数理解析研究所講究録
761巻 1991年 1-20

Capelli 恒等式と Multiplicity-free Actions
(joint work with Roger Howe)

京大 理　梅田 亨
(Tôru Umeda)

序. Capelli 恒等式([Ca1-3],[Ca4])は19世紀不変式論の有力な道具であり(see [My]), のちに H. Weyl によって典型群の不変式論の展開の中で枢要を占めるものとして扱われた[W]。併し[ABP, p.324]の如く, それは幾分"mysterious"なものとして理解されてきた。その表現論的意味が明らかにされたのは, 1976年 Roger Howe [H1] の reductive dual pair の文脈からであった。(注1) 即ち, $GL_n \times GL_n$ の $n \times n$ 行列の上の表現に関して展開環の中心と不変微分作用素の関係を述べたものが Capelli identities にほかならず, これはまた再交換子定理としても捉えることができる。我々はこの現代的な視点の下, Capelli 恒等式を抽象化した問題 (Abstract Capelli Problem) 及び古典的な場合の直接の拡張としての具体的表示の問題 (Concrete Capelli Problem) の二つの問題を定式化し, V. Kac [K] の分類した「連結 reductive 群の既約な

multiplicity-free表現」(13系列)について，これらの問題を解明した[HU]。

研究の動機について少し述べよう。R.Howe [H1] の視点に加えて [S], [Sh1], [H6] を眺めると自然にいくつかの共通の話題がうかび上ってくる：(1) 基本解 (2) 概均質ベクトル空間と b-函数 (3) Fourier変換及び zeta函数 (4) Capelli恒等式 (5) multiplicity-free action 等々。実はこの中で(4)のCapelli恒等式は[S]の b-函数の計算例(p.143)にチラと顔をあらわすだけである。一方[Sh1]の"b-函数"の計算の概均質ベクトル空間からの見直しは[RS]にあり，(5)のmultiplicity-free actionについては[K]という研究があった。ここで自ずと"missing link"としてCapelli恒等式の一般化が問題となる。

今，Gを連結reductive代数群$/\mathbb{C}$，VをGの(有限次元)表現としよう。GのLie環を$\mathfrak{g}$，展開環及その中心を$\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$と表す。表現$\rho: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$に伴って$\mathfrak{z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{PD}(V)^G$というalgebra homが生ずる。ここで$\mathcal{PD}$は多項式係数の微分作用素環であり肩$G$は$G$-不変元を意味する。

<u>Problem</u>：いつ $\mathfrak{z}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\rho} \mathcal{PD}(V)^G$ は surjectiveか？
さらには一般にこの準同型を記述せよ。

これが何故Capelli恒等式の拡張になっているか，については後述する。$\mathcal{PD}(V)^G$を記述することはとりも直さず$\mathcal{P}(V)$(=V上の多項式函数環)上のGの表現を既約分解することと同じであるが，multiplicity-freeという場合には，これは整然と分解される。環論的な言いかえの一般論は，更に生成系の具体的決定にも大いに役立つ。またVの特異軌道との関係(対応)もはっきりする。

Capelli自身がとらえていたことだが，Capelliの微分作用素は$\mathfrak{Z}\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$を生成する。しかも表現論的にはっきりした意味をもつ"良い"(もしくは敢えて"標準的"ともいえる)生成系である。このような$\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$の中心の特徴づけを通じ$\mathfrak{Z}\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{PD}(V)^G$を記述することが我々の基本姿勢である。

この小文は[HU]の解説であるが紙数に制限があるので部分的にならざるを得ない。しかしできれば補足も兼ねて原論文とは少し違った味を出したい。

1. 以下でvector空間，代数群は複素数体$\mathbb{C}$上で考える。代数群Gがvector空間Vに働くものとする。これが概均質であるとはVの中にZariski open(従って稠密な)G-orbitが存在するとき言う[S]。我々が以下で用いるのはこの理論の

ごく基本的な事実である：相対不変式(多項式)のなす半群は自由半群である([S, 定理1]), 特に相対不変式の生成する環は多項式環である.

概均質ベクトル空間の b-函数の例として古典的なものに "Cayleyの公式" というものがある([T1, p.114]). $n\times n$ 行列 $Mat_{n\times n}$ の座標を x_{ij}, 対応する微分作用素を $\partial_{ij}=\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ と書く。定数係数 n 階の微分作用素 Ω を $\Omega=det(\partial_{ij})$ と定義する。これは Cayley の omega process と呼ばれる。さて Cayley の公式とは Ω を $det(x_{ij})^s$ に作用させたときの計算である.

$$\Omega\,(det\, x_{ij})^s = s(s+1)\cdots(s+n-1)(det\, x_{ij})^{s-1}$$

一般に $\Omega(det\, x)^s=\beta(s)(det\, x)^{s-1}$ となる(n次の)多項式 $\beta(s)$ の存在は易しい。問題なのはこの β の具体的計算である。この公式の類似として Gårding (1947 [G]) は $Mat_{n\times n}$ の代りに対称行列を考えた。さらに志村(1984 [Sh1])は交代行列の場合も含む一般的な設定(古典型 Hermite 対称空間に附随する)の下 新たな "b-函数" を定義し計算した。[RS] はこれを概均質ベクトル空間の立場からとらえ例外型の $\overset{二つの}{case}$ も含め統一的に見た(parabolic type で nilpotent radical が可換)。

古典的な Cayley の公式の証明はいくつか知られているが, (cf. [U]) Capelli identity を用いると簡単である([S, p.143]).

Gårding の場合も対応する Capelli 型恒等式は Turnbull [T2] によって得られている (see also [S, p.146].)

2. 19世紀不変式論で「新たな不変式・共変式をつくり出す」手段として polarization operator が重要な役割を占めてきた. 例えば変数 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ の一部を $y=(y_1,\cdots,y_n)$ という別の変数に置きかえる $P_{yx}=\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ のようなものである。$Mat_{n\times n}$ を n コのベクトルが並んだものと見れば, これらの変数について n^2 コの polarization operators が生ずる. それは現代の用語でいえば右(又は左)正則表現の infinitesimal な generators となり, 丁度 $\mathfrak{gl}_n$ の表現になっている:

$$\begin{cases} E_{ij} = \sum_{l=1}^{n} x_{li}\partial_{lj} & (右) \\ E'_{ij} = \sum_{l=1}^{n} x_{jl}\partial_{il} & (左) \end{cases}$$

さて前節にあらわれた Cayley の omega process Ω は $SL_n(\mathbb{C})$ の作用と可換であるが $GL_n(\mathbb{C})$ とは可換でない. しかし

$$(\det x_{ij})\Omega$$

は GL_n と可換になる. Capelli [Ca1] はこれが polarization operators を用いて書けることを発見した. 即ち

$$\det\begin{bmatrix} E_{11}+(n-1) & E_{12} & \cdots & \cdots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22}+(n-2) & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ E_{n1} & E_{n2} & \cdots & & E_{nn} \end{bmatrix} = (\det x_{ij})\Omega$$

ここで左辺の非可換成分をもつ行列式は

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma\ A_{\sigma(1)1}\cdots A_{\sigma(n)n}$$

によって定義される。これがCapelli identityである。一旦これが確立されるとCayleyの公式が従うことは見易い。何故なら左辺の非可換行列式でdiagonal以外の成分は $\det x_{ij}$ を消すからである。

Capelli [Ca3] はさらにlower orderの"Capelli identities"を得ており(see also [H1])、これを用いるとこの場合の志村型b-函数も計算できる。

ここでこの状況の表現論的意味を反省してみよう。$\mathrm{Mat}_{n\times n}$ への左右の作用から、その上の多項式函数への GL_n, 従って $\mathfrak{gl}_n$ の左右の作用が生ずる(上述の E_{ij} 及 E'_{ij})。古典的不変式論の第一基本定理(或いは近似的にPeter-Weylとこの場合言ってもよい)によって $\mathfrak{U}(\mathfrak{gl}_n)$ の二つの作用は多項式係数微分作用素の環の中で互いにcommutantである(see [H1])。特に中心 $\mathfrak{Z}\mathfrak{U}(\mathfrak{gl}_n)$ は $GL_n\times GL_n$-不変な微分作用素全体にうつされる。Capelli恒等式の右辺は $GL_n\times GL_n$-不変であるから、直前に述べたことによりpolarization operatorsで書けることが保証される。その具体的表示がCapelli恒等式にほかならない。

斯くして序の中に述べた問題が何故 Capelli 恒等式と関係するかはっきりした。

3. さて $\mathfrak{z}\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\rho} \mathcal{PD}(V)^G$ が surjective となるなら勿論 $\mathcal{PD}(V)^G$ は可換でなくてはならない。$\mathcal{PD}(V)^G$ は $\mathcal{P}(V)$ の "G-endomorphism ring" であるから，可換性は即ち $\mathcal{P}(V)$ が G-module として既約分解したとき各既約成分の重複度が高々1であることを意味する。このような G の V 上の表現を <u>multiplicity-free</u> という[K]。Kac は連結 reductive で既約な multiplicity-free 表現を分類した。我々はこの場合に Capelli Problem を考える。尚，[Sh1] や [RS] で扱われているのは Hermitian symmetric space から来る場合で $G=K_{\mathbb{C}}$, $V=\mathfrak{p}_+$ となっている。
本題に入る前に再交換子定理との関係をひとこと注意する。

<u>命題</u>. $\rho: G \to GL(V)$ を multiplicity-free とする。このとき

$$\mathcal{PD}(V)^G = \rho(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))' = \rho(\mathfrak{z}\mathcal{U}(\mathfrak{g}))''.$$

ここで $'$ は $\mathcal{PD}(V)$ の中での交換団を意味する。従って特に $\rho(\mathfrak{z}\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ が弱閉であることと surjectivity は同値である。また $\rho(\mathfrak{z}\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = \rho(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \cap \rho(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))'$ だから $\rho(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ が弱閉ならば surjectitity が従う。

4. $\rho: G \to GL(V)$ が multiplicity-free とする。これは必然，概均質になる。より詳しく multiplicity-free になる必要充分条件は或る Borel subgroup $B \subset G$ があって B-prehomogeneous になることである (see [Se], [VK])。(注2) このとき B に関する相対不変式とは (B に関する) highest weight vector にほかならぬから，概均質ベクトル空間の基本的事実 ([S, Th 1]=[SSM, Prop. 3]) によって $\mathcal{P}(V)$ の分解にあらわれる highest weight は自由半群になる。この自由半群の基底に対応する B-相対不変式は B-singular set のうち codim 1 の部分の既約成分の定義多項式である。(注3)

5. $\mathcal{PD}(V)^G$ の記述，或いは同じことだが $\mathcal{P}(V)$ の既約分解の記述の為の一般論を不変式論的に言いかえよう。$\mathcal{PD}(V)$ から graded ring を作る操作は G-equivariant であり，故に結局 $\mathcal{P}(V \oplus V^*)^G$ を調べることに帰着する。これに関して

<u>定理</u>　次の三つの ring は互に同型であり，多項式環である：

$$\mathcal{P}(V \oplus V^*)^G, \quad \mathcal{P}(V)^H, \quad \mathcal{P}(V)^N$$

ここで　$H = V^*$ の中の generic point λ_0 ($\in$ open orbit) の stabilizer

$N =$ Borel B の unipotent radical $(= (B, B))$

又，同型は canonical（又は殆ど canonical）：

$\mathcal{P}(V\oplus V^*)^G$ と $\mathcal{P}(V)^N$ の対応は highest weight の理論の環論的いいかえであり，$\mathcal{P}(V\oplus V^*)^G \to \mathcal{P}(V)^H$ は

$$f(v, v^*) \mapsto f(v, \lambda_0)$$

という制限（evaluation）である．この injectivity は概均質ということからすぐ判る．surjectivity は multiplicity-free ということを用いる．先ほどの注意から $\mathcal{P}(V)^N$ は多項式環と判っているので，この同型を通じてすべてがそうだと判る．

この定理は $\mathcal{PD}(V)^G$ の決定に有用であり，既に [J]，[Sh1]，[RS] などで実質上又は部分的に利用されてきた．(注4)

6. $\mathcal{PD}(V)^G$ をきめる方法としては

(1) $\mathcal{B}$-singular set をきめる．

(2) $\mathcal{P}(V\oplus V^*)^G \simeq \mathcal{P}(V)^H$ を用いる．

(3) Chevalley の restriction theorem を用いる．

(4) 具体的に $S^r(V)$ = r 階対称テンソル を r が小さいときに分解してみる．又 Weyl の次元公式などを用いて次元の勘定をする．

(5) reductive dual pair を利用する．

などさまざまあり個々の case に応じて便利なものを選ぶべきである．（注4）も参照のこと）

我々（[HU]）は(2)と(5)を主に用いた．(2)の使い方の一例をHermitian symmetricでない $Spin_9 \otimes GL_1$ の場合に少し述べると，generic stabilizerへのreductionとして

$$Spin_9 \supset Spin_7 \supset G_2 \supset SL_3$$

ができて，これらがイモヅル式に判る．

7. $\mathcal{P}(V)$ の分解と $\mathcal{P}(V \oplus V^*)^G$ の元との対応は次のようなものである．

$\mathcal{P}(V) \supset Y$：G submoduleに対してその dual $\mathcal{P}(V^*) \supset Y^*$ をとる．Y の basis $\{y_i\}$ とその dual basis $\{y_i^*\}$ をとって

$$\theta_{Y, Y^*} = \sum y_i y_i^*$$

を作る．これが Y に対応する $\mathcal{P}(V \oplus V^*)^G$ の元である．対応する不変微分作用素は同じ式で $\mathcal{P}(V^*)$ の元を定数係数の微分作用素と思い直せばよい．特に Y が1次元のとき，$\theta_{Y, Y^*} = y y^*$ で y は G-relative invariant で対応する不変微分作用素がCapelli恒等式の右辺に相当する．

8. さて G が連結reductiveで V 上の表現が既約とする。このようなものはKac [K]で分類されている．我々の問題が肯定的に解ける為には G は $GL_1 (= \mathbb{C}^\times)$ を含んでいないと

いけない．でないと Euler operator という自明な不変微分作用素が $\mathfrak{Z}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ からの image に入り得ない．このとき Kac の list から次の 13 系列が考察の対象となる：

$$\begin{cases} GL_n \otimes GL_m, \quad S^2 GL_n, \quad \Lambda^2 GL_n, \quad O_n \otimes GL_1 \\ Sp_{2n} \otimes GL_1, \quad Sp_{2n} \otimes GL_2, \quad Sp_{2n} \otimes GL_3, \quad Sp_4 \otimes GL_m \\ Spin_7 \otimes GL_1, \quad Spin_9 \otimes GL_1, \quad Spin_{10} \otimes GL_1 \\ G_2 \otimes GL_1, \quad E_6 \otimes GL_1 \end{cases}$$

ここで $GL_n \otimes GL_m$ は $GL_n \times GL_m$ の $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m$ の表現を意味し，他の $O \otimes GL$ や $Sp \otimes GL$ も同様．また $S^2 GL_n$, $\Lambda^2 GL_n$ は対称及び反対称の2階のテンソル表現．Spin はスピン表現であり，例外型の G_2, E_6 は各々7次元，27次元という最低次元表現を意味する．

詳しい議論は書く余裕がない．[HU] を直接見られたい．但しこの小文の終りに結果の list を再録しておく．中にある数字（たとえば 11.1.9 のような）は [HU] の式番号である．

$\mathfrak{Z}\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{PD}(V)^G$ が surjective でないのは3つの場合（$Sp_{2n} \otimes GL_3$, $Spin_9 \otimes GL_1$, $E_6 \otimes GL_1$）である．しかしこの場合でも商体までうつれば surjective である．

Hermitian symmetric の場合 relative invariant (non-trivial) があることと，tube type であることが同値であることにもひとこと注意しておこう．

9. 説明を全く省くわけにもいかないので，重要なCapelli element について少し述べる．

Capelli 恒等式の左辺にあらわれる行列の"固有多項式"を考えよう：

$$C(z)=\det\begin{bmatrix} E_{11}+(n-1)+z & E_{12} & \cdots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22}+(n-2)+z & \cdots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{n1} & \cdots & \cdots & E_{nn}+z \end{bmatrix}$$

この係数が実質的に lower order の Capelli elements であるが展開は次のように階乗函数を用いて行う：

$$C(z)=C_n+zC_{n-1}+z(z-1)C_{n-2}+\cdots$$

C_n がもともとの Capelli 恒等式の左辺．C_k が central であることは C_n のそれに帰着する。その証明は non-trivial である．(注5) この k-th Capelli element について

i) C_k は degree k （$\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_n)$ の普通の filtration の意味で）

ii) C_k は表現 ρ_n^D で depth$(D)<k$ なるものを消す．ここに ρ_n^D は Young 図形 D でパラメトライズされた GL_n の既約表現．

が成り立ち，逆にこれら二つの性質は C_k を（定数倍を除いて）決める。$GL_n\otimes GL_m$，S^2GL_n の場合は $\mathcal{PD}(V)^G$ の

標準的 base にうつる。(特徴づけ i) ii) を用いる.)

10. $\Lambda^2 GL_n$ の場合はずっと微妙である。実際ここでは $\mathfrak{Z}U(\mathfrak{g}) \to PD(V)^G$ は Kernel をもつ。$PD(V)^G$ は $[\frac{n}{2}]$ コの生成系をもつ (Pfaffian で書ける.) それに対応する $\mathfrak{Z}U(\mathfrak{gl}_n)$ の元 $C_k^\wedge$ (skew Capelli elements) が構成できる。それは $m = [\frac{n}{2}]$ として

$$C_{2m}(z) = \sum_{a,b=0}^{m} (-)^{a+b} C_a^\wedge C_b^\wedge Q_{m-a}(z) Q_{m-b}(z-1),$$

$$Q_j(z) = \prod_{c=0}^{j-1} (z-2c)$$

を「解く」ことによって C_k たちで書ける。実際に既知の多項式と書けるというわけではないが…. $C_k^\wedge$ については

i) $C_k^\wedge$ は degree k

ii) $C_k^\wedge$ は ρ_n^D で D は column が偶数で $< 2k$ となる表現 ρ_n^D を消す. ($k \le n/2$ の場合)

という二つの性質で特徴づけられる. また $k > \frac{n}{2}$ なら

$C_k^\wedge$ $(k > \frac{n}{2})$ は ρ_n^D で column が偶数で $\leqslant n$ となる ρ_n^D を消す.

これらを用いて skew-symmetric case の Capelli 恒等式が得られる.

11. 先に$\mathcal{PD}(V)^G$はB-singular setによって決まることを述べたが，G-orbitとの関係はどうだろうか？ 実はこれも密接に関係していて，G-orbitsのなすlatticeの構造(closure relation)が$\mathcal{PD}(V)^G$の生成系をきめる。それは$\mathcal{PD}(V)^G$から$\mathcal{P}(V)^N$へうつって考えてみるとよい。

この考察から特にmultiplicity-freeならばG-orbitの数が有限であるという[Se]や[K]によって知られていた命題の別証も得られる．

またclosure relationはmultiplicity-freeのときは単純で一例($Sp_{2n}\otimes GL_3$)をのぞいて全順序である．

12. Capelli恒等式の左辺は展開環のcenterの元が行列式表示されているという著しい特徴をもつ．他のLie環についてもこのようなcenterの表示は今まで知られていないのではないかと思う．実は直交Lie環の場合にも類似の行列式表示が可能である．([HU]．のAppendix) しかし，本来のCapelli elementほど使い易いものではないかも知れない．というのはO_nの行列表示にdependしたものであるから．

尚，sp_{2n}についても同様のものがあってよいとも思われるが証明法をAppendixの類似をたどる限りうまくはいかない。

(注)

(注1)[1] Capelli 恒等式の意味に気づいていたのはひとり R. Howe だけではないらしい。たとえば Seshadri (see [H1] の postscript). また佐藤幹夫先生は随分以前 ('60年代?) から御存じであったとも聞いた (堀田先生からの伝聞).

(注2)[8] 今 $Bv_0 \subset V$ が open とする. v_0 の stabilizer H^* について $Gv_0 = V$ の $(G\text{-})$ open orbit $\cong G/H^*$. よって $BH^* \subset G$ は dense である. 一般に G の subgroup K で $^\exists$Borel B s.t. $BK \subset G$ が dense となるものを spherical subgroup という. このとき G の有限次元既約表現 ρ について K-fixed vectors ρ^K は高々1次元となる. $\mathcal{P}(V \oplus V^*)^G \to \mathcal{P}(V)^H$ の同型で surjectivity はこのことを使って示される.

spherical subgroup については [Kr], [Br] を参照のこと. この概念はまた不変式論の第一基本定理の証明にも有用である ([H7]).

(注3)[8] これにより原理的に $\mathcal{P}(V)$ の分解がわかるが, 実行は必ずしも容易ではない. しかし Hermitian Symmetric case では [RS] (see also [MRS]) でこれを使う. Gauß の補題といっているものである.

(注4)(9) たとえば $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の中心，或いは同じことだが，$\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ (Adjoint action) を決定するのに，"よい代表系"として Cartan subalgebra をとり制限することにより群 G を reduce していく．制限によって生きのこった対称性が Weyl 群で，これが reflection で生成されるから不変式環は多項式環となる（Chevally の定理）．これは一般的であるが代表系のとり方は Cartan に限ったものでもない (see [H2])．上の $\mathcal{P}(V\oplus V^*)^G \to \mathcal{P}(V)^H$ も考え方として同じである．また evaluate する点を singular set 内にとってみると，情報は失われるが，たとえば surjectivity がいえて，しかも像は多項式環となることも証明できる．

Hermitian Symmetric の場合，やはり Cartan に制限する方法もあって Johnson [J] はこれを用いているが，Weyl 群不変元の degree が $2i$ ($i=1,\cdots,r=\mathrm{rank}$) となることも判る（Moore の restricted root theorem）

(注5)(12) [H1] も参照のこと．但し証明の細部に誤りがあった．その指摘は若山氏が Math. Rev. の際気づいたこととしてなされている [W]．訂正も出ている．ていねいな証明は [HU] の Appendix にある．また量子群版 [Jb] は classical case でさえ新証明を与える．　　(1991. 5. 1.)

Summary:

TABLE:

Group action	Hermitian symmetric	Abstract Capelli	Relative invariant (Degree)	Explicit Capelli for rel.inv.	Degrees of fundamental generators (Number)	Degrees of generators of $\mathcal{ZU}(\mathfrak{g})$	Graph of closure relations (Number of singular orbits)	Generic stabilizer if reductive
$GL_n \otimes GL_m$ $(n \geq m)$	○	yes	$n = m$ (n)	11.1.9	$1,2,\cdots,m$ (m)	$1,2,\cdots,n;$ $1,2,\cdots,m$	linear (m)	GL_n if $n=m$
S^2GL_n	○	yes	○ (n)	11.2.6	$1,2,\cdots,n$ (n)	$1,2,\cdots,n$	linear (n)	O_n
Λ^2GL_n	○	yes	n:even $(n/2)$	11.3.19	$1,2,\cdots,[n/2]$ $([n/2])$	$1,2,\cdots,n$	linear $([n/2])$	Sp_n if n even
$O_n \otimes GL_1$	○	yes	○ (2)	11.4.12	1,2 (2)	$2,4,\cdots,2[\frac{n}{2}];$ 1	linear (2)	O_{n-1}
$Sp_{2n} \otimes GL_1$		yes	× –	–	1 (1)	$2,4,\cdots,2n;$ 1	linear (1)	
$Sp_{2n} \otimes GL_2$ $(n \geq 2)$		yes	○ (3)	11.6	1,2;2 (3)	$2,4,\cdots,2n;$ 1,2	linear (3)	GL_2
$Sp_{2n} \otimes GL_3$ $(n \geq 3)$		NO	× –	–	1,2,3;2,3,4 (6)	$2,4,\cdots,2n;$ 1,2,3	NOT linear : (5)	(13.5)
$Sp_4 \otimes GL_m$ $(m \geq 4)$		yes	$m = 4$ (4)	11.8	1,2,3,4;2,4 (6)	2,4; $1,2,\cdots,m$	linear (5)	Sp_4 if $m=4$
$Spin_7 \otimes GL_1$		yes	○ (2)	11.9.6	1,2 (2)	2,4,6; 1	linear (2)	G_2
$Spin_9 \otimes GL_1$		NO	○ (2)	–	1,2;2 (3)	2,4,6,8; 1	linear (3)	$Spin_7$
$Spin_{10} \otimes GL_1$	○	yes	× –	–	1,2 (2)	2,4,6,8,10; 1	linear (2)	
$G_2 \otimes GL_1$		yes	○ (2)	11.12.1	1,2 (2)	2,6; 1	linear (2)	SL_3
$E_6 \otimes GL_1$	○	NO	○ (3)	–	1,2,3 (3)	2,5,6,8,9,12; 1	linear (3)	F_4

BIBLIOGRAPHY

[**ABP**] M. Atiyah, R. Bott and V. Patodi, *On the heat equation and the index theorem*, Invent. math. **19** (1973), 279–330.

[**Ba**] W.N. Bailey, "Generalized Hypergeometric Series," Cambridge Math. Tracts 32 (reprinted by Hafner 1965), Cambridge Univ. Press, 1935.

[**Bo**] G. Boole, "Calculus of Finite Differences," Chelsea, 1872.

[**B1**] A. Borel, *Hermann Weyl and Lie Groups*, in "Hermann Weyl 1885–1985," (Centenary Lectures) ed. by K. Chandrasekharn, Springer Verlag, 1986, pp. 53–82.

[**B2**] ———, "Linear Algebraic Groups," Benjamin, 1969.

[**BW**] A. Borel and N. Wallach, "Continuous Cohomology, Daiscrete Subgroups, and Representation of Reductive Groups," Princeton Univ. Press, 1980.

[**Br**] M. Brion, *Classification des espaces homogènes sphériques*, Compositio Math. **63** (1987), 189–208.

[**Ca1**] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Annalen **29** (1887), 331–338.

[**Ca2**] ———, *Ricerca delle operazioni invariantive fra piu serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariantiva fra le stesse serie*, Atti delle Scinze Fis. e Mast. di Napoli **(2) I** (1888), 1–17.

[**Ca3**] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Annalen **37** (1890), 1–37.

[**Ca4**] ———, "Lezioni sulla Theoria delle Forme Algebriche," Pellerano, Napoli, 1902.

[**CL**] R.W. Carter and G. Lusztig, *On the modular representations of the general linear and symmetric groups*, Math. Z. **136** (1974), 193–242.

[**D**] J. Dixmier, *Sur les algèbres enveloppants de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})$ *et* $\mathfrak{af}(n,\mathbf{C})$, Bull. Sc. math. 2è serie **100** (1976), 57–95.

[**FZ**] D. Foata and D. Zeilberger, preliminary manuscript.

[**G**] L. Gårding, *Extension of a formula by Cayley to symmetric determinants*, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2 **8** (1947), 73–75.

[**Ha**] S.J. Haris, *Some irreducible representation of exceptional algebraic groups*, Amer. J. Math. **93** (1971), 75–106.

[**Htn**] R. Hartshorne, "Algebraic Geometry," Springer Verlag, 1977.

[**He1**] S. Helgason, "Groups and Geometric Analysis," Academic Press, 1984.

[**He2**] ———, *A duality for symmetric spaces with applications*, Adv. in Math. **5** (1970), 1–54.

[**He3**] ———, *Some results on invariant differential operators on symmetric spaces*, preprint 1989 May.

[**H1**] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 539–570; *Erratum*, Trans. Amer. Math. Soc. **318** (1990), p. 823.

[**H2**] ———, *Some highly symmetric dynamical systems*, preprint.

[**H3**] ———, (GL_n, GL_m)*-duality and symmetric plethysm*, in "Proc. Ind. Acad. Sci. (Math. Sci.)," 1987, pp. 85–109.

[**H4**] ———, *The Classical Groups and invariants of binary forms*, in "The Mathematical Heritage of Hermann Weyl," Proc. Symp. Pure Math., 1988, pp. 133–166.

[**H5**] ———, *Dual pairs in physics: Harmonic oscillators, photons, electrons, and singletons*, in "Lectures in Applied Math.," 1985, pp. 179–207.

[**H6**] ———, "Lectures on Harmonic Analysis," to appear.

[**H7**] ———, *The First Fundamantal Theorem of Invariant Theory and Spherical Subgroups*, preprint.

[**HU**] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli Identity, the Double Commutant Theorem, and Multiplicity-free Actions*, Math. Annalen (*to appear*).

[**Hu**] J.E. Humphreys, "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory," Springer Verlag, 1972.

[**I**] J.-I. Igusa, *A classification of spinors up to dimension twelve*, Amer. J. Math. 92 (1970), 997–1028.

[**Ja**] N. Jacobson, "Lectures in Abstract Algebra II," Springer Verlag, 1952.

[**Jb**] M. Jimbo, *q-analogue of* $U(\mathfrak{gl}(N+1))$*, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247–252.

[**J**] K. D. Johnson, *On a ring of invariant polynomials on a Hermitian symmetric space*, J. Algebra **67** (1980), 72–81.

[**K**] V.G. Kac, *Some remarks on nilpotent orbits*, J. Algebra **64** (1980), 190–213.

[**KPV**] V.G. Kac, V.L. Popov and E.B. Vinberg, *Sur les groupes linéares algébriques dont l'algèbre des invariants est libre*, C.R. Acad. Sci. Paris **283** (1976), 875–878.

[**Ki**] T. Kimura, *The theory of prehomogeneous vector spaces*, (in Japanese), Sûgaku **32** (1980), 97–118.

[**KT**] K. Koike and I. Terada, *Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type* B_n, C_n, D_n, J. Alg. **107** (1987), 466–511.

[**KS**] B. Kostant and S. Sahi, *The Capelli identity, tube domains and the generalizesd Laplace transform*, Adv. Math. (*to appear*).

[**Kz**] J-L. Koszul, *Les algèbre de Lie graduée de type* $\mathfrak{sl}(n,1)$ *et l'opérateur de A. Capelli*, C.R. Acad. Sc. Paris **292** (1981), 139–141.

[**Kr**] M. Krämer, *Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen*, Compositio Math. **38** (1979), 129–153.

[**L**] S. Lang, "Algebra," Addison-Wesley, 1965.

[**Mc**] I.G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials," Oxford Univ. Press, 1979.

[**MRS**] I. Muller, H. Rubenthaler and G. Schiffmann, *Structure des espaces préhomogènes associés à certaines algèbres de Lie graduées*, Math. Annalen **274** (1986), 95–123.

[**MF**] D. Mumford and J. Fogaty, "Geometric Invariant Theory," Springer Verlag, 1982.

[**My**] F. Meyer, *Berit über den gegenwärtingen Stand der Invariantentheorie*, Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Vereinigung **1** (1892), 79–292.

[**Ra**] M. Raïs, *Distributions homogènes sur des espaces de matrices*, (Thèse Sc. math. Paris, 1970), Bull. Soc. math. France, Mémoire **30** (1972), 1–109.

[**N**] M.L. Nazarov, *Quantum Berezinian and the Classical Capelli Identity*, Lett. Math. Phys. **21** (1991), 123–131.

[**R**] G.C.M. Ruitenburg, *Invariant ideals of polynomial algebras with mutiplicity-free group actions*, Compositio Math. **71** (1989), 181–227.

[**RS**] H. Rubenthaler and G. Schiffmann, *Opérateurs différentiels de Shimura et espace préhomogènes*, Invent. math. **90** (1987), 409–442.

[**S**] M. Sato, *The theory of prehomogeneous vector spaces*, notes by T. Shintani (in Japanese), Sûgaku no Ayumi **15–1** (1970), 85–157.

[**SK**] M. Sato and T. Kimura, *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Math. J. **65** (1977), 1–155.

[**SSM**] M. Sato, T. Shintani and M. Muro, *Theory of prehomogeneous vector spaces (Algebraic Part) — the English translation of Sato's lecture from Shinatni's note*, Nagoya Math. J. **120** (1990), 1–34.

[Se] F.J. Servedio, *Prehomogeneous vector spaces and varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 421–444.

[Sch1] G. Schwarz, *Representation of simple Lie groups with regular rings of invariants*, Invent. math. 49 (1978), 167–191.

[Sch2] ________, *Representation of simple Lie groups with free module of covariants*, Invent. math. **50** (1978), 1–12.

[Sch3] ________, *Lifting smooth homotopies of orbit spaces*, I.H.E.S. Publ. **51** (1980), 37–135.

[Sch4] ________, *Invariant theory of G_2*, Bull. Amer. Math. Soc. New Ser. **9** (1983), 335–338.

[Sch5] ________, *On classical invariant theory and binary cubics*, Ann. de L'Inst. Fourier **37** (1987), 191–216.

[Sch6] ________, *Invariant theory of G_2 and $Spin_7$*, Commentarii Math. Helvetici **63** (1988), 624–663.

[Sh1] G. Shimura, *On differential operators attached to certain representations of classical groups*, Invent. math. **77** (1984), 463–488.

[Sh2] ________, *Invariant differential operators on Hermitian symmetric spaces*, Ann. Math. **132** (1990), 232–272.

[Th] R. Thrall, *On symmetrized Kronecker powers and the structure of the free Lie ring*, Amer. J. Math. **64** (1942), 371–388.

[T1] H.W. Turnbull, "The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants," Dover, 1960.

[T2] ________, *Symmetric determinants and the Cayley and Capelli operators*, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2 **8** (1947), 76–86.

[U] T. Umeda, *A combinatorial proof of Cayley's formula*, (in Japanese), in "RIMS Kôkyûroku *Algebraic Combinatorial Theory.*" *to appear*

[VK] E.B. Vinberg and B.N. Kimelfeld, *Homogeneous domains in flag manifolds and spherical subgroups of semi-simple Lie groups*, Functional Anal. Appl. **12** (1978), 12–19.

[Wa] M. Wakayama, *Review of "Remarks on Classical Invarinat Theory" by Roger Howe*, Math. Rev. **90h:22015a,b** (1990), p. 4463.

[W] H. Weyl, "The Classical Groups, their Invariants and Representations," Princeton University Press, 1946.

[Wi] S.G. Williamson, *Symmetry operators, porlarizations, and a generalized Capelli identity*, Linear and Multilinear Alg. **10** (1981), 93–102.

[ZS] O. Zariski and P. Samuel, "Commutative Algebra 1," Van Nostrand, 1958.

[Zb] D. Zeilberger, *The method of creative telescoping*, to appear, J. Symb. Comp..

[Z] C. Zhu, *Thesis*, Yale Univ. 1990.