

Kirillov-Kostant theory と
コアジョイントオービット上の
Feynman path integrals

広大理	橋本	隆司	(Takashi Hashimoto)
広大理	小椋	一徳	(Kazunori Ogura)
広大理	岡本	清郷	(Kiyosato Okamoto)
広大理	澤江	隆一	(Ryuichi Sawae)
広大理	安永	尚隼	(Hisatoshi Yasunaga)

§0. Alekseev, Faddeev, Shatashvili によるコンパクトリー群の既約表現の構成法に従って、ノンコンパクトリー群のコアジョイントオービット上の Feynman path integral を計算した。しかし、一般のリー群に対する統一された方法を見出すことはまだ出来ていない。そこで Heisenberg group Affine transformation group, $SL(2, \mathbb{R})$ についての結果を述べることにする。

§ 1. Kirillov-Kostant theory

G をリ一群とし、 \mathfrak{g} をそれに対するリ環、 Ad を \mathfrak{g} 上の adjoint action とし、 \mathfrak{g} の相対空間 \mathfrak{g}^* 上の coadjoint action を Ad' で表す。

任意の $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ に対し、 λ に対する isotropy subgroup を、
 $G_\lambda = \{g \in G, Ad'_{(g)} \lambda = \lambda\}$ とし、そのリ環を \mathfrak{g}_λ とする。

今 λ は integral とする。

既ち、 $\mathfrak{g}_\lambda \ni X \longmapsto -\sqrt{\hbar} \lambda(X) \in \hbar \mathbb{R}$ は
 $G_\lambda \xrightarrow{\pi_\lambda} U(1)$ にリフトする。

この時

$$\begin{array}{ccc}
 \lambda \cdot d\lambda & & L_\lambda \text{ associated line bundle} \\
 \uparrow & & \nearrow \\
 W_\lambda & \begin{array}{ccc} G & & U(1) \\ \downarrow G_\lambda & \xrightarrow{\pi_\lambda} & \\ G/G_\lambda & & \end{array} &
 \end{array}$$

Symplectic form.

又、 $g \in G, f \in L^2(L_\lambda, \Lambda^{\frac{1}{2}} W_\lambda)$ 、 $d = \dim G/G_\lambda$ に対し、 G の表現 π_λ を、

$$(\pi_\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$$

で定義する。

Real polarization P をとる。

$$\sigma_{\lambda} \subset P \subset \sigma_{\bar{\lambda}}$$

$$\lambda([P, P]) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda: P \ni X \longmapsto -\hbar\lambda(X) \in \hbar\mathbb{R} : \text{lie alg. homo.}$$

λ は キャラクター π_{λ} にリフトするとする。

$$P \xrightarrow{\pi_{\lambda}} U(1)$$

$$\pi_{\lambda} \Rightarrow \pi_{\lambda}\pi_P (= \xi_{\lambda})$$

π_P は、 P の キャラクター であって、 π_P の associated line bundle が、 G/P の volume bundle の絶対値の平方根となるものとする。

この時、

$$\begin{array}{ccc} G & & L\xi_{\lambda} \\ \downarrow P & \searrow & \downarrow \\ G/P & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} G & & L\xi_{\lambda} \\ \downarrow P_0 & \searrow \xi_{\lambda}/P_0 & \downarrow \\ G/P_0 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^* \end{array} \right)$$

一般には、complex polarization
 $\sigma_{\lambda}^{\mathbb{C}} \subset P \subset \sigma_{\bar{\lambda}}^{\mathbb{C}}$
 を考えなければならぬ。

§ 2. Examples

(i) Heisenberg group

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{とし、リ-環を}$$

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ & 0 & y \\ & & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{又、相対空間 } \mathfrak{g}^* \text{ を}$$

$$\mathfrak{g}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ \xi & 0 & \\ \sigma & \eta & 0 \end{pmatrix} \mid \xi, \eta, \sigma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \ni (X, \lambda) \longmapsto \text{to } X\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{とする。}$$

この時、任意の nontrivial coadjoint orbit は

$$\mathfrak{g}^* \ni \lambda_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & 0 & \\ \sigma & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{for } \exists \sigma \neq 0$$

と表される。 λ_σ に対する isotropy subgroup は、

$$G_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{リ-環は、}$$

$$\mathfrak{g}_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{となる。}$$

Real polarization を

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{ととる。}$$

これに対する analytic subgroup P は、

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

となる。

すると Lie alg. homo.

$$P \ni \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \longmapsto -\sqrt{-1}xz \in \mathbb{R} \text{ は}$$

キャラクター

$$\chi_\lambda: P \ni \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} \longmapsto e^{-\sqrt{-1}xz} \in U(1)$$

によりトする。

この時、path integral は、

$$(\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\lambda = 2)$$

$\forall X, \forall \bar{X} \in \mathfrak{g}$, s.t. $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{p}$. $\mathfrak{p} = \mathbb{R}\bar{X} \oplus \mathfrak{g}_\lambda$ に対し

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (\lambda_0 \dots \lambda_{N-1}, y_0 \dots y_{N-1})} \frac{\prod_{k=0}^{N-1} d\langle \text{Ad}^*(e^{y_k \bar{X}}) \lambda, g_k^{-1} dg_k \rangle}{2\pi}$$

$$e^{-\sqrt{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{(k+1)/N} dt \langle \text{Ad}^*(e^{y_k \bar{X}}) \lambda, g^{-1}(t) \frac{dg(t)}{dt} - \text{Ad}(g^{-1}(t)) Y \rangle} F(g_0)$$

となる。

$$= (\pi(e^{TY})F)(g^1)$$

$$g(t) = e^{(\lambda_k + \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{T_N} (t - \frac{k}{N}T))X} e^{P + (P' - P)\frac{t}{T}} \quad t \in [\frac{k}{N}T, \frac{k+1}{N}T)$$

$$g_0 = e^{\lambda_0 X} e^P, \quad g' = e^{\lambda' X} e^{P'} \quad P, P' \in \mathcal{P}, \lambda_N = \lambda'$$

$$\begin{aligned} g_k &= g\left(\frac{k}{N}T\right) \\ &= e^{\lambda_k X} e^{P + (P' - P)\frac{k}{N}} \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{と } \bar{X} \text{ と } \cdot$$

$$(\eta = \mathbb{R}X, \quad \bar{\eta} = \mathbb{R}\bar{X})$$

$$\mathcal{G} = \eta \oplus \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} = \bar{\eta} \oplus \mathcal{G}_\lambda$$

$$\begin{array}{ccc} \eta \xrightarrow{\text{exp}} N & \longrightarrow & \mathcal{G}/\mathcal{P} \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ \eta & \longrightarrow & \eta/\mathcal{P} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \bar{\eta} \xrightarrow{\text{exp}} \bar{N} & \longrightarrow & \mathcal{P}/\mathcal{G}_\lambda \\ \downarrow \bar{\psi} & & \downarrow \bar{\psi} \\ \bar{\eta} & \longrightarrow & \bar{\eta}/\mathcal{G}_\lambda \end{array}$$

onto $\bar{\eta}$ と $\bar{\psi}$ と \cdot

$$\mathcal{G}/\mathcal{P} \ni e^{xX} \mathcal{P} \longmapsto x \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{P}/\mathcal{G}_\lambda \ni e^{y\bar{X}} \mathcal{G}_\lambda \longmapsto y \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{G}/\mathcal{G}_\lambda \ni e^{xX} e^{y\bar{X}} \mathcal{G}_\lambda \longmapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{global coordinate}$$

この時 action を.

$$\forall Y \in \mathfrak{g}$$

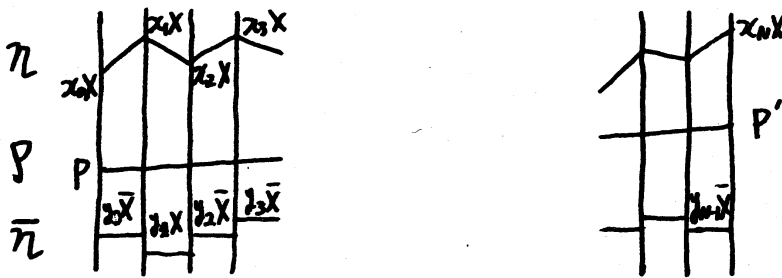
$$\forall \gamma: [0, T] \longrightarrow \pi \oplus \mathcal{P} \oplus \bar{\pi}$$

$$t \longmapsto (x(t)X, p(t), y(t)\bar{X}) \quad \text{に対し.}$$

$$\text{action}_Y(\gamma) = \int_0^T \langle \text{Ad}^*(e^{y(t)\bar{X}})\lambda, g^{-1} \frac{dg}{dt} - \text{Ad}(g^{-1})Y \rangle dt$$

$$g = g(t) = e^{x(t)X} e^{p(t)} \quad \text{で定義する.}$$

Path は下の様にとる.



$$t \quad 0 \quad \frac{1}{N} \quad \frac{2}{N} \quad \frac{3}{N} \quad \dots \quad \frac{N-1}{N} \quad T$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 & u(t) & v(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とすると.}$$

$$\text{Action}_Y(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$$

$$= \int_0^T \sigma(\dot{v} - u\dot{x} - y\dot{x}) - \sigma(ax + c - bu - by) dt$$

上の Path に対し

$$\text{Action}_Y(x_0 \dots x_N, y_0 \dots y_{N-1}, u, v, u', v')$$

$$= \sum_{k=1}^N \int_{\frac{k-1}{N}T}^{\frac{k}{N}T} \sigma \left(\frac{v' - v}{T} - (u + (u' - u) \frac{t}{T}) \frac{x_k - x_{k-1}}{T/N} - y_{k-1} \frac{x_k - x_{k-1}}{T/N} \right)$$

$$= \sigma \left(a(x_{k-1} + \frac{x_k - x_{k-1}}{T/N} (t - \frac{k-1}{N}T)) + c - b(u + (u' - u) \frac{t}{T}) - by_{k-1} \right) dt$$

$$\text{但し } u(0) = u, \quad u(T) = u'$$

$$v(0) = v, \quad v(T) = v' \quad \text{である。}$$

又 χ ジャー - は

$$\prod_{k=0}^{N-1} \frac{d \langle \text{Ad}'(e^{y_k X}) \lambda, g_k^{-1} dg_k \rangle}{2\pi}, \quad (g_k = e^{\lambda_k X} e^{P + (P'-P) \frac{k}{N}})$$

$$= \prod_{k=0}^{N-1} \left(\sigma d\lambda_k \frac{dy_k}{2\pi} \right) = dx_0 \cdot \left(\prod_{k=1}^{N-1} d\lambda_k \prod_{k=0}^{N-1} \frac{\sigma dy_k}{2\pi} \right)$$

ととる。

パスインテグラルは。

$$g' = e^{x' X} e^{P'} \quad P' = \begin{pmatrix} 0 & u' & v' \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = e^{x X} e^P \quad P = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とすると。}$$

$$\Gamma(L_{\lambda}^* \otimes L_{\lambda})$$

Ψ

$$K_Y(g', g) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{N-1} d\lambda_k \prod_{k=1}^{N-1} \frac{\sigma dy_k}{2\pi} e^{-F_{\text{action}}(\lambda_0 \cdots \lambda_N, y_0 \cdots y_{N-1}, u, v, u', v')}$$

$$(x' = \lambda_N, x = \lambda_0)$$

$$= e^{-F_{\text{is}}(v'-v)} \delta(x' - x - bT) e^{-F_{\text{is}}(axT + \frac{a^2}{2}T^2 + cT)}$$

$\delta \rightarrow \tau$

$$(\pi_{\lambda}^P(e^{\tau Y}) F)(g) = \int_{-\infty}^{\infty} K_Y(g', g) F(g) dx$$

を得る。

以上のことは

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n & z \\ & & & & y_1 \\ & & & & \vdots \\ & & & & y_n \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ y_1 \cdots y_n \\ z \end{matrix} \in \mathbb{R} \right\}$$

および

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{の場合に拡張できる。}$$

(ii) Affine transformation group of real line

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G^* = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \mid \xi, \sigma \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{とする。}$$

この時 $\lambda_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \in G^*$, $\sigma = \pm 1$ に対し、

$$G_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad G_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

又 polarization を

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} \text{ とし、}$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \text{ とする。}$$

$$\xi_\lambda: P \ni \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto e^{-\sqrt{|\lambda|} \sigma y} \in U(1)$$

π_λ^P : representation of G

この時パスインテグラルは、

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とすると.}$$

$$\text{action}_Y(\gamma) = \int_{\gamma} \langle \text{Ad}^*(e^{y(t)X}) \lambda, g(t)^{-1} \frac{dg(t)}{dt} - \text{Ad}(g^{-1}(t)) Y \rangle dt$$

$$g(t) = \exp \begin{pmatrix} x(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & u(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^T \sigma((y(t)+u(t)) \dot{x}(t) + \dot{u}(t)) - \sigma a(y(t)+u(t)) - \sigma b e^{-x(t)} dt$$

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{となる.}$$

$$y(t) = y_{k-1}$$

$$x(t) = x_{k-1} + \frac{x_k - x_{k-1}}{\frac{T}{N}} \left(t - \frac{k-1}{N} T \right) \quad t \in \left[\frac{k-1}{N} T, \frac{k}{N} T \right], k=1, \dots, N$$

$$u(t) = u + (u' - u) \frac{t}{T}$$

とすると、

$$K_Y(g', g)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \frac{\sigma dx_0}{2\pi} \dots \frac{\sigma dx_{N-1}}{2\pi} e^{i \text{action}_Y(\gamma)}$$

$$g' = \exp \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & u' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \exp \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x' = x_N, x = x_0 \quad \text{とすると.}$$

$$= e^{\sigma f_1(u'-u)} e^{f_1 \sigma \frac{1}{2}} e^{-x'(1-e^{aT})} \delta(x' - x - aT)$$

よ、 z

$$\int K_Y(x', y) F(x) dx = (\pi_\lambda^P(e^{T_Y}) F)(y')$$

を得る。

(iii) $SL(2, \mathbb{R})$

$$G = SL(2, \mathbb{R})$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$$

$$\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$$

$$\lambda_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & \\ & -\sigma \end{pmatrix}, \quad \sigma \neq 0 \text{ に対し.}$$

$$G_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} z \in \mathbb{R} \\ z \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{とする。}$$

Polarization \mathfrak{k}

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{とする。}$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ y & z^{-1} \end{pmatrix} \mid z, y \in \mathbb{R}, z \neq 0 \right\}$$

$$\mathfrak{p}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ y & z^{-1} \end{pmatrix} \mid z, y \in \mathbb{R}, z > 0 \right\} \quad \text{とする。}$$

$$\xi_{\lambda_0} : P_0 \ni \begin{pmatrix} z & 0 \\ y & z^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto z^{-F_{15}-1} \in \mathbb{C}^*$$

$$\begin{array}{ccc} G & & L_{\lambda} \\ \downarrow P_0 & \xrightarrow{\xi_{\lambda_0}} & \mathbb{C}^* \\ G/P_0 & & \end{array}$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{p}$ とすると.

$$\begin{array}{c} \mathfrak{n} \\ \downarrow \text{exp} \\ N \ni \mathfrak{n} \\ \downarrow \\ G/P_0 \ni \mathfrak{n}P_0 \end{array}$$

これは onto ではない。 $\chi = z$ 。

$\mathfrak{n} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として、カバリングをとる。

$$h_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$G/P_0 = \bigcup_{i=0}^3 h_i N P_0 \quad (G/P_0 \supset_{\text{open}} U_i \quad i=0, \dots, 3, U_i = h_i N P_0)$$

$$(G \supset_{\text{open}} V_i = U_i P_0)$$

$$G/P_0 = \overline{U_0 \cup U_2} = \overline{U_1 \cup U_3}$$

$Y_1 = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$ とする。その時、

$K_{Y_1}(g, g)$ を求める。

$\forall t \in [0, T]$ に於て、

$$e^{-tY_1} V_0 \subset V_0$$

$$e^{-tY_1} V_2 \subset V_2$$

$$V_0 \cap V_2 = \phi$$

$$G = \overline{V_0 \cup V_2}$$

$$K_{Y_1}(g, g)|_{V_0 \times V_2} = 0$$

$$K_{Y_1}(g, g)|_{V_2 \times V_0} = 0$$

$K_{Y_1}(g, g)|_{V_i \times V_i}$ ($i=0,2$) の値を求める。

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\text{action}_{Y_1}(r) = \int_{\mathcal{G}} \langle \text{Ad}'(e^{Y_1(t)} \bar{X}) \lambda, g(t)^{-1} \frac{dg(t)}{dt} - \text{Ad}(g(t)^{-1}) Y_1 \rangle dt$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & \pm 1 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & x(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} u(t) & 0 \\ v(t) & -u(t) \end{pmatrix} \text{ とすると、}$$

\nearrow
 h_0, h_2

$$V_0 \longleftrightarrow +1$$

$$V_2 \longleftrightarrow -1$$

action $_{\gamma_i}(\gamma)$

$$= \int_0^T \frac{\sigma}{2} \left(v \frac{1 - e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u} \right) \dot{x} - \frac{\sigma}{2} (2a + 2ax \left(v \frac{1 - e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u} \right)) dt + \sigma \dot{u}$$

$$y = y(t) = y_{k-1}$$

$$x = x(t) = x_{k-1} + \frac{x_k - x_{k-1}}{\frac{T}{N}} \left(t - \frac{k-1}{N} T \right)$$

$$u = u(t) = u + (u' - u) \frac{t}{T}$$

$$v = v(t) = v + (v' - v) \frac{t}{T} \quad t \in \left[\frac{k-1}{N} T, \frac{k}{N} T \right), k=1, \dots, N$$

∴ ∴ ∴ ∴ .

$$K_{\gamma_i}(\mathfrak{g}', \mathfrak{g}) V_i \times V_i \quad i = 0, 2$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \frac{\sigma dx_0}{2\pi} \dots \frac{\sigma dx_{N-1}}{2\pi} e^{\sqrt{1} \text{action}_{\gamma_i}(\gamma)}$$

$$\mathfrak{g}' = h_i \exp \begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} u' & 0 \\ v' & -u' \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{g} = h_i \exp \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & -u \end{pmatrix}$$

$$= e^{\sqrt{1} \sigma u' + u'} e^{-\sqrt{1} \sigma u - u} e^{-\sqrt{1} \sigma a T + a T} \delta(x' - e^{2aT} x)$$

∴ ∴ .

$$\int_{\mathbb{R} \cup \mathbb{R}} K_{\gamma_i}(\mathfrak{g}', \mathfrak{g}) F(\mathfrak{g}) dx = (\pi \lambda^p (e^{\sqrt{1} \gamma_i}) F)(\mathfrak{g}')$$

を得る。

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

$$\forall t \in [0, T] \text{ に対し, } e^{-tY_2} V_i \subset V_i \quad i=0, 2$$

$$K_{Y_2}(g', g) \Big|_{V_0 \times V_2} = 0$$

$$K_{Y_2}(g', g) \Big|_{V_2 \times V_0} = 0$$

$$K_{Y_2}(g', g) \Big|_{V_i \times V_i} \quad (i=0, 2) \text{ の値を求める。}$$

action $\gamma_2(\gamma)$

$$= \int_{\gamma} \langle \text{Ad}^*(e^{y(t)\bar{x}}) \lambda, g^{-1}(t) \frac{dg(t)}{dt} - \text{Ad}(g^{-1}(t)) Y_2 \rangle dt$$

$$g(t) = h_i \exp \begin{pmatrix} 0 & x(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} u(t) & 0 \\ v(t) & -u(t) \end{pmatrix} \quad \text{と置く。}$$

$$= \int_0^T \frac{\sigma}{2} \left(v \frac{1-e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u} \right) \dot{x} - \frac{\sigma}{2} b \left(v \frac{1-e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u} \right) dt + \sigma u$$

よって

$$K_{Y_2}(g', g) \Big|_{V_i \times V_i} \quad i=0, 2.$$

$$= e^{F_1 \sigma u' + u'} e^{-F_1 \sigma u - u} \delta(x' - x - bT)$$

となり。

$$\int_{\text{RUR}} K_{Y_2}(g', g) F(g) dx = (\pi_{\lambda}^p(e^{TY_2}) F)(g')$$

を得る。

$Y_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ の時

$\forall t \in [0, T]$ に対し.

$$e^{-tY_3} v_i \subset v_i \quad i=1,3$$

$$K_{Y_3}(g', g) |_{v_1 \times v_3} = 0$$

$$K_{Y_3}(g', g) |_{v_3 \times v_1} = 0$$

$$K_{Y_3}(g', g) |_{v_i \times v_i} \quad i=1,3 \text{ の値を求めろ。}$$

action $_{Y_3}(g)$

$$= \int_0^T \frac{\sigma}{2} \left(v \frac{1-e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u} \right) \dot{x} + \frac{\sigma}{2} c \left(v \frac{1-e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u} \right) + \sigma \dot{u} dt$$

$\delta \rightarrow z$

$$K_{Y_3}(g', g) |_{v_i \times v_i} \quad i=1,3$$

$$= e^{+i\pi\sigma u' + u'} e^{-i\pi\sigma u - u} \delta(x' - x + cT)$$

$\delta \rightarrow z$

$$\int_{R \cup R} K_{Y_3}(g', g) F(g) dx = (\pi \lambda (e^{T Y_3}) F)(g')$$

を得る。