+\nu_3 > f_2 \end{cases} \Rightarrow a_\pi(\nu) = 0 \qquad (4)$$

このとき次の Lemma 1 が成り立つ。

Lemma 1.(和田) $\forall \pi \in \mathcal{P}_n$ に対して (1), (2), (3), (4) を満たす $\{a_\pi(\nu) \, ; \, \nu \in \Lambda_n\}$ は定数倍を除いて一意的に決まる。

更に次の定理が成立する。

Theorem $\pi \in \mathcal{P}_n$ とする。$(\pi = (n_1, n_2, n_3))$

$$C_\pi(s) = \frac{(n_1 - n_2 + \frac{1}{2})(n_1 - n_3 + 1)(n_2 - n_3 + \frac{1}{2})\,\Gamma(n_1 + n_2 + n_3 + 1)}{\Gamma(n_1 + 2)\,\Gamma(n_2 + \frac{3}{2})\,\Gamma(n_3 + 1)\,\Gamma(\frac{1}{2})} \times$$

$$\sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 = n_1 + n_2 + n_3 \\ 0 \leq k \leq n_2 - n_3 \\ 0 \leq j \leq g(k)}} (-1)^{\nu_2 + k + n_2 - n_3}\, 2^{2j} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})\,\Gamma(n_2 - n_3 - k + \frac{1}{2})\,\Gamma(n_1 - n_3 - k + 1)\,\Gamma(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - n_2 + \frac{1}{2})}{\Gamma(k - j + 1)\,\Gamma(2j + 1)\,\Gamma(n_2 - n_3 - k - j + 1)\,\Gamma(n_1 - n_3 - j - k + \frac{3}{2})}$$

$$\times \frac{\Gamma(\nu_2 + 2\nu_3 - 2n_3 - j - k + 1)}{\Gamma(\nu_1 + 1)\,\Gamma(\nu_2 + 1)\,\Gamma(\nu_2 + 2\nu_3 - n_2 - n_3 + 1)\,\Gamma(\nu_3 - n_3 - k + 1)} s_1^{\nu_1} s_2^{\nu_2} s_3^{\nu_3}$$

ここで $\Gamma(z)$ は Gamma 関数であり

$$g(k) = \begin{cases} k & (k \leqq \frac{n_2 - n_3}{2}) \\ n_2 - n_3 - k & (\frac{n_2 - n_3}{2} \leqq k) \end{cases}$$

とする。更に top の項は

$$\frac{\Gamma(n_1 + n_2 + n_3 + 1)\,\Gamma(n_1 - n_2 + \frac{3}{2})\,\Gamma(n_1 - n_3 + 2)\,\Gamma(n_2 - n_3 + \frac{3}{2})}{\Gamma(n_1 + 2)\,\Gamma(n_2 + \frac{3}{2})\,\Gamma(n_3 + 1)\,\Gamma(n_1 - n_2 + 1)\,\Gamma(n_1 - n_3 + \frac{3}{2})\,\Gamma(n_2 - n_3 + 1)} s_1^{n_1 - n_2} s_2^{n_2 - n_3} s_3^{n_3}$$

となる。

この定理の証明には Lemma 1 の外に，次の 2 つの Lemma が必要となる。

Lemma 2.

$$a_{l,m}(\nu, \mu) = \sum_{k=0}^{l} \sum_{j=0}^{g(k)} \frac{(-1)^k\, 2^{2j}\, \Gamma(k + \frac{1}{2})\,\Gamma(l + 1)\,\Gamma(l - k + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(2j + 1)\,\Gamma(l - k - j + 1)\,\Gamma(l + \frac{1}{2})}$$

$$\times \frac{\Gamma(m - l + 1)\,\Gamma(m - k + \frac{1}{2})\,\Gamma(\nu - j - k + 1)\,\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(k - j + 1)\,\Gamma(m - j - k + 1)\,\Gamma(m + \frac{1}{2})\,\Gamma(\nu - l + 1)\,\Gamma(\mu - k + 1)}$$

とおくとき，任意の $l, \nu, \mu \in \mathbb{Z}_+$，$m > 0$ に対して

$$\{\nu^2-\nu\mu+\mu^2-(m+l)\nu-\frac{1}{2}\mu+ml\}\,a_{l,m}(\nu,\mu)$$
$$=(\nu-2\mu)(\nu-m)\,a_{l,m}(\nu-1,\mu)+\mu(m+l-2\nu+\mu-\tfrac{1}{2})\,a_{l,m}(\nu,\mu-1)$$
$$+\,3\mu(\nu-m)\,a_{l,m}(\nu-1,\mu-1)$$

が成り立つ。

Lemma 3 (James [7]) $\forall\kappa=(k_1,\cdots,k_p)$ $(k_1+\cdots+k_p=k,\ k_1\geq\cdots\geq k_p\geq 0)$

$$C_\kappa(s)=c_\kappa\, s_1^{k_1-k_2}s_2^{k_2-k_3}\cdots s_{p-1}^{k_{p-1}-k_p}s_p^{k_p}+(\text{lower})$$

ここに $c_\kappa=\dfrac{2^{2k}k!\prod_{i<j}^{p}(2k_i-2k_j-i+j)}{\prod_{i=1}^{p}(2k_i+p-i)!}\prod_{l=1}^{p}\prod_{i=1}^{l}\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}(i-1)+k_i-k_{l+1})}{\Gamma(\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}(i-1)+k_i-k_l)}$

ここでは、Lemma 1, 2, 3, 定理の証明は書かないが、注意すべきは、漸化式(1)のみでは解が一意的には決まらないから(2), (3), (4)の条件を付ければ(1)は一意的で(Lemma 1) Lemma 2 から定数倍を除いて c_κ は Γ 函数の積・和、商で書け、Lemma 3 を用いてその定数倍も決まるというわけである。

References

[1] S. Abesis, GLi ideal GL(V)-invarianti in $S(S^2V)$, Rendiconti Mate. 13(1980), Ser. IV, 235-262

[2] E. Cartan, Sur la determination d'un systeme orthogonal complet dans une espace de Riemann symetrique, Clos. Rend. Circ. Mat. Palermo 53 (1929), 217-252. Oeuvres Complete, Partie 1, vol. 2, Gauthier Villars, Paris, (1952), 1045-1080.

[3] R. D. Gupta and D. Richards, Calculation of zonal polynomials of 3×3 positive definite symmetric matrices, Ann. Inst. Statist. Math. 31(1979), Part A, 207-213.

[4] Harish-Chandra, Spherical functions on a semi-simple Lie group I, II, Amer. J. Math., 80(1958), 241-310, 553-613.

[5] S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1962.

[6] L.K. Hua, Harmonic analysis of functions of several complex variables in classical regions, Amer. Math. Soc., VI

[7] A. T. James, Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples, Ann. Math. Statist. 35 (1964), 475–501

[8] A. T. James, Calculation of Zonal polynomial coefficients by use of the Laplace–Beltrami operator, Ann. Math. Statist. 39 (1968), 1711–1718.

[9] N. Jing and H. Yamada, Zonal polynomials on the quantum general linear group, private communication

[10] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, preprint.

[11] A. Takemura, Zonal polynomials, Inst. of Math. Statistics Lecture Notes, Mono. Series, Shanti S. Gupta, Series Editor, Vol. 4.

[12] H. Weyl. The Classical Groups, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1946.