

## 球面上の解析汎函数の Fantappié 変換

上智大理工 和田涼子\* (Ryoko Wada)

$d$  を 2 以上の自然数とする.  $\mathbb{R}^{d+1}$  の単位球面を  $S$  で表わす.  
 $\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$  で  $(d+1)$  次元複素射影空間を表わし,  $(\xi_0, \xi)$  で  
 $\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$  の元の同次座標を表わす ( $\xi_0 \in \mathbb{C}, \xi \in \mathbb{C}^{d+1}$ ).  $\mathbb{C}^{d+1}$  の  
compact 集合  $K$  について

$$\begin{aligned} \overset{*}{\mathbb{C}}K &= \{(\xi_0, \xi) \in \mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C}) ; \xi_0 + \xi \cdot z \neq 0 \\ &\quad \text{for } \forall z \in K\} \end{aligned}$$

とおく.  $\mathcal{O}(K)$  を  $K$  上の正則函数の芽の全体とし,  $\mathcal{O}'(K)$  で  
 $\mathcal{O}(K)$  の dual space を表わす.

$T \in \mathcal{O}'(K)$  について Fantappié 変換  $\Phi_T(\xi_0, \xi)$  は  
次式で定義される.

$$\Phi_T(\xi_0, \xi) = \left\langle T_z, \frac{\xi_0}{\xi_0 + \xi \cdot z} \right\rangle \quad ((\xi_0, \xi) \in \overset{*}{\mathbb{C}}K)$$

---

\* 現在 広島大総合

$\mathcal{O}_0(\mathbb{C}K)$  を  $\mathbb{C}K$  上の正則関数で  $\{(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{C}K; \zeta_0 = 0\}$  上で 0 になるものの全体とする。Martineau [3] は  $K$  が compactかつ convex ならば 変換  $\mathfrak{H}: T \rightarrow \mathfrak{H}_T$  は  $\mathcal{O}(K)$  から  $\mathcal{O}_0(\mathbb{C}K)$  への線型位相同型であることを示した。

しかし,  $S$  は convex でないので この結果からは  $\mathcal{O}(S)$  の  $\mathfrak{H}$  による像を決めることはできない。ここでは  $\mathcal{O}(S)$  の  $\mathfrak{H}$  による像を決めることを目的とする。

### § 1. 準備

$d$  を 2 以上の自然数とする。  $z = (z_1, z_2, \dots, z_{d+1})$ ,  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1}$  について

$$z \cdot \zeta = \sum_{j=1}^{d+1} z_j \zeta_j,$$

$$\|z\|^2 = z \cdot \bar{z},$$

$$z^2 = z \cdot z$$

とおく。

$\mathbb{C}^{d+1}$  の開集合  $W$  について  $\mathcal{O}(W)$  で  $W$  上の正則関数の空間を表わす。  $\mathcal{O}(W)$  には  $W$  上の広義一様収束の位相を入れる。

$\mathbb{C}^{d+1}$  の compact 集合  $K$  について

$$\mathcal{O}(K) = \varinjlim_{W \supset K} \mathcal{O}(W)$$

とおく ( $W$  は  $K$  を含む開集合).  $\mathcal{O}'(K)$  で  $\mathcal{O}(K)$  の dual space を表わす.

$S = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} ; \|x\| = 1\}$  とおき  $ds$  を  $S$  上の  $\int_S 1 ds = 1$  をみたす  $O(d+1)$ -invariant な測度とする.  $\|\cdot\|_\infty$  を  $S$  上の sup norm,  $H_{n,d}$  を  $(d+1)$ 次元  $n$ 次の球面調和函数の全体とする.  $P_{n,d}$  で  $(d+1)$ 次元  $n$ 次の Legendre 多項式を表わす. (球面調和函数, Legendre 多項式については [6] 参照).

$h \in H_{n,d}$  について  $\tilde{h}$  で  $\tilde{h}|_S = h$  をみたす  $\mathbb{R}^{d+1}$  上の  $n$ 次同次調和多項式 (一意的に決まる) を表わす.

$f'$  が  $S$  上の汎函数であるとき  $f'$  の  $n$ 次球面調和成分  $S_n(f'; \cdot) \in H_{n,d}$  は次式で定義される:

$$(1.1) \quad S_n(f'; s) = N(n,d) \langle f', P_{n,d}(\cdot, s) \rangle$$

$$(s \in S),$$

ここで

$$(1.2) \quad N(n,d) = \dim H_{n,d}$$

$$= \frac{(2n+d-1)(n+d-2)!}{n!(d-1)!}.$$

球面調和成分については [5] を参照。

$\mathbb{C}^{d+1}$  上の Lie norm  $L(z)$  および dual Lie norm  $L^*(z)$  は次のように定義される：

$$L(z) = \left\{ \|z\|^2 + (\|z\|^4 - |z^2|^2)^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$$\begin{aligned} L^*(z) &= \sup \{ |z \cdot \xi| ; L(\xi) \leq 1 \} \\ &= \left( \frac{\|z\|^2 + |z^2|}{2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

$\mathbb{C}^{d+1}$  上の  $N(z)$  について

$$B_N(r) = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} : N(z) < r \} \quad (0 < r \leq \infty)$$

$$B_N[r] = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} : N(z) \leq r \} \quad (0 \leq r < \infty)$$

とおくと  $S \subset B_L[1] \subset B_{L^*}[1]$  である。  $\| \cdot \|_N$  で  $B_N[1]$  上の sup norm を表わす。

$\mathbb{Z}_+ = \{ 0, 1, 2, \dots \}$  とおき,  $\Lambda_+ = \{ (n, k) \in \mathbb{Z}_+^2 ; n \equiv k \pmod{2}, k+1 \leq n \}$  とする。  $\forall F \in \mathcal{O}(B_L(r))$  について  $S_{n,k}(F; \cdot) \in H_{k,d}$  が一意的に存在して

$$(1.3) \quad F(z) = \sum_{(n,k) \in \Lambda_+} (\sqrt{z})^{n-k} \widetilde{S}_{n,k}(F; z)$$

という形に展開できる。 (1.3) の右辺は  $B_L(r)$  上 広義一様

収束する。  $S_{n,k}(F:)$  は  $F$  の  $(n,k)$ -成分とよばれる ([4] 参照)。

$\tilde{S} = \{z \in \mathbb{C}^{d+1}; z^2 = 1\}$  で  $\mathbb{C}^{d+1}$  上の複素球面を表わす。  $1 \leq r < \infty$  について

$$\tilde{S}[r] = B_L[r] \cap \tilde{S}$$

とおく。  $S = \tilde{S} \cap \mathbb{R}^{d+1} = \tilde{S}[1]$  である。

$M = \{z \in \mathbb{C}^{d+1}; z^2 = 0\}$ ,  $\Sigma = \{z = x+iy \in M; \|x\| = \|y\| = 1\}$  とおくとき  $\Sigma \simeq O(d+1)/O(d-1)$  となり

$\int_{\Sigma} 1 \, dz = 1$  をみたす  $O(d+1)$ -invariant な測度  $dz$  が一意的に存在する。 次のことがわかっている。

命題 1.1 (cf. [2][6][8])  $f \in H_{n,d}$ ,  $g \in H_{k,d}$  とする。このとき次式が成り立つ。

$$(1.4) \quad \int_S f(s) g(s) \, ds = 0 \quad (\text{if } n \neq k)$$

$$(1.5) \quad \int_S f(s) \overline{g(s)} \, ds$$

$$= \frac{n! \Gamma(\frac{d+1}{2}) N(n,d)}{2^{2n} \Gamma(n + \frac{d+1}{2})} \int_{\Sigma} \tilde{f}(z) \overline{\tilde{g}(z)} \, dz.$$

§ 2.  $\mathcal{O}'(\widehat{S}[r])$  の Fantappiè 変換

$\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$  を  $(d+1)$  次元複素射影空間とする.  $(\xi_0, \xi)$  ( $\xi_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\xi \in \mathbb{C}^{d+1}$ ) で  $\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$  の元の同次座標を表わす.  $K \subset \mathbb{C}^{d+1}$  について

$$\overset{*}{\mathbb{C}}K = \{ (\xi_0, \xi) \in \mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C}) ; \xi_0 + \xi \cdot z \neq 0 \text{ for } \forall z \in K \}$$

とおく.  $K$  が  $\mathbb{C}^{d+1}$  の compact 集合のとき  $\overset{*}{\mathbb{C}}K$  は  $\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$  の開集合になる.

例.  $A \subset \mathbb{C}^{d+1}$  と  $\{ (1, \xi) \in \mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C}) ; \xi \in A \}$  を同一視すると

$$(i) \quad \overset{*}{\mathbb{C}}B_N[r] = B_{N^*}(r),$$

$$\text{ここで } N^*(z) = \sup \{ |\xi \cdot z| ; N(z) \leq 1 \}.$$

$$(ii) \quad \overset{*}{\mathbb{C}}S = \{ x + iy \in \mathbb{C}^{d+1} ; \|x\| < 1 \text{ or } \|y\|^2 > \|x\|^2 \|y\|^2 - (x \cdot y)^2 \}$$

( $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$ )

$(\xi_0, \xi) \in \overset{*}{\mathbb{C}}K$ ,  $T \in \mathcal{O}'(K)$  について Fantappiè indicator

$\Phi_T(\xi_0, \xi)$  は次のように定義される:

$$(2.1) \quad \Phi_T(\xi_0, \xi) = \left\langle T, \frac{\xi_0}{\xi_0 + \xi \cdot z} \right\rangle.$$

次の定理が知られている。

定理 2.1 (Martineau [3] Theorem 5)  $K \subset \mathbb{C}^{d+1}$  が convex  
かつ compact とし  $\mathcal{O}_0(\mathbb{C}K) \in \mathbb{C}K$  上で正則で  $\{(\xi_0, \xi) \in \mathbb{C}K; \xi_0 = 0\}$  で 0 になる 函数の全体とすると Fantappiè 変  
換  $\Phi: T \rightarrow \Phi_T$  は  $\mathcal{O}'(K)$  から  $\mathcal{O}_0(\mathbb{C}K)$  への線型位相同型に  
なる。

定理 2.1 と例 (i) より  $\Phi: \mathcal{O}'(B_L[r]) \cong \mathcal{O}(B_{L^*}(1/r))$   
が言えるが,  $\tilde{S}[r]$  は convex でないので定理 2.1 によって  
 $\mathcal{O}(\tilde{S}[r])$  の  $\Phi$  による像を決めることはできない。ここでは  
 $\mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$  の  $\Phi$  による像について考える。

微分作用素

$$(2.2) \quad P(D) = \left(2 + \sum_{j=1}^{d+1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{d+1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right) - \Delta_z$$

を考える (ここで  $\Delta_z = \sum_{j=1}^{d+1} (\partial/\partial z_j)^2$ )。  $W \subset \mathbb{C}^{d+1}$  について

$$\mathcal{O}_P(W) = \{ F \in \mathcal{O}(W) : \mathcal{I}(D)F = 0 \}$$

とおく. ここで次の定理が成り立つ.

定理 2.2 (cf. [9])  $1 \leq r < \infty$  のとき Fantappiè 変換  
 $\Phi: \mathcal{T} \rightarrow \Phi_r$  は  $\mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$  から  $\mathcal{O}_P(B_{L^*}(1/r))$  への線  
 型位相同型である. 特に  $r=1$  とおくと

$$\Phi: \mathcal{O}'(S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_P(B_{L^*}(1))$$

である.

定理 2.2 を証明するために次の補題が必要である.

補題 2.3  $F \in \mathcal{O}_P(B_{L^*}(P))$  ( $P > 0$ ) とし,  $S_{n,k}$  を  
 $F$  の  $(n, k)$ -成分とする. このとき次が成り立つ.

$$(2.3) \quad S_{n,k} = \frac{n! \Gamma(k + \frac{d+1}{2})}{2^{n-k} k! \Gamma(\frac{n-k}{2} + 1) \Gamma(\frac{n+k+d+1}{2})} S_{k,k}$$

for  $(n, k) \in \Lambda_+$ ,

$$(2.4) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \| S_{k,k} \|_{\infty}^{1/k} \leq (2P)^{-1}.$$

証明.  $F \in \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(B_L^*(P))$  より

$$\left(2 + \sum_{j=1}^{d+1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right) \left(1 + \sum_{j=1}^{d+1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right) F = \Delta_z F$$

(1.3) より  $z \in B_L(P)$  についで

$$\text{左辺} = \sum_{(m,k) \in \Lambda_+} (m+1)(n+2) (\sqrt{z^2})^{n-k} \widetilde{S}_{n,k}(z)$$

$$\text{右辺} = \sum_{\substack{(m,k) \in \Lambda_+ \\ m > k}} (m-k)(n+k+d-1) (\sqrt{z^2})^{n-k-2} \widetilde{S}_{n,k}(z).$$

( $(m,k)$ -成分の一意的性より)  $0 \leq k \leq n-2$ ,  $n \equiv k \pmod{2}$

についで

$$(2.5) \quad (n-1)n \widetilde{S}_{n-2,k} = (n-k)(n+k+d-1) \widetilde{S}_{n,k}.$$

(2.3) は (2.5) より得られる.

$$F_n(z) = \sum_{\substack{k \equiv n \pmod{2} \\ 0 \leq k \leq n}} (\sqrt{z^2})^{n-k} \widetilde{S}_{n-k}(z)$$

とおくとき [5] Lemma 4.1 より

$$(2.6) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|F_n\|_{L^*}^{1/n} \leq 1/p.$$

[8] Lemma 2.5 より  $\forall s \in S$  についで

$$(2.7) \quad S_{n,n}(s) = N(n,d) \int_{\Sigma} F_n(z) \left(z \cdot \frac{s}{2}\right)^n dz.$$

$z \in \Sigma$  のとき  $L^*(z) = 1$  かつ  $\bar{z} \in \Sigma$  だから

$$|\bar{z} \cdot \frac{z}{2}| \leq L^*(\bar{z}) L(\frac{z}{2}) = \frac{1}{2}$$

従って (2.7) より

$$(2.8) \quad \|S_{n,n}\|_{\infty} \leq N(n,d) \left(\frac{1}{2}\right)^n \|F_n\|_{L^*}.$$

(2.6), (2.8) より (2.4) がわかる. (証明終).

定理 2.2 の証明.  $f' \in \mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$  とする.  $\xi \in \tilde{S}[r]$  を固定すると  $(1 + \xi \cdot z)^{-1} \in \mathcal{O}_2(B_{L^*}(1/r))$  だから  $\Re f'(z) = \langle f'_\xi, (1 + \xi \cdot z)^{-1} \rangle \in \mathcal{O}_2(B_{L^*}(1/r))$  である.  $\mathcal{O}'(\tilde{S}[r]) \subset \mathcal{O}'(B_L[r])$  だから 定理 2.1 より  $\Re$  は  $\mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$  から  $\mathcal{O}_2(B_{L^*}(1/r)) \wedge$  の中への 1 対 1 線型写像である.

$F \in \mathcal{O}_2(B_{L^*}(1/r))$ ,  $S_{n,k} = S_{n,k}(F; \cdot)$  とする.  $f_n \in H_{n,d}$  と

$$(2.9) \quad f_n = (-2)^n \frac{\Gamma(n + \frac{d+1}{2})}{n! \Gamma(\frac{d+1}{2})} S_{n,n}$$

と定義し,  $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$  とおくと (2.4), (2.9) および [5] Theorem 6.2 より  $f' \in \mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$  である.

$\forall z \in B_{L^*}(1/r)$  についで

$$\begin{aligned}\Phi f'(z) &= \left\langle f'_z, \frac{1}{1+\zeta \cdot z} \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle f'_z, (-\zeta \cdot z)^n \right\rangle.\end{aligned}$$

$z \in M$  のとき  $z^2 = 0$  より

$$\begin{aligned}(2.10) \quad \widetilde{S}_{n,n}(\Phi f': z) &= \left\langle f'_z, (-\zeta \cdot z)^n \right\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_S f_m(s) (-s \cdot z)^n ds\end{aligned}$$

また  $z \in M$  のとき  $(s \cdot z)^n \in H_{n,d}$  より  $\forall s \in S$  について

$$(2.11) \quad \frac{2^n \Gamma(n + \frac{d+1}{2})}{N(n,d) n! \Gamma(\frac{d+1}{2})} (s \cdot z)^n = \widetilde{P}_{n,d}(s \cdot z)$$

であるので (2.9) - (2.11) および (1.4) より  $\forall z \in M$  について

$$\begin{aligned}(2.12) \quad \widetilde{S}_{n,n}(\Phi f': z) &= \int_S f_n(s) (-s \cdot z)^n ds \\ &= \int_S (-2)^n \frac{\Gamma(n + \frac{d+1}{2})}{n! \Gamma(\frac{d+1}{2})} \widehat{S}_{n,n}(s) (-s \cdot z)^n ds \\ &= N(n,d) \int_S \widehat{S}_{n,n}(s) \widehat{P}_{n,d}(s \cdot z) ds \\ &= \widetilde{S}_{n,n}(z).\end{aligned}$$

(1.5) および (2.12) より  $\forall s \in S$  について

$$(2.13) \quad \widehat{S}_{n,n}(\Phi f': s) = \widehat{S}_{n,n}(s).$$

$F, \mathfrak{H}f' \in \mathcal{O}_T(B_{L^*}(1/r))$ だから補題 2.3 および (2.13) より  $\mathfrak{H}f' = F$ . よって  $\mathfrak{H}$  は全射である.

定理 2.1 より  $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^{-1}$  は連続である. よって  $\mathfrak{H}$  は  $\mathcal{O}'(\mathcal{S}[r])$  から  $\mathcal{O}_T(B_{L^*}(1/r))$  への線型位相同型である. (証明終).

Remark.  $T \in \mathcal{O}'(\mathbb{C}^{d+1})$  について Fourier-Borel 変換  $\mathcal{F}$  は次の式で定義される:

$$(2.14) \quad \mathcal{F}T(z) = \langle T_\xi, \exp(\xi \cdot z) \rangle \quad (z \in \mathbb{C}^{d+1}).$$

また  $0 \leq r < \infty$  なる  $r$  について  $\text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; (r; L^*)) = \{F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1}); |F(z)| \exp(-rL^*(z)) < \infty \text{ for } \forall r' > r\}$  とおくと  $F \in \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; (r; L^*))$  について Laplace projective transformation  $\mathcal{L}$  は次の式で定義される:

$$(2.15) \quad \mathcal{L}F(z) = \int_0^\infty F(-zt) e^{-t} dt \quad (z \in B_{L^*}(1/r)).$$

[3] より  $\mathfrak{H} = \mathcal{L} \circ \mathcal{F}$  が成り立ち,  $\text{Exp}_\Delta(\mathbb{C}^{d+1}; (r; L^*)) = \{F \in \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; (r; L^*)); \Delta_z F = F\}$  とおくと [3] [7] および定理 2.2 から 次の線型位相同型が得られる ( $1 \leq r < \infty$ ):

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}'(\tilde{S}[r]) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{Exp}_{\Delta}(\mathbb{C}^{d+1} : (r : L^*)) \\
 \mathbb{I} \downarrow & & \swarrow \sim \\
 \mathcal{O}_{\mathbb{I}}(B_{L^*}(1/r)) & & \mathcal{L}
 \end{array}$$

## References

- [1] L. Drużkowski, Effective formula for the crossnorm in the complexified unitary spaces, *Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń. Prace Mat.* 16 (1974), 47-53.
- [2] K. Ii, On a Bergmann-type transform and a Hilbert space of holomorphic functions, *Tôhoku Math. J.* 38 (1986), 57-69.
- [3] A. Martineau, Équations différentielles d'ordre infini, *Bull. Soc. Math. France* 95 (1967), 109-154.
- [4] M. Morimoto, Analytic functionals on the Lie sphere, *Tokyo J. Math.* 3 (1980), 1-35.
- [5] M. Morimoto, Analytic functionals on the sphere and their Fourier-Borel transformations, *Complex Analysis, Banach Center Publications*, 11, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983, 223-250.
- [6] C. Müller, Spherical Harmonics, *Lecture Notes in Math.* 17, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.
- [7] R. Wada, On the Fourier-Borel transformations of analytic functionals on the complex sphere, *Tôhoku Math. J.*, 38 (1986), 417-432.
- [8] R. Wada and M. Morimoto, A uniqueness set for the

differential operators  $\Delta_z + \lambda^2$ , Tokyo J. Math. 10 (1987), 93-105.

- [9] R. Wada, Fantappi  transformations of analytic functionals on the sphere, preprint.