数理解析研究所講究録
761巻 1991年 103-125

U(p,q)/(U(r)×U(p-r,q)) 上の不変固有超関数の接続公式についてII
－infinitesimal character が singular な場合

拓殖大・工　青木　茂 (Shigeru AOKI)
北里大・教養　加藤末広 (Suehiro KATO)

§0. 序説

$X = U(p,q)/(U(r)\times U(p-r,q))$ (但し、$2r\leqq p$, $1\leqq r\leqq q$)、X'を X の正則半単純元全体の集合とする。このとき我々は、[2] に於いて次の問題をχが regular (cf. 定義 1.3) の場合に考察した。

<u>問題</u>　X'上の infinitesimal character χを持つ不変固有超関数Π (i.e. $\Pi\in\mathcal{D}'_{\chi,H}(X')$) に対し、それが X 上の不変固有超関数に拡張可能であるための条件を求めよ (cf. 定義 1.1)。

我々はこの問題をχが singular (cf. 定義 1.3) の場合を含めて一般に論じたい。しかしχが一般の場合は記述が相当に煩瑳になる。そこで本稿では主として (regular の対局とも言える) most singular (cf. 定義 1.3) の場合を述べることにする。我々が得たΠに対する条件は現時点では必要条件であることが証明されるにすぎないが、X のかなり大きな開集合 X_0や X_1への拡張可能性に関しては必要十分条件であることが分かっている (cf. §3 の命題及び注意①、§5 の注意)。

結果的には、$\mathcal{D}'_{\chi,H}(X')$ の次元はχの如何によらず一定である。しかし$\mathcal{D}'_{\chi,H}(X')$に属する元を各カルタン部分空間上の関数として具体的に与えることは、χが regular の場合には容易であるのに反し、χが singular の場合には (たとえ most singular の場合に限定しても) かなりの議論を要する。しかも我々の得た具体的記述も見かけ上は少なからず異なる。この事から、本稿の議論の筋道は基本的には [2] と同一であるが、我々の方法が$\Pi\in\mathcal{D}'_{\chi,H}(X')$ の各カルタン部分

空間上の具体的表示を利用することから、証明の少なからぬ部分をやり直さなければならない。

最後に、我々の対称空間 $X = U(p,q)/(U(r)\times U(p-r,q))$ では群多様体とは著しく異なるタイプの接続公式が成立していることに注意しておく（cf. §3 注意②）。記号の使用に当たっては［2］との統一性を保つよう配慮した。

§1 では以下の記述に必要な［2］の基本的な定義、記号等を簡単に復習する。§§1.1 で X の構造に関する事項、§§1.2 で不変微分作用素とその動径部分に関する事項を扱う。特に、不変固有超関数の定義は§§1.2 の冒頭で与える。§2～§4 では χ が most singular の場合に話を限り詳しく論じる。§§2.1 で $\mathcal{D}^{\cdot}_{\chi,H}(X')$ の具体的な記述を与える事実（定理 2.2）を述べ、§§2.2 で定理 2.2 の証明の粗筋を述べる。§3 で、問題に対する我々の答即ち主定理を述べる。§4 ではまず最初に主定理の証明にあたっての注意を述べ、§§4.1 で半正則な半単純元の近傍での接続公式（補題 4.1, 4.2, 4.4）を提示し、これらの公式から主定理を導く。§§4.2 で上の補題の証明の手順を簡単に記述する。最後に、§5 では χ に対する制限を解除する。そして X の階数が 3（即ち $r = 3$）の場合に限り、χ のタイプごとに最終結果を具体的に書き下す。

§1. 記号と準備

<u>§§1.1</u>. $G = U(p, q)$, $H = U(r)\times U(p-r, q)$、σ をその固定群が H となる G の包合的自己同型とする。$X = G/H$ とおこう。この X が今後我々が考える半単純対称空間である。以下我々は、

(※) $\qquad 2r \leqq p, \quad 1 \leqq r \leqq q$

という仮定をおくことにする。条件(※)を仮定すると X のカルタン部分空間、即ちカルタン部分群の類似物は H 共役なものを除き $r+1$ 個あるが、それらを J_ℓ $(0 \leqq \ell \leqq r)$ とする。但し、J_0 はスプリット、J_r はコンパクトとする。（本稿では J_ℓ として［2］§1 と同じものをとることにする。）X' を X の半単純元全体とし、$J'_\ell = J_\ell \cap X'$ とおくと $X' = \coprod_{\ell=0}^{r} H.J'_\ell$ が成立する。今の場合、カルタン部

分空間 J_ℓ の次元即ち X の階数は r である。

さて、J_ℓ の元は $j = {}_\ell^j\theta_1,\cdots,\theta_\ell,t_{\ell+1},\cdots,t_r{}^H$ $(\theta_i, t_i \in \mathbb{R})$ とパラメータをつけることが出来る。J_ℓ のワイル群 $W(J_\ell) = N_H(J_\ell)/Z_H(J_\ell)$ は $\{\theta_1,\cdots,\theta_\ell\}$ の置換、$\{t_{\ell+1},\cdots,t_r\}$ の置換、そしてある i_0 $(1 \leqq i_0 \leqq r)$ に対して、θ_{i_0} を $-\theta_{i_0}$（或いは t_{i_0} を $-t_{i_0}$）に置き換える操作で生成されるから、$(\mathbb{Z}_2)^r \rtimes (\mathfrak{S}_\ell \times \mathfrak{S}_{r-\ell})$ と同一視出来る。ここに $\mathfrak{S}_n$ は n 次の対称群である。以下我々は各 $i = 1,\cdots,r$ に対し、$\cos^2\theta_i$ または $\cosh^2 t_i$ を τ_i とおいて、θ_i, t_i の代わりにしばしば τ_i を採用する。この τ_i を<u>τ-変数</u>または<u>τ-パラメータ</u>と呼ぶ。

${}_\ell^j\theta_1,\cdots,\theta_\ell,t_{\ell+1},\cdots,t_r{}^H$ に $(\tau_1,\cdots,\tau_r)$ を対応させる写像により、J_ℓ を $(\mathbb{Z}_2)^r$ の作用で割ったもの、即ち $J_\ell/(\mathbb{Z}_2)^r$ は

$$\left\{(\tau_1,\cdots,\tau_r) \;\middle|\; \begin{array}{ll} 0 \leqq \tau_i \leqq 1 & (1 \leqq i \leqq \ell) \\ 1 \leqq \tau_i & (\ell+1 \leqq i \leqq r) \end{array}\right\}$$

と1対1に対応し、$J'_\ell/(\mathbb{Z}_2)^r$ は

$$\left\{(\tau_1,\cdots,\tau_r) \;\middle|\; \begin{array}{lll} 0 < \tau_i < 1 & (1 \leqq i \leqq \ell), & \tau_i \neq \tau_j \quad (1 \leqq i < j \leqq \ell) \\ 1 < \tau_i & (\ell+1 \leqq i \leqq r), & \tau_i \neq \tau_j \quad (\ell+1 \leqq i < j \leqq r) \end{array}\right\}$$

と１対１に対応する。$W(J_\ell)$ の J_ℓ への作用に対応して、$J_\ell/(\mathbb{Z}_2)^r$ には $\mathfrak{S}_\ell \times \mathfrak{S}_{r-\ell}$ が作用することに注意する。以下、J'_ℓ と、$J'_\ell/(\mathbb{Z}_2)^r$ を τ-変数表示したものとを、しばしば同一視する。

図 1 は r = 1, 2, 3 の場合に各 J_ℓ の間の関係を τ-変数表示を用いて図示したものである。

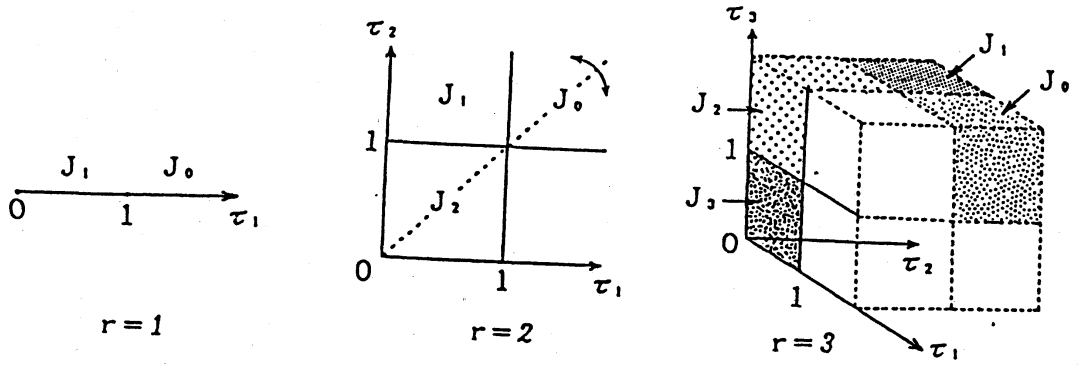

図 1

ここで $r=2$ の場合の図に現れる $\circlearrowleft$ は (τ_1,τ_2) と (τ_2,τ_1) が H の作用により互いに移りあっていることを意味する。 $r=3$ の場合にも同様な対応関係があるが煩雑になるので省略した。

§§1.2. 以上 X の構造について述べたが、次に不変微分作用素とその動径部分に関する話題に移る。まず、不変固有超関数の定義を復習しておこう。

定義 1.1. $\mathbb{D}(X)$ を $X=G/H$ 上の G-不変微分作用素全体のなす $\mathbb{C}$ 上の代数とし、$\mathcal{O}$ を H 不変な X の開集合とする。$\mathcal{O}$ 上のシュワルツ超関数 Θ が次の 2 条件:

(i) Θ は H-不変

(ii) Θ は $\mathbb{D}(X)$ の同時固有超関数である。即ち、$D\Theta=\chi(D)\Theta$ が任意の $D\in\mathbb{D}(X)$ に対し成立する $\chi:\mathbb{D}(X)\to\mathbb{C}$ が存在する。

のうち、(i) をみたすとき不変超関数 (ID と略す) であるといい、その全体の集合を $\mathcal{D}'_H(\mathcal{O})$ で表す。また (i), (ii) をともにみたすとき、(infinitesimal character χ を持つ) 不変固有超関数 (IED と略す) であるといい、その全体の集合を $\mathcal{D}'_{\chi,H}(\mathcal{O})$ と書く。

X'上の IED は X'上の実解析的関数となることが知られている。$\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2$ を $\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2$ なる H 不変開集合とすると、$\mathcal{O}_2$ 上の IED の $\mathcal{O}_1$ への制限は、同じ infinitesimal character をもつ $\mathcal{O}_1$ 上の IED である。

$\mu=p+q-2r$ とし、

$$(1.1)\quad \begin{cases} a(\tau)=4\tau(\tau-1) \\ b(\tau)=4\{(\mu+2)\tau-1\} \\ L=a(\tau)\dfrac{d^2}{d\tau^2}+b(\tau)\dfrac{d}{d\tau} \\ L_i=a(\tau)\dfrac{\partial^2}{\partial\tau_i^2}+b(\tau)\dfrac{\partial}{\partial\tau_i} \qquad (i=1,2,\cdots,r) \\ \omega=\prod_{r\geqq i>j\geqq 1}(\tau_i-\tau_j) \end{cases}$$

とおく。[2] 補題 2.1 より、$\mathbb{D}(X)$ から、

$\{\omega^{-1}S(L_1,L_2,\cdots,L_r)\omega \mid S$ は r 変数対称多項式$\}$

の上への同型写像 $\mathfrak{l}$ が存在し、$D \in \mathbb{D}(X)$ とするとき、

$$\mathfrak{l}(D)|_{J_\ell'}\ (f|_{J_\ell'}) = (Df)|_{J_\ell'} \qquad (\ell = 0,1,\cdots,r)$$

が任意の H 不変な C^∞ 級関数 f に対して成立する。

<u>定義 1.2.</u> D_k $(k = 1,2,\cdots,r)$を

$$\mathfrak{l}(D_k) = \omega^{-1}(L_1^k + L_2^k + \cdots + L_r^k)\omega$$

を満足する $\mathbb{D}(X)$ の元とする。$D_1, D_2, \cdots, D_r$ は $\mathbb{C}$ 上の可換代数 $\mathbb{D}(X)$ の自由生成元となるので、$\mathbb{D}(X)$ の指標 $\chi : \mathbb{D}(X) \to \mathbb{C}$ と順序を考えない複素数の組 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ との間に次式によって定まる全単射がある。

$$\chi(D_k) = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_r^k \quad (k = 1,2,\cdots,r)$$

この全単射により$(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ に対応する $\mathbb{D}(X)$の指標を $\chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_r}$ と記す。

<u>定義 1.3.</u> $\chi = \chi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_r}$ を $\mathbb{D}(X)$の指標とする。任意の $i \neq j$ に対し $\lambda_i \neq \lambda_j$ であるとき、χ は <u>regular</u> であるといい、そうでないとき χ は <u>singular</u> であるという。また、$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r$ が成り立つとき、χ は <u>most singular</u>であるという。

不変固有超関数 $\Pi \in \mathcal{D}'_{\chi,H}(X')$ に対して、

(1.2) $$u_\ell = \omega\, \Pi|_{J_\ell'}$$

と置くと、$u = u_\ell$ $(\ell = 0,1,2,..r)$ は、J_ℓ'上微分方程式系

(1.3) $$(L_1^k + L_2^k + \cdots + L_r^k)u = (\lambda_1^k + \lambda_2^k + \cdots + \lambda_r^k)u \quad (k = 1,2,\cdots,r)$$

を満たす。容易にわかるように $u = u(\tau_1, \cdots, \tau_r)$ がある領域で微分方程式系(1.3)を満たすとき、同じ領域で $u = u(\tau_1, \cdots, \tau_r)$ は

(1.4) $$(L_i - \lambda_1)(L_i - \lambda_2)\cdots(L_i - \lambda_r)u = 0 \quad (i = 1,2,\cdots r)$$

という微分方程式系を満足する。

<u>注意 1.4.</u> ① (1.3)から(1.4)が出ることから、常微分方程式

(1.5) $$(L - \lambda_1)(L - \lambda_2)\cdots(L - \lambda_r)F = 0$$

の解をまず調べておく事が有効となる。$(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$の如何（$\chi$ がregularか

singular か）に応じて、（1.5）の解空間の基底を用いた具体的記述はかなり異なるが、その次元は一定で 2r である。

② $\varkappa=\varkappa_{\lambda_1,\cdots,\lambda_r}$とする。

（#'）： $\{(\tau_1,\cdots,\tau_r)\mid \tau_i>0,\ \tau_i\neq 1\ (i=1,\cdots,r);\ \tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_r\}$

上の関数 u で微分方程式系(1.3)を満たすものを与える事と $\Pi\in\mathcal{D}^{\cdot}_{\varkappa,H}(X')$を与える事は同値である（cf.(1.2)）。従って、微分方程式系(1.3)の解を研究する事（cf.本稿の§2とくに定理2.2及び［2］補題4.1）は $\mathcal{D}^{\cdot}_{\varkappa,H}(X')$を調べる事に他ならない。

§2　定理とその証明

<u>§§2.1</u>. $p,q,r\in\mathbb{N}$とし、(1.1)により常微分作用素 L を定義し、$\lambda\in\mathbb{C}$とする。このとき $\langle F_{i,\nu}(\tau,\lambda)\mid i\in\mathbb{Z},\ \nu=1,2\rangle$ を、条件

1) $i\leqq 0$ のとき $F_{i,\nu}(\tau,\lambda)=0$

2) 任意の i,ν に対して $(L-\lambda)F_{i,\nu}(\tau,\lambda)=F_{i-1,\nu}(\tau,\lambda)$

3) 任意の iに対し $F_{i,1}(\tau,\lambda)$は$\tau=1$に於いて実解析的（に延長可能）で、$F_{i,1}(1,\lambda)=1$

4) $F_{i,1}(\tau,\lambda)$と$F_{i,2}(\tau,\lambda)$はτの関数として（(0,1)に於いても,(1,∞)に於いても）一次独立である。

を満たす、$(0,1)\cup(1,\infty)$上定義された変数τの(1変数)関数の系列とする。上の条件から $\{F_{i,\nu}(\tau,\lambda)\mid \nu=1,2,\ i=1,2,3,\cdots\}$ は一次独立である。$\nu=1$の時はνを略して、$F_{i,1}(\tau,\lambda)$を単に$F_i(\tau,\lambda)$とも書く。

<u>注意</u>: ① $(0,1)\cup(1,\infty)$ に含まれる任意の開区間に於いて $\{F_{i,\nu}(\tau,\lambda)\mid \nu=1,2,\ i=1,2,\cdots,r\}$ は(1.5)で $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=\lambda$ と置いて得られる微分方程式: $(L-\lambda)^rF=0$ の解の空間の基底となる。

② $F_2(\tau,\lambda)$という記号は、［2］では$F_{i,2}(\tau,\lambda)$を表したが、本稿ではこれに反し$F_{2,i}(\tau,\lambda)$を表す。

<u>定義　2.1</u>　p,q および r は自然数 λ は複素数であるとし、$j=(j_1,\cdots,j_r)\in\mathbb{Z}^r$, $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_r)\in\{1,2\}^r$ とする。この時 $(\tau_1,\cdots,\tau_r)$ の関数 $D^j_\nu(\tau_1,\cdots,\tau_r;\lambda)$ $=D^{j_1,\cdots,j_r}_{\nu_1,\cdots,\nu_r}(\tau_1,\cdots,\tau_r;\lambda)$ を、上の $F_{i,\nu}(\tau,\lambda)$ を用いて

$$D^j_\nu(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_r;\lambda)=D^{j_1,\cdots,j_r}_{\nu_1,\cdots,\nu_r}(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_r;\lambda)$$

$$=\det\begin{pmatrix} F_{j_1,\nu_1}(\tau_1,\lambda) & F_{j_2,\nu_2}(\tau_2,\lambda) & \cdots & F_{j_r,\nu_r}(\tau_r,\lambda)\\ F_{j_1-1,\nu_1}(\tau_1,\lambda) & F_{j_2-1,\nu_2}(\tau_2,\lambda) & \cdots & F_{j_r-1,\nu_r}(\tau_r,\lambda)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ F_{j_1-r+1,\nu_1}(\tau_1,\lambda) & F_{j_2-r+1,\nu_2}(\tau_2,\lambda) & \cdots & F_{j_r-r+1,\nu_r}(\tau_r,\lambda)\end{pmatrix}.$$

により定義する。$\nu_1=\nu_2=\cdots=\nu_r=1$ の時は添え字 ν_i を省略する。即ち

$$D^{j_1,\cdots,j_r}(\tau_1,\cdots,\tau_r;\lambda)=D^{j_1,\cdots,j_r}_{1,\cdots,1}(\tau_1,\cdots,\tau_r;\lambda)\text{。}$$

$\sigma\in\mathfrak{S}_r$ に対し $(j_{\sigma(1)},\cdots,j_{\sigma(r)})$ を $j\circ\sigma$, $(\nu_{\sigma(1)},\cdots,\nu_{\sigma(r)})$ を $\nu\circ\sigma$ と略記する事にすると、上の定義から明らかに

(2.1)　$D^{j\circ\sigma^{-1}}_{\nu\circ\sigma^{-1}}(\tau_1,\cdots,\tau_r;\lambda)=\operatorname{sgn}\sigma\ D^j_\nu(\tau_{\sigma(1)},\cdots,\tau_{\sigma(r)};\lambda)$

が成立する。

<u>定理2.2</u>. $\mathbb{R}^r$ の開集合

(#)　$\{(\tau_1,\cdots,\tau_r)\mid \tau_i>0,\ \tau_i\neq 1\ (i=1,\cdots,r)\}$

に於いて微分方程式系

(2.2)　$(L_1^k+L_2^k+\cdots+L_r^k)\,u=r\lambda^k u\qquad (k=1,2,\cdots,r)$

を考える。そのとき、(#) に含まれる任意の領域 (i.e. 連結開集合) に於ける (2.2) の解空間は定義2.1で定めた

$$\{D^j_\nu(\tau_1,\cdots,\tau_r;\lambda)\mid j\in\{1,\cdots,r\}^r,\ \nu\in\{1,2\}^r\}$$

の一次結合全体と一致し、その基底としては

(2.3)　$S=\{j=(j_1,\cdots,j_r)\in\{1,\cdots,r\}^r\mid j_\alpha\geq\alpha\quad(\alpha=1,2,\cdots,r)\}$

とおくとき、

(2.4)　$\{D^j_\nu(\tau_1,\cdots,\tau_r;\lambda)\mid j\in S,\ \nu\in\{1,2\}^r\}$

をとる事ができる。とくにこの解空間は $2^r\cdot r!$ 次元である。

注意 :① $i \geqq 1$のとき、 $F_i(\tau,\lambda)=F_{i,1}(\tau,\lambda)$ は$\tau=1$で実解析的（に延長可能）だが$F_{i,2}(\tau,\lambda)$はそうでない。この事から、微分方程式系 (2.2)の $(\tau_1,\cdots,\tau_r)=(1,\cdots,1)$のまわりで実解析的な解の空間の基底として $\{D^j(\tau_1,\cdots,\tau_r;\lambda) \mid j\in S\}$ がとれる事がわかる。

② $\sigma\in\mathfrak{S}_r$とするとき、定理2.2や注意①に於いてSを $\{j\circ\sigma \mid j\in S\}$ で置き換えて良い事が 微分方程式系(2.2)の対称性からわかる。 (cf.(2.1))

③ (2.2) は (1.3) 即ち

$$(L_1^k+L_2^k+\cdots+L_r^k)\ u = (\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_r^k)\ u \qquad (k=1,2,\cdots,r)$$

に於いて $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=\lambda$ としたものに他ならない。従って本稿の定理2.2は、$\lambda_i\neq\lambda_j\ (i\neq j)$ の場合を扱う [2] 補題4.1の、$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r$の場合の対応物である。

§§2.2. 以下順次 定理2.2の証明の道筋をやや詳しく述べる。

(2.5) $\quad L'_i = L_i-\lambda \quad (i=1,2,\cdots,r)$

と置くとき次の補題が成立する。

補題 2.3 次の２つの微分方程式系

(2.2) $\quad (L_1^k+L_2^k+\cdots+L_r^k)\ u = r\lambda^k\ u \qquad (k=1,2,\cdots,r)$

(2.6) $\quad (L_1'^k+L_2'^k+\cdots+L_r'^k)\ u = 0 \qquad (k=1,2,\cdots,r)$

は互いに同値である。

補題 2.4 u_{ij} を変数τ_j の１変数関数とするとき

$$\left(\sum_{i=1}^{r} L_i'^k\right)\begin{vmatrix} u_{1,1} & \cdots\cdots & u_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ u_{r,1} & \cdots\cdots & u_{r,r} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{r}\begin{vmatrix} u_{1,1}\cdots L_i'^k u_{1,i}\cdots u_{1,r} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ u_{r,1}\cdots L_i'^k u_{r,i}\cdots u_{r,r} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \begin{vmatrix} u_{1,1} & \cdots\cdots & u_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ L_1'^k u_{1,1} & \cdots\cdots & L_r'^k u_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{r,1} & \cdots\cdots & u_{r,r} \end{vmatrix} .$$

（証明）　最初の等式は行列式の定義を思い出せば明らかである。二番目の等式は両辺に行列式の展開公式を適用して得られる。

次の補題は補題2.4より容易に示される。

<u>補題　2.5</u>　$1 \leqq j_1, j_2, \cdots, j_r \leqq r$　ならば　任意の　$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r = 1,2$ に対し $D^{j_1, j_2 \cdots j_r}_{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_r}(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_r; \lambda)$ は微分方程式系（2.6）の解である。

以下（#）に含まれる領域（即ち連結開集合）を任意に固定しその上で考える。

$\{F_{i_1 \nu_1}(\tau_1, \lambda) F_{i_2 \nu_2}(\tau_2, \lambda) \cdots F_{i_r \nu_r}(\tau_r, \lambda) \mid \nu_\alpha = 1,2,\ \ i_\alpha = 1,2,3,\cdots\ (\alpha = 1, 2, \cdots, r)\}$ の一次独立性を用いて次の補題が示される。

<u>補題　2.6</u>

(2.3)　$S = \{j = (j_1, \cdots, j_r) \in \{1, \cdots, r\}^r \mid j_\alpha \geqq \alpha \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, r)\}$

とおく。このとき、

(2.7)　$\{D^j_\nu(\tau_1, \cdots, \tau_r; \lambda) \mid j \in S,\ \nu \in \{1,2\}^r\}$

は一次独立である。

<u>補題　2.7</u>　微分方程式系（2.6）の解空間は高々 $2^r \cdot r!$ 次元である。

（証明）　rに関する数学的帰納法で示す。

i）r=1 のとき、（2.6）は単独微分方程式 $(L-\lambda)u=0$ であるから、その解空間は $2 = 2^1 \cdot 1!$ 次元 である。即ちr=1のときは補題は成立する。

ii）$r \geqq 2$ とし、補題がr-1のときは成立すると仮定して rのとき成立する事を示す。　帰納法の仮定より

(2.8)　$(L_1'^k + \cdots + L_{r-1}'^k)\ v = 0 \qquad (k = 1, \cdots, r-1)$

の解空間は高々$2^{r-1}\cdot(r-1)!$次元である。

$u=u(\tau_1,\cdots,\tau_r)$ を(2.6)の解とすると、$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=\lambda$ に対し(1.4)を満たす事より、適当な$\tilde{C}^{i_1,\cdots,i_r}_{\nu_1,\cdots,\nu_r}\in\mathbb{C}$によって

$$u(\tau_1,\cdots,\tau_r)=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_{r-1},i_r\\ \nu_1,\cdots,\nu_{r-1},\nu_r}}\tilde{C}^{i_1,\cdots,i_r}_{\nu_1,\cdots,\nu_r}F_{i_1,\nu_1}(\tau_1,\lambda)\cdots F_{i_{r-1},\nu_{r-1}}(\tau_{r-1},\lambda)F_{i_r,\nu_r}(\tau_r,\lambda)$$

と書ける。よって、$\nu=1,2$, $m=1,2,\cdots$ の時このuに対し$\tau_1,\cdots,\tau_{r-1}$の関数$u_{m,\nu}$を

$$(2.9)\qquad u_{m,\nu}=\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_{r-1}\\ \nu_1,\cdots,\nu_{r-1}}}\tilde{C}^{i_1,\cdots,i_{r-1},m}_{\nu_1,\cdots,\nu_{r-1},\nu}F_{i_1,\nu_1}(\tau_1,\lambda)\cdots F_{i_{r-1},\nu_{r-1}}(\tau_{r-1},\lambda)$$

により定めると、$m\geqq r+1$の時 $u_{m,\nu}=0$ であり、

$$(2.10)\qquad u=\sum_{\substack{m=1,\cdots,r\\ \nu=1,2}}u_{m,\nu}F_{m,\nu}(\tau_r,\lambda)$$

となる。$F_{i,\nu}(\tau_r,\lambda)\equiv 0$ $(i\leqq 0)$; $L'_rF_{i,\nu}(\tau_r,\lambda)=F_{i-1,\nu}(\tau_r,\lambda)$である事から(2.10)の u に対して

$$(L'^k_1+\cdots+L'^k_{r-1}+L'^k_r)\,u=\sum_{\substack{m=1,\cdots,r\\ \nu=1,2}}\{(L'^k_1+\cdots+L'^k_{r-1})\,u_{m,\nu}+u_{m+k,\nu}\}F_{m,\nu}(\tau_r,\lambda)$$

が成り立つ。従って、$m\geqq r+1$の時 $u_{m,\nu}=0$ と置けば、$u=u(\tau_1,\cdots,\tau_r)$ が(2.6)の解であるための必要十分条件は、u が(2.10)の表示をもち更に、各 $m=1,\cdots,r$; $\nu=1,2$; $k=1,\cdots,r-1,r$ に対し

$$(2.11)\qquad (L'^k_1+\cdots+L'^k_{r-1})\,u_{m,\nu}=-u_{m+k,\nu}$$

が成立する事である。

ここで

$$(2.12)\qquad \dim\left\{\sum_{\substack{i\leqq m\leqq r\\ \nu=1,2}}u_{m,\nu}F_{m,\nu}(\tau_r,\lambda)\;\middle|\;\begin{array}{l}u_{m,\nu}\text{ は}k=1,\cdots,r-1\text{に対し}\\ (2.11)\text{を満たす}\end{array}\right\}\leqq 2(r-i+1)\cdot 2^{r-1}\cdot(r-1)!$$

がいえたとすると、とくに i=1 の場合を考えれば、これは補題自身に他ならない。従って以下(2.12)を証明する。まず i=r のとき $v=u_{r,\nu}$が(2.8)を満たす事より(2.12)は成立する。$i=j+1\leqq r$ のとき(2.12)が成立すると仮定する。すると、$u_{j+1,\nu}$, $u_{j+2,\nu}$, $\cdots$, $u_{r,\nu}$を指定するごとに微分方程式系

$$(L'^k_1+\cdots+L'^k_{r-1})u_{j,\nu}=-u_{j+k,\nu}\qquad(k=1,2,\cdots,r-1)$$

を満たす $u_{j,v}$ は存在するとすれば(2.8)の解の分だけ不定である。よって$i=j$のとき (2.12)の左辺は $2(r-(j+1)+1)\cdot 2^{r-1}\cdot(r-1)! + 2\cdot 2^{r-1}\cdot(r-1)!$ 即ち $2(r-j+1)\cdot 2^{r-1}\cdot(r-1)!$ で抑えられる。従って i に関する(逆向きの)数学的帰納法により$i=1,2,\cdots,r-1,r$に対し(2.12)が証明された。【証明終】

補題2.3に注意すれば 補題2.5～7 から直ちにこの節の主要結果である定理2.2が得られる。

§3. 主定理

本節及び次節では infinitesimal character χ が most singular である場合即ち $\chi=\chi_{\lambda,\cdots,\lambda}$ ($\lambda\in\mathbb{C}$) の場合のみを扱う。

$\mathbb{C}$ の部分集合Λ_d、Λ_sを、

$$\Lambda_d=\{\lambda(s)\mid s=\pm(\rho+2i),\ i=0,1,2,\cdots\}=\{4i(i+\mu+1)\mid i=0,1,2,\cdots\},$$

$$\Lambda_s=\{\lambda(s)\mid s=\pm(\rho+2i),\ i=-1,-2,\cdots,-\mu\}=\{4i(i+\mu+1)\mid i=-1,\cdots,-\mu\},$$

により定義する。ここで、$\rho=\mu+1=p+q-2r+1$, $\lambda(s)=s^2-\rho^2$ とおいた。直ちに分かるように、$\Lambda_d\cap\Lambda_s=\phi$ が成り立つ。

<u>主定理</u> $\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi_{\lambda,\cdots,\lambda},H}(X)$とし、$\Pi_\ell=\Theta|_{J_\ell}$ とおく。そのとき

(i) 適当な定数 ${}_\ell C^j$に対し次の式が成立する。

$$\omega\Pi_\ell(\tau_1,\cdots,\tau_r)$$
$$=\sum_{j\in S_\ell}{}_\ell C^j\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\ell\times\mathfrak{S}_{r-\ell}}D^{j\circ\sigma}(\tau_1,\cdots,\tau_r;\lambda)$$

($\ell=0,1,\cdots,r$)，但し、

$$S_\ell=\left\{j=(j_1,\cdots,j_r)\in\{1,\cdots,r\}^r\ \middle|\ \begin{array}{l}\ell\leqq j_1\leqq j_2\leqq\cdots\leqq j_\ell\leqq r,\\ j_{\ell+1}=j_{\ell+2}=\cdots=j_r=r\end{array}\right\},$$

$j=(j_1,\cdots,j_r)$に対し $j\circ\sigma=(j_{\sigma(1)},\cdots,j_{\sigma(r)})$.

(ii) $\lambda\notin\Lambda_d$ のときは、次が成立:

(a) $\Pi_\ell=0$ ($\ell=1,2,\cdots,r$)，

(b) $\omega\Pi_0(\tau_1,\cdots,\tau_r) = c\,D^{r,r,\cdots,r}(\tau_1,\cdots,\tau_r;\lambda)$ となるような定数 c が存在.

(iii) $\lambda\in\Lambda_s$ の場合は

(c) $\Pi_\ell = 0 \qquad (\ell=0,1,2,\cdots,r)$

が成立する。.

Π_ℓ を J'_ℓ 上の実解析的関数とする。以下略述する主定理の証明から、$\{\Pi_\ell\}_{\ell=0,1,\cdots,r}$ に対し次の命題が証明される。

<u>命題</u> $X_0 = X'\cup\{X$ の半正則元全体$\}$ とおく。そのとき、$\{\Pi_\ell\}_{\ell=0,1,\cdots,r}$に対し、ある$\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi,H}(X_0)$ が存在して $\Pi_\ell = \Theta|_{J'_\ell}$ $(\ell=0,1,\cdots,r)$ となるための必要十分条件は

i) $\lambda\in\Lambda_d$ のときは、主定理の条件(i)

ii) $\lambda\notin\Lambda_d\cup\Lambda_s$ のときは、主定理の条件(ii)(a)(b)

iii) $\lambda\in\Lambda_s$ のときは、主定理の条件(iii)(c)

である。

<u>注意</u> ① 上の命題の中の X_0 はさらに次の式で定義される X の H 不変部分開集合 X_1で置き換えることが出来る:

$$X_1 = \{gH\in X \mid g\in G\text{で,行列}g\sigma(g)^{-1}\text{の固有値 1 の重複度が高々}\mu+2\}.$$

② 主定理の条件(i)～(iii)に於いて、$\Pi_1,\Pi_2,\cdots,\Pi_r$ に関する条件は互いに分離している。χが regular の場合も同様である(cf.[2] 主定理)。よって、(何れの場合にも)$\{\Pi_\ell\}_{\ell=0,1,\cdots,r}$に対して、

$$[\forall\ell=0,1,2,3\quad\exists\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi,H}(X_0)\quad \Pi_\ell=\Theta|_{J'_\ell}]$$
$$\Leftrightarrow[\exists\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi,H}(X_0)\quad\forall\ell=0,1,2,3\quad \Pi_\ell=\Theta|_{J'_\ell}].$$

このことは、他の半単純対称空間たとえば群多様体に比し、我々の対称空間 X の特徴的な性質のように思われる(cf.[4])。

③ 主定理より、

$$\dim\{\Theta|_{X'}\mid\Theta\in\mathcal{D}'_{\chi,H}(X)\}\leqq\begin{cases}2^r & (\lambda\in\Lambda_d\text{ のとき})\\ 1 & (\lambda\notin\Lambda_d\text{ のとき}).\end{cases}$$

§4. 主定理の証明

この節で我々は主定理の証明のスケッチを与えよう。

まず、X 上の IED Θの X' 上での挙動を考えよう。X 上の IED Θ の X'への制限は明らかに X'上の IED である。ところが、注意1.4 ② と定理2.2によりX'上の IED は explicit に決定される。このことからΘの X'上での挙動が分かる。

次に X の半単純特異点の近傍でのΘの挙動を調べる必要がある。[2] に従い、半単純特異点の集合を次のような場合に分け考えよう。

(a) 半正則な半単純元、即ち次の $(a\text{-}1)_{ij}$ $(1 \leqq i < j \leqq r)$, $(a\text{-}2)_{\ell}$ $(1 \leqq \ell \leqq r)$, $(a\text{-}3)_{\ell}$ $(1 \leqq \ell \leqq r)$ という $r(r-1)/2 + r + r$ 個の条件うち、唯一つが成立する場合

$$(a\text{-}1)_{ij} : \tau_i = \tau_j, \quad (a\text{-}2)_{\ell} : \tau_{\ell} = 0, \quad (a\text{-}3)_{\ell} : \tau_{\ell} = 1$$

(b)正則でも半正則でもない半単純元の場合

(b-1) $\tau_i = 1$ $(1 \leqq i \leqq r)$ となる i の個数が高々一つの場合

(b-2) $\tau_i = 1$ $(1 \leqq i \leqq r)$ となる i の個数が少なくとも２つ以上ある場合。

我々はこのうち (a) の場合に対しその点のまわりでのΘの様子を詳しく研究する。(b-1) の場合も [3] と同じ方法で調べることが出来、またその結果を用いれば §3の注意① の主張も証明できる。だが、(b-2) についてはその点に付随する部分対称空間 (cf.§§4.2) が階数 2 以上のコンパクトでもリーマニアンでもない半単純対称空間を含んでしまうことから困難な点が生じ、Θの挙動に関する問題はまだ解決されていない。

<u>§§4.1.</u> $\Theta \in \mathcal{D}'_{\mathcal{X},H}(X)$ に対し、$u_{\ell} = \omega\Theta|_{J'_{\ell}}$ とおく。この節の導入部で述べたように、$u = u_{\ell}$ に対しては定理 2.2 が使えるから、J'_{ℓ}の各連結成分上 u_{ℓ} は次のような形をとる事が分かる:

$$u_{\ell}(\tau_1, \cdots, \tau_r) = \sum_{\substack{j \in S \\ \nu \in \{1,2\}^r}} {}_{\ell}C^{j}_{\nu} \, D^{j}_{\nu}(\tau_1, \cdots, \tau_r; \lambda) \qquad (4.1)$$

$$({}_{\ell}C^{j}_{\nu} = C^{j_1, \cdots, j_r}_{\nu_1, \cdots, \nu_r} \in \mathbb{C})。$$

次に、$(a\text{-}1)_{ij}$ $(1 \leqq i < j \leqq r)$ が成り立つような半正則な半単純元の近傍でのΘの挙動を調べる。

<u>補題 4.1.</u> u_ℓ は $\tau_1 = \tau_3$ となる半正則な半単純元の近傍で実解析的に延長される。

この補題により (4.1) 式に於ける係数 ${}_\ell C^j_\nu$ は J'_ℓ の連結成分に依らず一定であることが分かる。

次に我々は$(a\text{-}3)_\ell$ $(1 \leqq \ell \leqq r)$ 即ち $J_{\ell-1}$ と J_ℓ の共通部分 $A_\ell = J_{\ell-1} \cap J_\ell$ に属するような半正則な半単純元の近傍でのΘの挙動を求める。

<u>補題 4.2.</u> (i) 各 $\ell = 1, \cdots, r$ に対して、$u_{\ell-1}(\tau_1, \cdots, \tau_r)$ 及び $u_\ell(\tau_1, \cdots, \tau_r)$ は $\tau_\ell = 1$ となるような半正則な半単純元の近傍でそれぞれ実解析的に延長される: 即ち、$\mathbb{1} = (1, 1, \cdots, 1)$とおく時、$\nu \neq \mathbb{1}$ ならば ${}_\ell C^j_\nu = 0$ $(\ell = 0, 1, \cdots, r)$。

(ii) ((i)により) $u_{\ell-1}$, u_ℓの定義域を自然に広げる。このとき、$\lambda \in \Lambda_s$ ならば、 $u_{\ell-1} \equiv u_\ell$ $(\ell = 1, \cdots, r)$: 即ち、$\lambda \in \Lambda_s$ ならば、

$$ {}_{\ell-1}C^j_1 = {}_\ell C^j_1 \qquad (j \in S,\ \ell = 1, \cdots, r). $$

上の補題の (i) を考慮し、以後、$\nu = \mathbb{1}$ のとき${}_\ell C^j_\nu$を単に ${}_\ell C^j$ と書く。

Θの H-不変性から、u_ℓ は $\mathfrak{S}_\ell \times \mathfrak{S}_{r-\ell}$ の作用に関して歪対称である。このことから次の補題が証明できる。

<u>補題 4.3.</u> 適当な定数 ${}_\ell C^j$ に対し次の式が成立する。

$$ u_\ell = \sum_{j \in S_\ell} {}_\ell C^j \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell \times \mathfrak{S}_{r-\ell}} \operatorname{sgn}\sigma \ D^j(\tau_{\sigma(1)}, \cdots, \tau_{\sigma(r)}; \lambda) $$

$(\ell = 0, 1, \cdots, r)$。

この補題の証明にあたっては、u_ℓ の歪対称性に基づく次の事実が用いられる。

“(補題4.2(i)より) $u_\ell(\tau_1, \cdots, \tau_r)$

$$ = \sum_{i_1, \cdots, i_r = 1, \cdots, r} {}_\ell\tilde{C}^{i_1, \cdots, i_r} F_{i_1}(\tau_1, \lambda) \cdots F_{i_r}(\tau_r, \lambda) $$

と置く。このとき、$(i_1, \cdots, i_r)$が条件:

$$ i_\alpha = i_\beta \qquad (1 \leqq {}^\exists\alpha, \beta \leqq \ell \ \text{または、}\ \ell+1 \leqq {}^\exists\alpha, \beta \leqq r) $$

を満たすならば、${}_\ell\tilde{C}^{i_1, \cdots, i_r} = 0$ ”

こうして、主定理の（i）の部分が示された（(2.1)に注意）。

最後に我々は、 $(a\text{-}2)_\ell$ $(1 \leqq \ell \leqq r)$ 即ち $\tau_\ell = 0$ となる半正則な半単純元の近傍でのΘの挙動を調べる。その結果次の補題が成立することが分かる。

<u>補題 4.4.</u> $u_\ell(\tau_1, \cdots, \tau_r)$ は $\tau_\ell = 0$ となるような半正則な半単純元の近傍で実解析的に延長される。

この補題と補題 4.2(i) とから超幾何関数の接続公式より、

(4.2) $\lambda \notin \Lambda_d$ ならば, ${}_\ell C^j = 0$ $(j \in S,\ \ell = 1, \cdots, r)$

が確かめられる。こうして主定理（ii）を証明することができる。また、（[2]の補題 4.2.4 の証明と同様にして、）(4.2) と補題 4.2（ii）から主定理の（iii）が次のように確かめられる: $\lambda \in \Lambda_s$, $j \in S$ とする.まず補題4.2(ii)より ${}_0C^j = {}_1C^j$. $\Lambda_d \cap \Lambda_s = \phi$ より $\lambda \notin \Lambda_d$ だから (4.2)から ${}_\ell C^j = 0$ $(\ell = 1, \cdots, r)$. よって ${}_\ell C^j = 0$ $(\ell = 0, 1, \cdots, r)$.

<u>§§4.2</u>. 以下我々は補題 4.1、4.2、4.4 の証明の概略を与える。まずその為に必要な定義を簡単に復習しておく。

$P(\tau_1, \cdots, \tau_r)$ を変数$\tau_1, \cdots, \tau_r$を含むある命題とするとき、

(4.3) $J_\ell(P(\tau_1, \cdots, \tau_r))$

$= \{ j \in J_\ell \mid j$ のτ-変数に対し、$P(\tau_1, \cdots, \tau_r)$が成立する$\}$

と置く。A を 半単純元からなる X の部分集合とする。 $A = J_\ell(\tau_i = \tau_j)$ （但し、$1 \leqq i < j \leqq \ell$ 又は、$\ell+1 \leqq i < j \leqq r$）、$J_\ell(\tau_\ell = 0)$ 又は $J_\ell(\tau_\ell = 1)$ のとき、

(4.4) $X_A = Z_G(A) / Z_H(A)$

と置くと（cf. [2] (4.3.2)～(4.3.3)）、X_A は自然に X の部分対称空間とみなせる。A の中心化群から生じるこの部分対称空間を、<u>A に付随する(部分)対称空間</u>と呼ぶ。このとき、$A' = \{ j \in A \mid Z_G(\{j\}) = Z_G(A) \}$ とおけば、$A - A'$ は A の次元が下がった閉集合になる。

さて、$X = G/H$ を一般の対称空間とし、j を X のあるカルタン部分空間に属する正則元とする。このとき、$f \in C_c^\infty(X)$に対し

$$(4.5)\qquad F_f(j) = \int_{H/Z_H(\{j\})} f(h.j)d\tilde{h}$$

を f の<u>不変積分</u>と呼ぶ。ここに、$\tilde{h}$ は h の属する $Z_H(\{j\})$ 剰余類を表す。（$H/Z_H(\{j\})$上の不変測度は、ある方法で正規化されたものを採用する。）特に、我々の考えている対称空間 $X = G/H$ に対しては、j に対応する τ-変数を$(\tau_1,\cdots,\tau_r)$とするとき、

$$(4.6)\qquad M_f(\tau_1,\cdots,\tau_r) = \omega(1-\tau_1)^{\mu}\cdots(1-\tau_r)^{\mu}F_f(j)$$

$$(f\in C_c^{\infty}(X))$$

と置き、これもまた f の不変積分と呼ぶ。

以上の記号の準備の下に、補題 4.1, 4.2, 4.4 が次のような手順で証明される。

① $A = J_\ell(\tau_i=\tau_j)$ （但し、$1\leqq i<j\leqq \ell$ 又は、$\ell+1\leqq i<j\leqq r$）、$J_\ell(\tau_\ell=0)$ 又は $J_\ell(\tau_\ell=1)$ のとき、X_A が具体的にどんな対称空間となるか調べる。

② 不変積分 M_f $(f\in C_c^{\infty}(X))$ の A' に属する点 j のまわりでの漸近展開を X_A の不変積分に帰着させる方法で求める。

③ 不変積分の形から、$X-X'$ に台が含まれる $j\in A'$の近傍上の H-不変超関数にはどのようなものがあるかを確定し、それらに対する不変微分作用素の作用の仕方を調べる。

④ X'上の不変固有関数Πを次のようにして X_0 上の H-不変超関数 $\Pi^{\sim}$ に延長する：$f\in C_c^{\infty}(X_0)$ に対し、

$$\langle \Pi^{\sim}, f\rangle$$

$$= \sum_{\ell=0}^{r} \#(W(J_\ell))^{-1}\ \mathrm{p.f.}\int_{J_\ell} \omega\,\Pi(\tau_1,\cdots,\tau_r)M_f(\tau_1,\cdots,\tau_r)d\tau_1\cdots d\tau_r$$

此処に、$\mathrm{p.f.}\int_{J_\ell}\omega\,\Pi(\tau_1,\cdots,\tau_r)M_f(\tau_1,\cdots,\tau_r)d\tau_1\cdots d\tau_r$ は発散積分の（座標系$(\tau_1,\cdots,\tau_r)$ に関する）有限部分を表す。

⑤ $\Pi^{\sim}$ に対する不変微分作用素の作用の仕方を部分積分を行い計算する。

⑥ ③と⑤の結果を照らし合せることにより、$\mathrm{supp}\ S \subseteq X-X'$ で且つ $\Pi^{\sim}+S\in \mathcal{D}_{\chi,H}(X_0)$となるような X_0 上の H-不変超関数 S が存在する為の、Πに対する必要十分条件を求める。

この方針は infinitesimal character χ が regular な場合を扱っている [2] のときと全く同様である。さらに ①～③についてはχとは無関係な問題であり、[2] で述べた事が（証明も込めて）そのまま成立する（①に関しては [2] 表 4-3、②に関しては [2] 補題 4.3.2 を参照）。ところが ④～⑥の証明にあたり、我々は 不変積分と$u_\ell = \omega\,\Theta|_{J_\ell}$ の具体的記述に基づいて議論を進めるという立場をとっているが、$u_\ell = \omega\,\Theta|_{J_\ell}$ の具体的表示は、χが regular か singular かに従い、少なくとも見かけ上かなり異なっている（[2] 補題 4.1 と本稿定理 2.2 とを比較せよ。）。そのため④～⑥に関し我々は [2] とは別に改めて議論を吟味し直さなければならない。そのとき、定理 2.2はそのような議論の出発点となるものである。（なお、特に④において (4.1) 式及び [2] 補題 4.3.2 からその積分の有限部分が具体的に定義できることに注意する。）

§5. X の階数が 3 (r = 3) の場合

$\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi,H}(X)$ とし、$\Pi_\ell = \Theta|_{J_\ell}$ ($\ell = 0,1,\cdots,r$) とおく。この節で、我々は X = G/H の階数が 3 (即ち r = 3) の場合にΠ_ℓ ($\ell = 0,1,2,3$) を具体的に書き下そう。

まず、階数が 3 の場合、infinitesimal character χは次の 3 つのタイプに分かれることに注意しておく:

①χが regular な場合: $\chi = \chi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}$ ($i \neq j$ ならば、$\lambda_i \neq \lambda_j$) [Case 1]。

②χが singular な場合

(a) $\chi = \chi_{\lambda,\lambda,\lambda'}$ ($\lambda \neq \lambda'$) の場合 [Case 2]

(b) χが most singular な場合: $\chi = \chi_{\lambda,\lambda,\lambda}$ [Case 3]

以下の表の [Case 2] の部分は、χが singular だが most singular でない場合に属する結果のうち最も簡単な例となっている。一方、表中の [Case 1] の部分は [2] の主定理、[Case 3] の部分は本稿の主定理を、それぞれ r = 3 の場合に書き下したものである。

なお、表中に現れる関数 F_1 及び集合 Λ_d, Λ_s はそれぞれ§2, §3 の冒頭部分に於いて定義されたものである。その他の記号については§1 を参照せよ。

【表1】

[Case 1] $\chi=\chi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}$ ($i\neq j$ ならば、$\lambda_i\neq\lambda_j$) の場合

(i) ある ${}_{\ell}C$, ${}_{\ell}C_k\in\mathbf{C}$ に対して、

$$0)\quad \omega\Pi_0(\tau_1,\tau_2,\tau_3)={}_0C\begin{vmatrix}F_1(\tau_1,\lambda_1) & F_1(\tau_2,\lambda_1) & F_1(\tau_3,\lambda_1)\\ F_1(\tau_1,\lambda_2) & F_1(\tau_2,\lambda_2) & F_1(\tau_3,\lambda_2)\\ F_1(\tau_1,\lambda_3) & F_1(\tau_2,\lambda_3) & F_1(\tau_3,\lambda_3)\end{vmatrix}$$

$$1)\quad \omega\Pi_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3)={}_1C_1\ F_1(\tau_1,\lambda_1)\begin{vmatrix}F_1(\tau_2,\lambda_2) & F_1(\tau_3,\lambda_2)\\ F_1(\tau_2,\lambda_3) & F_1(\tau_3,\lambda_3)\end{vmatrix}$$

$$+{}_1C_2\ F_1(\tau_1,\lambda_2)\begin{vmatrix}F_1(\tau_2,\lambda_1) & F_1(\tau_3,\lambda_1)\\ F_1(\tau_2,\lambda_3) & F_1(\tau_3,\lambda_3)\end{vmatrix}$$

$$+{}_1C_3\ F_1(\tau_1,\lambda_3)\begin{vmatrix}F_1(\tau_2,\lambda_1) & F_1(\tau_3,\lambda_1)\\ F_1(\tau_2,\lambda_2) & F_1(\tau_3,\lambda_2)\end{vmatrix}$$

$$2)\quad \omega\Pi_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3)={}_2C_1\begin{vmatrix}F_1(\tau_1,\lambda_2) & F_1(\tau_2,\lambda_2)\\ F_1(\tau_1,\lambda_3) & F_1(\tau_2,\lambda_3)\end{vmatrix}F_1(\tau_3,\lambda_1)$$

$$+{}_2C_2\begin{vmatrix}F_1(\tau_1,\lambda_1) & F_1(\tau_2,\lambda_1)\\ F_1(\tau_1,\lambda_3) & F_1(\tau_2,\lambda_3)\end{vmatrix}F_1(\tau_3,\lambda_2)$$

$$+{}_2C_3\begin{vmatrix}F_1(\tau_1,\lambda_1) & F_1(\tau_2,\lambda_1)\\ F_1(\tau_1,\lambda_2) & F_1(\tau_2,\lambda_2)\end{vmatrix}F_1(\tau_3,\lambda_3)$$

$$3)\quad \omega\Pi_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = {}_3C\begin{vmatrix} F_1(\tau_1,\lambda_1) & F_1(\tau_2,\lambda_1) & F_1(\tau_3,\lambda_1) \\ F_1(\tau_1,\lambda_2) & F_1(\tau_2,\lambda_2) & F_1(\tau_3,\lambda_2) \\ F_1(\tau_1,\lambda_3) & F_1(\tau_2,\lambda_3) & F_1(\tau_3,\lambda_3) \end{vmatrix}$$

(ii) $\lambda_k \notin \Lambda_d$ のとき,

$$\begin{cases} {}_1C_k = 0 \\ {}_2C_j = 0 \qquad [\, j \neq k \ (1 \leqq j \leqq 3)\,] \\ {}_3C = 0 \end{cases}$$

(iii) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \cap \Lambda_s \neq \phi$ のとき,

$$\omega\Pi_\ell \equiv 0 \qquad (0 \leqq \ell \leqq 3)\ .$$

[Case 2] $\chi = \chi_{\lambda,\lambda,\lambda'}$ $(\lambda \neq \lambda')$ の場合.

(i) ある ${}_\ell C, {}_\ell C', {}_\ell C'' \in \mathbb{C}$ に対し、

$$0)\quad \omega\Pi_0(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = {}_0C\begin{vmatrix} F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda') & F_1(\tau_2,\lambda') & F_1(\tau_3,\lambda') \end{vmatrix}$$

$$1)\quad \omega\Pi_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = {}_1C\begin{vmatrix} F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda') & F_1(\tau_2,\lambda') & F_1(\tau_3,\lambda') \end{vmatrix}$$

$$+{}_1C'\ F_1(\tau_1,\lambda)\begin{vmatrix} F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_2,\lambda') & F_1(\tau_3,\lambda') \end{vmatrix}$$

$$+{}_1C''\ F_1(\tau_1,\lambda')\begin{vmatrix} F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$2)\quad \omega\Pi_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = {}_2C\begin{vmatrix} F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda') & F_1(\tau_2,\lambda') & F_1(\tau_3,\lambda') \end{vmatrix}$$

$$+{}_2C'\begin{vmatrix} F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) \end{vmatrix} F_1(\tau_3,\lambda')$$

$$+{}_2C''\begin{vmatrix} F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda') & F_1(\tau_2,\lambda') \end{vmatrix} F_1(\tau_3,\lambda)$$

$$3)\quad \omega\Pi_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = {}_3C\begin{vmatrix} F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda') & F_1(\tau_2,\lambda') & F_1(\tau_3,\lambda') \end{vmatrix}$$

(ii)-1° $\lambda \notin \Lambda_d$ のとき,

$$\begin{cases} {}_1C = {}_1C' = 0 \\ {}_2C = {}_2C' = {}_2C'' = 0 \\ {}_3C = 0 \end{cases}$$

(ii)-2° $\lambda' \notin \Lambda_d$ のとき,

$$\begin{cases} {}_1C + {}_1C'' = 0 \\ {}_2C = {}_2C'' = 0 \\ {}_3C = 0 \end{cases}$$

(iii) $\{\lambda,\lambda'\} \cap \Lambda_s \neq \phi$ のとき,

$$\omega\Pi_\ell \equiv 0 \qquad (0 \leqq \ell \leqq 3).$$

[Case 3] $\chi = \chi_{\lambda,\lambda,\lambda}$ の場合

(i) ある ${}_\ell C, {}_\ell C', {}_\ell C'' \in \mathbb{C}$ に対し,

$$0)\quad \omega\Pi_0(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = {}_0C\begin{vmatrix} F_3(\tau_1,\lambda) & F_3(\tau_2,\lambda) & F_3(\tau_3,\lambda) \\ F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$1)\quad \omega\Pi_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = {}_1C\begin{vmatrix} F_3(\tau_1,\lambda) & F_3(\tau_2,\lambda) & F_3(\tau_3,\lambda) \\ F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$+{}_1C'\begin{vmatrix} F_2(\tau_1,\lambda) & F_3(\tau_2,\lambda) & F_3(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ 0 & F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$+{}_1C''\begin{vmatrix} F_1(\tau_1,\lambda) & F_3(\tau_2,\lambda) & F_3(\tau_3,\lambda) \\ 0 & F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ 0 & F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$2)\quad \omega\Pi_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = {}_2C\begin{vmatrix} F_3(\tau_1,\lambda) & F_3(\tau_2,\lambda) & F_3(\tau_3,\lambda) \\ F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$+{}_2C'\left\{\begin{vmatrix} F_3(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_3(\tau_3,\lambda) \\ F_2(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & 0 & F_1(\tau_3,\lambda) \end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix} F_2(\tau_1,\lambda) & F_3(\tau_2,\lambda) & F_3(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ 0 & F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \end{vmatrix}\right\}$$

$$+\ {}_2C'' \begin{vmatrix} F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_3(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ 0 & 0 & F_1(\tau_3,\lambda) \end{vmatrix}$$

3) $$\omega\Pi_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = {}_3C \begin{vmatrix} F_3(\tau_1,\lambda) & F_3(\tau_2,\lambda) & F_3(\tau_3,\lambda) \\ F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \end{vmatrix}$$

(ii) $\lambda \notin \Lambda_d$ のとき，

1) $\Pi_\ell \equiv 0 \qquad (1 \leqq \ell \leqq 3)$

2) $$\omega\Pi_0(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = c \begin{vmatrix} F_3(\tau_1,\lambda) & F_3(\tau_2,\lambda) & F_3(\tau_3,\lambda) \\ F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \end{vmatrix}$$

$(c \in \mathbb{C})$

(iii) $\lambda \in \Lambda_s$ のとき，

$\Pi_\ell \equiv 0 \quad (0 \leqq \ell \leqq 3)$,

［註］ (i)の2)式は

$$\omega\Pi_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = {}_2C \begin{vmatrix} F_3(\tau_1,\lambda) & F_3(\tau_2,\lambda) & F_3(\tau_3,\lambda) \\ F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$-\ {}_2C' \begin{vmatrix} F_3(\tau_1,\lambda) & F_3(\tau_2,\lambda) & F_2(\tau_3,\lambda) \\ F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & 0 \end{vmatrix}$$

$$+\ {}_2C''\begin{vmatrix} F_3(\tau_1,\lambda) & F_3(\tau_2,\lambda) & F_1(\tau_3,\lambda) \\ F_2(\tau_1,\lambda) & F_2(\tau_2,\lambda) & 0 \\ F_1(\tau_1,\lambda) & F_1(\tau_2,\lambda) & 0 \end{vmatrix}.$$

という簡単な表示に書き改めることが出来る。

<u>注意</u>. Π_ℓを J'_ℓ上実解析的な関数とし、それらの組 $\{\Pi_\ell\}_{\ell=0,1,2,3}$ 考える。この時（§3 の命題と主定理の関係と同様に）、ある$\Theta \in \mathcal{D}'_{\chi,H}(X_0)$ が存在して $\Theta|_{J'_\ell} = \Pi_\ell$ （$\ell = 0,1,2,3$）となるためには $\{\Pi_\ell\}_{\ell=0,1,2,3}$ が上の表のような形で表されることが必要十分である。［cf.［2］§3 注意（iii）］.

References

［1］ Aoki, S. and Kato, S.: U(4,2)/（U(2)×U(2,2)）上の不変固有超関数の接続公式について，数理研講究録 598 (1986), 1-77.

［2］ Aoki, S. and Kato, S.: U(p,q)/（U(r)×U(p-r,q)）上の不変固有超関数の接続公式について，数理研講究録 712 (1990), 93-111.

［3］ Aoki, S. and Kato, S.: U(p,q)/{U(r)×U(p-r,q)} に於ける不変固有超関数の拡張可能性について，拓殖大学研究年報 20 号 工学系 (1990), 63-69.

［4］ Hirai, T.: Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups, II, Japan. J. Math. New Series, 2 (1976), 27-89.