数理解析研究所講究録
763巻 1991年 8-99

無限次元の等質空間，接続，曲率の概念に対する代数解析的視点
――普遍グラスマン多様体を中心に――

京大数理研 髙﨑金久*（TAKASAKI Kanehisa）

序説

積分可能系を幾何学的に眺めれば何らかの等質空間（あるいはそれに近いもの）が現れる，というのは決して極く最近になって明らかになったことではない．アーベル積分による求積法もその一種とみなせば前世紀に遡ることができる．ソリトン理論が確立された後にも，積分可能系を等質空間上の力学系として理解するという試みは戸田格子やCalogero-Moser系などの質点力学系を中心に一時期大いにはやった．KdV方程式などは偏微分方程式であるから同様に幾何学的に理解しようとするとどうしても無限次元空間が必要になる．それでもソリトン理論の開拓期において既に一種のハミルトン力学系（無限次元の）として理解しようとする試みがなされてい

* 現在 京大教養

る．これはその後非常に詳しい研究が行われ，それがむしろ前述のような質点力学系の研究を促したとも言えるのだが，偏微分方程式の場合には等質空間上の力学系という描像を厳密な形で定式化することがなかなか出来なかった．その点を一気に解決したのが［Sat-Sat］にまとめられている佐藤幹夫の1981年の仕事である．

佐藤のこの仕事はいろいろな方面に影響を及ぼした．そのひとつの頂点は伊達，柏原，神保，三輪の4人組により場の量子論的定式化と無限次元リー代数への応用がなされたことで（［Jim-Miw ］にその大筋の紹介がある），もうひとつは佐藤のこの仕事の基礎づけにはっきりしない点があると考えたSegal と Wilson が Publ. IHES に論文［Seg-Wil］を書いたことである．そのため日本以外では専ら［Seg-Wil］が引用される結果となった．

筆者はしかしながら［Sat-Sat］を佐藤が本来言わんとしていた精神に基づいて読むことがやはり大切ではないかと思う．しかもこれを完成された殿堂としてよりは，むしろ，土台や骨組にこれから固めて行かねばならぬ箇所が散見される，建築中の建物と考えるべきではないかと感じ始めている．それは否定的な意味ではなく，そこにこそ新しい発展の契機が秘められているのだ，と言いたいのである．［Seg-Wil］はそ

こを旧来の数学で埋めてしまったと言えなくもない.

そういう訳で筆者はこの記事の大半を[Sat-Sat]の詳しい解説に充てる. 特に幾何学的な舞台装置の検討を重点的に行う. その代わり微分方程式には殆ど触れない.

筆者がこのような方針を採るのは[Sat-Sat]をKP方程式の解空間の記述という主題から離れて, 無限次元等質空間論のひとつの在り方を示す仕事と読み直したいからである. ここには普遍グラスマン多様体なる或る種の無限次元等質空間がKP方程式を力学系として翻訳するための基本的な舞台として導入されている. 重要なことは, この普遍グラスマン多様体の上に自然に直線束(正確にはGL(1)-主束; 同じことだが)が構成され, これが豊かな内容を産み出している, という点である.

例えばKP方程式をはじめとするいろいろなソリトン方程式が種々の無限次元リー代数(カッツ・ムーディ代数, ヴィラソロ代数, 等)と密接に関係していることは良く知られているが(例えば[Jim-Miw]とその引用文献参照), これらのリー代数を特徴づける交換関係の"中心拡大項"(=リー代数のコサイクル)は普遍グラスマン多様体上の直線束に入る或る接続の曲率形式に起源を持っている. この接続と曲率が微分方程式の方でいえば"τ(タウ)函数"の様々な性質を

陰で規定しているのである．このことは今迄余り明瞭な形では認識されていなかったように思う．本文ではこの点を明らかにすることをひとつの目標にしたい．

無限次元多様体の上に直線束と接続が与えられ，その曲率が底多様体の幾何学的構造の重要な情報を伝える，というこのような設定はここ数年の間に場の量子論の方で"異常（アノマリー）"の問題に関連してしばしば論じられたものと同じ性質のものである．その典型的な状況に於ては底空間は量子化されていない外場の配位空間（例えばゲージ場のゲージ同値類の集合）であり，その上の直線束はこの外場と結合したフェルミ場の量子論的情報を担っている．この直線束が自明束ではないというのが"異常"の内容である．（この方面の日本語による解説としては[尾谷]，[菅野]，[細野]が判り易くて便利である．）この"異常"の存在は回り回って直線束に或る接続を引き起こす[Bis-Fre]．その曲率は"異常"を計るもうひとつの指標となる．

等質性の方は簡単ではない．例えばゲージ場のゲージ同値類の空間は等質性をもちそうにない．しかしこの場合に関して[Mic]が指摘していることは示唆的である．Mickelssonはこの場合のアノマリーのもうひとつの現れ方である"シュウィンガー項"が或る無限次元リー代数のコサイクルと解釈で

きることに注目して，それによるリー代数の拡大（それは2次元時空の場合を除き1次元中心拡大ではなくて無限次元アーベル拡大になる）および対応する群の拡大を構成し，それを介してゲージ同値類の空間の幾何学を理解しようとしている．Mickelssonの主張にはどこまで数学的に厳密に検証したものなのかよく判らない部分もあるが，全体として見るならばこれは充分に検討に値する材料を提供しているように思う．この方向で普遍グラスマン多様体の何らかの"高次元的拡張"を見出せるかも知れない．

普遍グラスマン多様体の高次元的拡張という問題は高次元積分可能系の理論と裏腹の関係にあるので筆者もかなり考えてみたが，素朴なアイディアは全て失敗している（短期共同研究「D加群と非線型可積分系」1987年6月）．その意味で場の量子論から提供される材料はとても魅力的である．ただ，それは微分方程式自体からは遊離して行くかも知れぬ．むしろそこでは汎函数微分方程式が"積分可能系"として登場するのではないか．本来場の量子論では汎函数微分方程式の方が微分方程式よりも基本的なのである．これは代数解析学の新しい地平へ我々を導いてくれるかも知れない．

こういうことはまだ夢物語の段階にある．これを少しずつ現実のプログラムに結びつけて行く作業の手始めとして，

まず普遍グラスマン多様体を徹底的に分析し直してみたいのである．それも，できるだけ場の量子論の"異常"と逐一対応がつけられるような形式に書き直してみることが望ましい．[Jim-Miw]は確かに場の量子論的形式を与えているが，我々が目指すのはもう少し幾何学的なものである．

目次

1. 有限次元のグラスマン多様体と一般線型群の作用

1-1. グラスマン多様体

1-1-1. グラスマン多様体の枠行列表示

以後全ての議論を標数0の可換体 C の上で行う．$m+n$ 次元の線型空間のなかの m 次元部分空間の全体は代数多様体をなす．これを [Sat-Sat] にならって $GM(m, n)$ と書く．これが我々の基本的なグラスマン多様体である．

このグラスマン多様体により具体的な表現を与えるために"枠行列"の概念を導入する．もとになる $m+n$ 次元の線型空間を縦ヴェクトルで表現すると，m 次元部分空間に対して基底をひとつ選びそれを横に並べて $(m+n)\times m$ 行列 ξ をつくることができる．基底のとり方は一意的ではないが，その不定性は右から可逆な m 次正方行列を掛けることで丁度尽くされる．このようにして次の同型対応を得る．

$$GM(m,n) \simeq Fr(m+n, m)/GL(m),$$

$$Fr(m+n,m) = \{(m+n)\times n \text{ 行列 } \xi\ ;\ \mathrm{rank}\,\xi = m\},$$

$$\xi \sim \xi' \iff \exists\, h \in GL(m),\quad \xi h = \xi'.$$

これを $GM(m,n)$ の"枠行列表示"，ここに現れる行列 $\xi \in Fr(m+n, m)$ を"枠行列"と呼ぶことにする．

後に無限次元との対応をつけ易いように，ξ の行および列の番号をそれぞれ $\{-m, -m+1, \cdots, n-1\}$，$\{-m, -m+1, \cdots, -1\}$ の範囲にとることにする：

$$\xi = (\xi_{ij})_{-m \le i < n,\ -m \le j < 0} .$$

1-1-2．プリュッカー座標

枠行列の同値関係を定義する $GL(m)$ を $SL(m)$ でおきかえることによって，次のように $\widetilde{GM}(m,n)$ を定義する：

$$\widetilde{GM}(m,n) := Fr(m+n, m) / SL(m) .$$

自然な射影 $\pi : \widetilde{GM}(m,n) \to GM(m,n)$ によってこれは $GM(m,n)$ 上の $GL(1)$- 主束となる．

$\{-m, -m+1, \cdots, n-1\}$ に値をとる単調増加列 $S = (s_{-m}, s_{-m+1}, \cdots, s_{-1})$ 毎に，ξ から第 $s_{-m}, s_{-m+1}, \cdots, s_{-1}$ 行をとり出して

$$\xi_S := \det(\xi_{s_i j})_{-m \le i,j < 0} \quad (m\ 次行列式)$$

という量を定義する．これは $\widetilde{GM}(m,n)$ 上の正則函数とみなせる．これらを"プリュッカー座標"と呼ぶ．プリュッカー座標

の定義式自体は S が単調増加とは限らないときにも意味をもつ．ξ_S をそのように少し広い意味で使うと記号の経済上便利なことが多い．実際には s_i の間に重複があれば ξ_S は消えるし，重複がなければ s_i 達を単調増加列に並べ替えたものと符号を除いて一致するから，このように ξ_S の定義を一般の S に拡張しても内容的には何ら変わるところはない．

プリュッカー座標全部 $\{\xi_S \,;\, S=(s_{-m},\cdots,s_{-1})\}$ をあわせると正則写像：$\widetilde{GM}(m,n)\to \mathbb{C}^{\binom{m+n}{m}}\setminus\{0\}$ が得られるが，これは実は埋め込みで；その像は次の"プリュッカー関係式"の零点集合で与えられる．

$$\sum_{-m\le i\le 0} (-)^i\, \xi_{(s_{-m}\cdots s_{-2}\,s'_i)}\, \xi_{(s'_{-m}\cdots s'_{i-1}\,s'_{i+1}\cdots s'_0)} = 0$$

1-1-3. アフィン座標系

プリュッカー座標の番号付けに用いた添字列 $S=(s_{-m},\cdots,s_{-1})$ に対して今度は $GM(m,n)$ の次のような部分集合を定義する．

$$GM(m,n)_S := \{\ \xi_S \neq 0\}.$$

これは $GM(m,n)$ のアフィン座標近傍系による被覆を与える：

i) $GM(m,n) = \bigcup_{S} GM(m,n)_S$,

ii) $GM(m,n)_S \simeq C^{mn}$

$$\xi \bmod GL(m) \to \mathbb{W}_S := (\xi_{S;j\to i}/\xi_S)_{i\in S^c, j\in S} \ ,$$

ここで S^c は $\{-m,\cdots,n-1\}$ における S の補集合，$\xi_{S;j\to i}$ は

$$\xi_{S;j\to i} := \sum_{-m\le k<0} \delta_{s_k j}\, \xi_{(\cdots s_{k-1}\, i\, s_{k+1}\cdots)}$$

という量をあらわす．これは要するに $\xi_S = \xi_{(s_{-m}\cdots s_{-1})}$ において添字列中の j を i で置き替えたものに他ならない．但し j が S の中に無かったり，あるいは j を i に置き換えた結果として添字に重複ができたりする場合には $\xi_{S;j\to i} = 0$ とする，という約束も上の定義には組み込まれている．$\mathbb{W}_S$ は S を行の添字集合，S^c を列の添字集合とする $m\times n$ 行列である．（そのように考える理由はすぐあとで明らかになる．）

各アフィン座標の様子をもう少し詳しく説明する．全添字集合 $\{-m, -m+1, \cdots, -1\}$ 上の置換によりこれらのアフィン座標系を互いに入れ換えることができるので，どれを考えてもよいのであるが，応用上重要なのは

$$S = \phi := (-m, -m+1, \cdots, -1)$$

の場合なのでこれを例にとる．このアフィン近傍 $GM(m,n)_\phi$

では$\xi_\phi \neq 0$なので枠行列ξに右から可逆正方行列を適当に掛けることによりξを

$$\xi = \begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & 1 \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \hline (*) \end{array}\right) & \begin{matrix} -m \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ n-1 \end{matrix} \end{array} \quad \mathrm{mod}\ GL(m)$$

という形にもって行くことができる．(*)の部分は，定義に戻って実際に行列式を計算してみればわかるように，実は$\mathbb{W}_\phi$に等しい：

$$(*) = \mathbb{W}_\phi = (\xi_{\phi;j\to i}/\xi_\phi)_{0\le i<n,\ -m\le j<0}$$

ξを上のような形にもって行くと，それ以上右から可逆行列を掛けて変形する余地はなくなる．このような特別な形に選ばれたξを"正規化された枠行列"と呼ぶことにする．一般のSに対しても全く同様のことが言える．

アフィン被覆$\{GM(m,n)_S\}$はまた，$GL(1)$-主束π: $\widetilde{GM}(m,n) \to GM(m,n)$の局所自明化を与える被覆でもある：

$$\pi^{-1}(GM(m,n)_S) \simeq GM(m,n)_S \times (\mathbb{C}\setminus\{0\}) \simeq \mathbb{C}^{mn} \times (\mathbb{C}\setminus\{0\})$$

$$\xi \ \mathrm{mod}\, SL(m) \leftrightarrow (\xi \ \mathrm{mod}\, GL(m), \xi_S) \leftrightarrow (\mathbb{W}_S, \xi_S)$$

ξ_Sはこのように$\pi|_{\pi^{-1}(GM(m,n)_S)}$のファイバーの座標を与える．

1-2. 一般線型群の作用とその無限小表現

1-2-1. 一般線型群の作用の記述

$GL(m+n)$ は $Fr(m+n, m)$ に左から作用するから，$GM(m, n)$ へも自然に作用する．プリュッカー座標 ξ_S によってこの作用を書くと

$$(g\cdot\xi)_S = \sum_{S'} g_{SS'}\xi_{S'} \qquad (S, S' \text{は単調増加添字列})$$

$$g_{SS'} := \det(g_{s_i s'_j})_{-m\le i,j<0} \quad (S=(s_i),\ S'=(s'_i))$$

となる．(これは行列式の基本的な性質.) $g \to (g_{SS'})$ は $GL(m+n)$ から $GL(\binom{m+n}{m})$ への群準同型を与える．

1-2-2. 無限小表現の導出

$GL(m+n)$ の作用からそのリー代数 $\mathfrak{gl}(m+n)$ の無限小作用（= $GM(m,n)$ 上のヴェクトル場への表現）へうつるには $g(\varepsilon) = \exp\varepsilon\gamma$，$\gamma\in\mathfrak{gl}(m+n)$，という1径数部分群を考えて mod ε^2 で計算してやればよい．これをプリュッカー座標を用いて実行する．すると，

$$(\exp\varepsilon\gamma\cdot\xi)_S = \xi_S + \varepsilon\delta(\gamma)\xi_S, \quad \bmod \varepsilon^2$$

$$\delta(\gamma)\xi_S := \frac{d}{d\varepsilon}(\exp\varepsilon\gamma\cdot\xi)_S\Big|_{\varepsilon\to 0}$$

$\delta(\gamma)$が求める無限小表現で，これは ξ_S 達の生成する可換環 $\mathbb{C}[\xi_S]$ に導分(derivation)として作用する．しかもプリュッカー関係式の生成するイデアル $I_{Plü} \subset \mathbb{C}[\xi_S]$ を保つ：

$$\delta(\gamma) I_{Plü} \subset I_{Plü} \qquad \forall \gamma \in gl(m+n).$$

従って $\delta(\gamma)$は $\mathbb{C}[\xi_S]/I_{Plü}$ 上の導分を定めるわけだが，$\mathbb{C}[\xi_S]/I_{Plü}$ はそもそも $\widehat{GM}(m,n) \cup$ 1点($\xi_S=0, {}^\forall S$ に対応)のアフィン代数多様体としての座標環を与えるのであるから(これが1-1-2節の最後に注意したことの，より正確な表現である)，このことはとりも直さず $\delta(\gamma)$ が $\widehat{GM}(m,n)$ 上の大域的ヴェクトル場を定めるということである．

具体的に γの成分 $\gamma=(\gamma_{ij})$ を使って書いてみると

$$\delta(\gamma)\,\xi_S = \sum_{i,j} \gamma_{ij}\, \xi_{S;i\to j}$$

となることがすぐにわかる．(このことは以後の議論の基礎となるので，読者は是非とも自分でチェックしてみられたい.)

1-2-3. 交換関係

実は $\delta(\gamma)$ は $gl(m+n)$の"反表現"である．実際，次の交換関係が導かれる：

$$[\delta(\gamma), \delta(\gamma')] = \delta([\gamma', \gamma])$$

このようなことはしばしば起こる．

交換子の符号をいちいち気にするのも面倒なので，次のようなことを考える．$\mathfrak{gl}(m+n)$ の基底として行列単位

$$E_{ij} := \begin{array}{cc} & j \\ i) & \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \quad ((i,j)\text{成分のみ}1,\text{他は}0)$$

をとり，

$$L_{ij} := \delta(E_{ji})$$

とおく．添字の順序をわざと入れ換えたのがミソで，これにより $\{E_{ij}\}$ と $\{L_{ij}\}$ は同じ形の交換関係に従う．

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{kj} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}$$

$$[L_{ij}, L_{kl}] = \delta_{kj} L_{il} - \delta_{il} L_{kj}$$

1-2-4. アフィン座標による表示

ここまでは $\delta(\gamma)$ をプリュッカー座標 ξ_S への作用のしかたで把握してきた．これは $GM(m,n)$ というよりは $\widetilde{GM}(m,n)$ への無限小作用というべきであった． $GM(m,n)$ そのもの及び π のファイバー方向についてそれぞれ考えてみることが後に必要になってくる．そのためには座標として 1-1-3 節で説明したようなアフィン座標をとり，それについて $\delta(\gamma)$ を具体

的に書き下してみるのがよい．

ここでも実際の計算は $GM(m,n)_\phi$ 上で行う．この上での $\pi: \widetilde{GM}(m,n) \to GM(m,n)$ の局所自明化は次の通りであった：

$$\pi^{-1}(GM(m,n)_\phi) \simeq GM(m,n)_\phi \times (\mathbb{C}\setminus\{0\}) \simeq \mathbb{C}^{mn} \times (\mathbb{C}\setminus\{0\})$$

$$\xi \bmod SL(m) \leftrightarrow (\xi \bmod GL(m),\ \xi_\phi) \longleftrightarrow (\mathbb{W}_\phi,\ \xi_\phi)$$

$\mathbb{W}_\phi$ の成分を

$$\mathbb{W}_\phi = (w_{ij})_{0\le i<n,\, -m\le j<0},$$

$$w_{ij} = \xi_{\phi;j\to i} / \xi_\phi$$

と書いて，w_{ij}，ξ_ϕ に対する前述の $\delta(\gamma)$ の作用を計算すると次のようになる：

$$\delta(\gamma) w_{ij} = \sum_{-m\le k,l<n} w_{ik}\gamma_{kl} w_{lj}$$

$$\delta(\gamma)\xi_\phi = \sum_{\substack{-m\le i<n \\ -m<j<0}} \gamma_{ji} w_{ij}\xi_\phi$$

但しここで w_{ij} の定義されている添字の範囲を次のように拡張している：

$$w_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & (-m\le i,j<0) \\ -\delta_{ij} & (0\le i,j<n) \end{cases}$$

$\delta(\gamma)w_{ij}$ が ξ_ϕ を含まない形で書けていることに注意されたい．このことは $\delta(\gamma)$ が $GM(m,n)_\phi$ 上のヴェクトル場を矛盾なく定め

ていることを意味する．これは要するに $\pi_* \delta(\gamma)$ （π による押し出し）に他ならない．w_{ij} に対する作用の公式は従って

$$\pi_* \delta(\gamma) = \sum_{\substack{0 \le i < n \\ -m \le j < 0}} \sum_{-m \le k, l < n} w_{ik} \gamma_{kl} w_{lj} \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \quad (\text{on } GM(m,n)_\phi)$$

という風にも読める．ξ_ϕ に対する作用の公式の意味については後に議論する．

1-2-5. 枠行列に即した表示

$GM(m,n)_\phi$ 上の座標を使った $\delta(\gamma)$ の表示について議論を続けよう．$GM(m,n)_\phi$ の点を代表する正規化された枠行列の形については 1-1-3 で論じた．正規化された ξ と W_ϕ の成分 w_{ij} との関係は，1-2-4 節で注意したように w_{ij} の添字の動くはんいを拡張しておくと，次のように簡単に書ける．

$$\xi = (w_{ij})_{-m \le i < n,\, -m \le j < 0} .$$

この行列を使って $\delta(\gamma) w_{ij}$ のもうひとつの導出法を与えよう．

γ を添字の正負に従って次のようにブロック分けする．

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} -m \cdots -1 & 0 \cdots n-1 \end{array} & \\ \gamma = \left(\begin{array}{c|c} \gamma_{--} & \gamma_{-+} \\ \hline \gamma_{+-} & \gamma_{--} \end{array} \right) & \begin{array}{c} -m \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \end{array}$$

同じようにξもブロック分けすると:

$$\xi = \left(\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{W}_\phi}\right) \qquad \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (m\times m \text{単位行列})$$

さて$\delta(\gamma)$はつまるところ$\exp\varepsilon\gamma$の作用を$\bmod \varepsilon^2$で書いたものに他ならないから,ξに対して直接に$\exp\varepsilon\gamma$の作用を調べてみる.すると

$$e^{\varepsilon\gamma}\xi = \begin{pmatrix} \mathbb{1} + \varepsilon(\gamma_{--} + \gamma_{-+}\mathbb{W}_\phi) \\ \mathbb{W}_\phi + \varepsilon(\gamma_{+-} + \gamma_{++}\mathbb{W}_\phi) \end{pmatrix} \quad \bmod \varepsilon^2$$

右辺は正規化されていないから,右から$\mathbb{1} + \varepsilon(\gamma_{--} + \gamma_{-+}\mathbb{W}_\phi)$の逆行列を掛けて正規化してやると

$$\sim \begin{bmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{W}_\phi + \varepsilon(\gamma_{+-} + \gamma_{++}\mathbb{W}_\phi - \mathbb{W}_\phi\gamma_{--} - \mathbb{W}_\phi\gamma_{-+}\mathbb{W}_\phi) \end{bmatrix}$$

$$\bmod \varepsilon^2$$

つまり,$\bmod \varepsilon^2$では$\mathbb{W}_\phi$は

$$\mathbb{W}_\phi \longrightarrow \mathbb{W}_\phi + \varepsilon(\gamma_{+-} + \gamma_{++}\mathbb{W}_\phi - \mathbb{W}_\phi\gamma_{--} - \mathbb{W}_\phi\gamma_{-+}\mathbb{W}_\phi)$$

と変化する.このことから

$$\delta(\gamma)\mathbb{W}_\phi = \gamma_{+-} + \gamma_{++}\mathbb{W}_\phi - \mathbb{W}_\phi\gamma_{--} - \mathbb{W}_\phi\gamma_{-+}\mathbb{W}_\phi$$

行列成分毎に計算してみるとわかるように，これは確かに前節の $\delta(\gamma)w_{ij}$ の公式を再現している．（上の形に書くと行列型リッカチ方程式との関係は一目瞭然であろう．[Tak]参照）

$\delta(\gamma)\xi_\phi$ の方も実は同じように導ける．上の枠行列による計算を考えれば $e^{\varepsilon\gamma}$ の作用の下で ξ_ϕ は

$$\xi_\phi \longrightarrow \xi_\phi \det(1+\varepsilon(\gamma_{--}+\gamma_{-+}W_\phi)) \mod \varepsilon^2$$

と変化するはずである．（ξ_ϕ の定義を思い出すこと．）ところでここに現れる行列式は $\mathrm{mod}\ \varepsilon^2$ で

$$\det(1+\varepsilon(\gamma_{--}+\gamma_{-+}W_\phi)) = 1+\varepsilon\,\mathrm{tr}(\gamma_{--}+\gamma_{-+}W_\phi)$$

と計算できる．従って

$$\delta(\gamma)\xi_\phi = \mathrm{tr}(\gamma_{--}+\gamma_{-+}W_\phi)\xi_\phi$$

である．これも前節の結果に一致している．

1-3. 接続と曲率

無限小作用 $\delta(\gamma)$ を 1-2-4, 1-2-5 節のように $\pi:\widetilde{GM}(m,n) \to GM(m,n)$ のファイバーと底空間の２方向に分けて考えるこ

とは，幾何学的には，この $GL(1)$-主束の接続を考えることに他ならない．例によって $GM(m,n)_\phi$ 上のアフィン座標を使ってこのことを眺めてみる．

1-3-1. 接続としての解釈

局所自明化 $\pi^{-1}(GM(m,n)_\phi) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{mn} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$, ξ mod $SL(m) \to (W_\phi = (w_{ij}), \xi_\phi)$, を使って $\delta(\gamma)$, $\gamma \in \mathfrak{gl}(m+n)$, を表現すると，

$$\delta(\gamma) = \sum_{\substack{0 \le i < n \\ -m \le j < 0}} (\delta(\gamma) w_{ij}) \frac{\partial}{\partial w_{ij}} + (\delta(\gamma) \xi_\phi) \frac{\partial}{\partial \xi_\phi}$$

$$\delta(\gamma) w_{ij} = \cdots \qquad (\text{1-2-4, 1-2-5節参照})$$

$$\delta(\gamma) \xi_\phi = \cdots \qquad (\quad \text{〃} \quad)$$

という形に書くことができた．このうち $\partial/\partial w_{ij}$ を含む部分は係数がファイバー座標 ξ_ϕ に依らないので $\pi_* \delta(\gamma)$（$GM(m,n)$ へのヴェクトル場の押し出し）と同一視できる．

$$\pi_* \delta(\gamma) = \sum_{\substack{0 \le i < n \\ -m \le j < 0}} (\delta(\gamma) w_{ij}) \frac{\partial}{\partial w_{ij}}$$

残る部分はファイバー方向のヴェクトル場だが，これは

$$(\delta(\gamma) \xi_\phi) \frac{\partial}{\partial \xi_\phi} = (w_{ij}\text{ 達のみを含む部分}) \xi_\phi \frac{\partial}{\partial \xi_\phi}$$

という形をしているので自然に $\mathbb{C}\setminus\{0\} = GL(1)$ 上の不変ヴェクトル場とみなすことができる．こうして結局 $\delta(\gamma)$ はこの座標系で

$$\delta(\gamma) = \pi_*\delta(\gamma) + \omega(\gamma)\,\xi_\phi\frac{\partial}{\partial\xi_\phi}$$

$$\omega(\gamma) := \sum_{\substack{-m\le i<n \\ -m\le j<0}} \gamma_{ji}\, w_{ij} = \mathrm{tr}(\gamma_{--}+\gamma_{-+}W_\phi)$$

という形をしていることがわかる．

この式を我々は $GL(1)$-主束 $\pi: \widetilde{GM}(m,n)\to GM(m,n)$ の上に接続 ∇ が与えられていて $\delta(\gamma)$ は $\pi_*\delta(\gamma)$ 方向の共変微分 $\nabla_{\pi_*\delta(\gamma)}$ に他ならず，また $\omega(\gamma)$ は接続係数である，というように解釈したい．

$$\delta(\gamma) \longleftrightarrow \nabla_{\pi_*\delta(\gamma)} \qquad \omega(\gamma) \longleftrightarrow \text{接続係数}$$

一般にファイバー束 $\pi: F\to B$ の接続とは B 上の接ヴェクトルを F 上の接ヴェクトルに持ち上げるやり方を各点において指定したものに他ならない．上の例では確かに $GM(m,n)_\phi$ 上の接ヴェクトル $\pi_*\delta(\gamma)$ が $\omega(\gamma)$ を介して $\pi^{-1}(GM(m,n)_\phi)$ 上の接ヴェクトル $\delta(\gamma)$ に持ち上げられている．

$\pi_*\delta(\gamma)$ という接ヴェクトル（実際にはヴェクトル場）は特殊なもののように思われるかも知れないが，そうではない．$GM(m,n)$ は一般線型群の等質空間なので，$\pi_*\delta(\gamma),\ \gamma\in\mathfrak{gl}(m+n)$,

は事実上接空間を張ってしまう.

このようにして $\delta(\gamma)$ を $GL(1)$-主束上の接続として解釈できることがわかる.

1-3-2. 曲率は消えている

接続が与えられれば当然次には曲率が問題になる. 実は $\delta(\gamma)$ を接続とみなすときにはその曲率は消えている.

一般にファイバー束 $\pi: F \to B$ の接続 ∇ に対して曲率 Ω は $\overset{2}{\Lambda} T^*B \otimes T_{ver}F$ (ファイバー方向の接ヴェクトル全体) の切断であって, B 上のヴェクトル場 X, Y と縮約したもの $\Omega(X, Y)$ は

$$\Omega(X, Y) := [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$$

で与えられる, ファイバーに接したヴェクトル場である.

これを $\nabla_X \leftrightarrow \delta(\gamma)$, $\nabla_Y \leftrightarrow \delta(\gamma')$, $\gamma, \gamma' \in gl(m+n)$, に適用すると

$$[\nabla_X, \nabla_Y] \leftrightarrow [\delta(\gamma), \delta(\gamma')]$$

$$[X, Y] \leftrightarrow [\pi_*\delta(\gamma), \pi_*\delta(\gamma')]$$

という対応関係になっている. ところで 1-2-3 節で示した交換関係により

$$[\delta(\gamma), \delta(\gamma')] = \delta([\gamma', \gamma]),$$

その $\partial/\partial w_{ij}$ のみ含む成分をとり出すと

$$[\pi_*\delta(\gamma), \pi_*\delta(\gamma')] = \pi_*\delta([\gamma', \gamma])$$

となることがわかる．特に我々の接続の解釈によってこれは

$$\nabla_{[X,Y]} \longleftrightarrow \delta([\gamma', \gamma])$$

という対応関係を意味する．以上により実は曲率が消えていることがわかった．

ここで見たように，接続と見るときの $\delta(\gamma)$ の曲率が消えているということは $\delta(\gamma)$ がリー代数 $gl(m+n)$ の“反表現”であることの言いかえにすぎない．後に無限次元へ移行するときに，この曲率が消えず，リー代数の（反）表現にならなくなる例を扱う．

2．普遍グラスマン多様体

以下では普遍グラスマン多様体について大雑把に解説する．詳細は [Sat-Sat]，[Sat-Nou]，[Seg-Wil] など参照．

2−1. 枠行列表示

普遍グラスマン多様体 UGM とその上の GL(1)-主束 $U\widetilde{GM}$ は前出の $GM(m,n)$, $\widetilde{GM}(m,n)$ の $m,n\to\infty$ における極限の一種である. 枠行列による表示を次のように与える:

$$UGM := Fr(\mathbb{Z}, \mathbb{N}^c)/GL(\mathbb{N}^c),$$
$$U\widetilde{GM} := Fr(\mathbb{Z}, \mathbb{N}^c)/SL(\mathbb{N}^c),$$

ここで

$$\mathbb{Z} := \text{整数全体}, \quad \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \cdots\}, \quad \mathbb{N}^c := \{-1, -2, \cdots\},$$

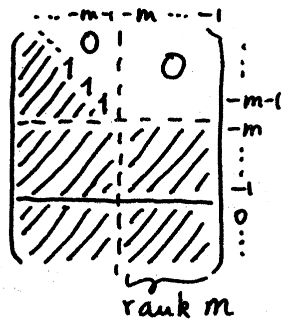
$$Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c) := \{\xi = (\xi_{ij})_{i\in\mathbb{Z}, j\in\mathbb{N}^c} ;\ \xi_{ij}\in C,\ \exists m\ \forall i<-m, \forall j\geq i\ \ \xi_{ij}=\delta_{ij},\ \mathrm{rank}(\xi_{ij})_{\substack{-m\leq i<\infty \\ -m\leq j<0}} = m\},$$

$$GL(\mathbb{N}^c) := \{h = (h_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}^c} ;\ h_{ij}\in C,\ \exists m\ \forall i<-m, \forall j\geq i\ \ h_{ij}=\delta_{ij},\ \ (h_{ij})_{-m\leq i,j<0}\in GL(m)\},$$

$$SL(\mathbb{N}^c) := \{h = (h_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}^c} ;\ h_{ij}\in C,\ \exists m\ \forall i<-m\ \forall j\geq i\ \ h_{ij}=\delta_{ij},\ \ (h_{ij})_{-m\leq i,j<0}\in SL(m)\}.$$

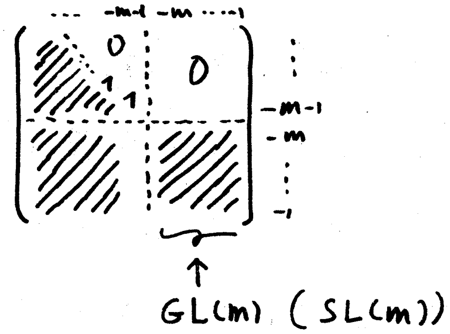
絵を描くと大体次のような感じになっている.

$$\xi\in Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c) \Longleftrightarrow \quad \xi =$$



$h \in GL(\mathbb{N}^c) \iff h =$

$(h \in SL(\mathbb{N}^c))$



このことをもう少し抽象的な定義から導くこともできる．[Sat-Nou] 参照．

$GM(m,n)$，$\widetilde{GM}(m,n)$ は自然に UGM，$\widetilde{UGM}$ の中に埋め込まれる．その対応は：

$$\xi_{(m,n)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} -m \cdots -1 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} & & \\ & \xi_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} & \begin{array}{c} -m \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \end{array} \longleftrightarrow \xi = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \\ 0 & & \boxed{\xi_{(m,n)}} \\ & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vdots \\ -m-1 \\ -m \\ \vdots \\ n-1 \\ n \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

UGM，$\widetilde{UGM}$ を枠行列の同値類として実現するやり方は実は上のものに限らない．むしろ応用上は上の $Fr(\mathbb{Z}, \mathbb{N}^c)$ からはみ出すような枠行列の方が頻繁に現れる．上に示したのは最も"小さい"舞台設定である．集合として同じものが得られるならば何でもいいじゃないか，と思われるかも知れないが決してそうではなく，ここにこそ後に見るような無限次元固有の微妙な状況をひき起こす原因が隠れている．

我々は [Sat-Sat] の精神に従って，出発点においては上のような枠行列表示を採用し，$Fr(\mathbb{Z}, \mathbb{N}^c)$ からはみ出す枠行

列が現れたらその都度適当に処理する，という方針をとる．考えてみればこれは実に日本的な発想ではある．そういう処法は西欧の発想になじまないためだろうが，[Seg-Wil]はヒルベルト空間を基礎に理論を構築している．[Sat-Sat]の言わんとするところをヒルベルト空間に代わって明文化するような，何か巧い概念がそろそろ開発されてもよいように思う．

2-2. プリュッカー座標

$Fr(\mathbb{Z}, \mathbb{N}^c)$に属する枠行列$\xi = (\xi_{ij})_{i\in\mathbb{Z}, j\in\mathbb{N}^c}$に対して有限次元の場合と同様にプリュッカー座標を定義する．添字列Sとしては$\mathbb{N}^c$で番号付けされた整数列$(s_i)_{i\in\mathbb{N}^c}$でほとんどすべての（つまり有限個を除く）$i\in\mathbb{N}^c$に対して$s_i = i$となっているものをとる．これは$\mathbb{N}^c$から$\mathbb{Z}$への写像$s: \mathbb{N}^c \to \mathbb{Z}$で有限個の$i\in\mathbb{N}^c$を除いて$s(i) = i$となるもの，と言ってもよい．このような$S$に対して

$$\xi_S := \lim_{m\to\infty} \det(\xi_{s_i j})_{-m\le i,j<0}$$

と定義する．ξの形に対する仮定から，実は$\det(\xi_{s_i j})_{-m\le i,j<0}$は$m$が充分に大きいとき一定になる（各自チェックしてみよ）．従って上の極限はstable limitとして確定する．（ここには何の位相的議論も関与しないことに注意されたい．）

ξ_S は $S=(s_i)_{i\in\mathbb{N}^c}$ の成分の置換に関して完全交代性をもつ．特に，s_i の間に重複があれば $\xi_S=0$ であり，また重複が無ければ符号を除いて単調増加に並べ換えたものに一致する．従って実質的には単調増加な S に対する ξ_S ですべての情報は出尽している．この辺は有限次元の場合と何ら変わらない．

プリュッカー関係式も同様である．すなわち ξ_S は

$$\sum_{i\leq 0}(-)^i\,\xi_{(\cdots s_{-3}\,s_{-2}\,s'_i)}\,\xi_{(\cdots s'_{i-1}\,s'_{i+1}\cdots s'_0)}=0$$

をみたし，逆にこのような関係式をすべてみたすような ξ_S はある $\xi\in Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c)$ に対するプリュッカー座標となる．上式の左辺では実際には有限個の項しか生き残らないので，これは無限個の座標 $\{\xi_S\}$ に対する無限個の双線型関係式であるが純代数的に意味をもつ．$\{\xi_S\}$ は $\widetilde{UGM}$ から $C^\infty\setminus\{0\}$ への埋め込みを与え，これによって $\widetilde{UGM}$，UGM は言わば無限次元の代数多様体となる．

ここで無限次元の（代数）多様体とは正確には何なのか，ということについては論じない．ただ，基本的には2つの両極端の考え方があることを注意しておく．ひとつはシャファレヴィチの無限次元代数多様体と呼ばれるもので，大雑把に言えば有限次元代数多様体の帰納的極限として定義される．これはカッツ・ムーディ代数に対応する群の構成に応用され

るそうだが[Kac]，その根底にあるのは指数函数を巾零元に対してのみ考えるという立場である．[Sat-Sat] にUGM^{fin} という UGM の部分集合が導入されているが，これは$GM(m,n)$ の $m,n\to\infty$ における帰納的極限とみなせるのでシャファレヴィチ的な無限次元代数多様体の例になっている．一方UGMの方はむしろ$GM(m,n)$の射影的極限というべきもので（但しこれはやや不正確），シャファレヴィチとは対極にある．このような有限次元多様体の射影的極限として理解される無限次元多様体は微分幾何学（特にゲリファント学派の形式的幾何学）の方で研究されて来た[Ber-Roz]．いわゆるジェット空間はその典型的な例である．微分方程式系の一般理論を幾何学的に構築しようとするときには，従って，第一義的に現れるのは射影的極限の方であり，帰納的極限の方はUGMの中のUGM^{fin}のようにその中の特別な点の集まり（一般の点ではない）に関与していて，何らかの自明でない考察の後にはじめてその存在が言えるという代物であることが多い．だから理論の外枠（形式的側面）を固めるときには射影的極限による方が良い．ただ，代数幾何学をそのような方向に拡張して行くという試み（筆者はそういうことはとても大切だと思うのだが）には余りお目にかかったことが無い．2-1-1 節の最後に触れたことはこの辺と関連しているはずだが．

2-3. アフィン座標系

有限次元の場合に習って

$$UGM = \bigcup_{S} UGM_S\ , \quad (S\text{は単調増加列全体をわたる})$$
$$UGM_S := \{\xi \bmod GL(\mathbb{N}^c)\ ;\ \xi_S \neq 0\}$$

とあらわす．（[Sat-Sat]では UGM^Y というものが導入されているが，これは UGM の単体分割を与えるもので，我々が今問題にしているアフィン座標近傍による被覆とは別物である；記号上紛らわしいので申し訳無いが，以下では単体分割については一切触れない．）各 UGM_S は写像

$$\xi \bmod GL(\mathbb{N}^c) \to \mathbb{W}_S := (\xi_{S;j\to i}/\xi_S)_{i\in S^c,\, j\in S}$$

により無限次元のアフィン空間（$\simeq S^c \times S$ 行列の空間）と同型になる．これがアフィン座標系を与える．但しここで

$$S^c := \mathbb{Z} \setminus S \quad (S\subset \mathbb{Z}\text{ と見るときの補集合})$$
$$\xi_{S;j\to i} := \sum_{k<0} \delta_{s_k j}\, \xi_{(\cdots\, s_{k-1}\, i\, s_{k+1} \cdots)}$$

とおいた．その意味するところは有限次元の場合と同様．

特に重要な

$$S = \phi := (\cdots -3\ -2\ -1) \quad (\phi(i) = i \quad \forall i \in \mathbb{N}^c)$$

の場合についてもう少し具体的に説明する．これも有限次元

の場合と同様であって，$\xi_\phi \neq 0$ なる $\xi \in Fr(\mathbb{Z}, \mathbb{N}^c)$ に対しては右から適当な $GL(\mathbb{N}^c)$ の元をかけることにより"正規化"でき，

$$\xi = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc} \ddots & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \\ \hline & & \\ & (*) & \\ & & \end{array}\right) & \begin{array}{c} \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \cdots & -2 & -1 \end{array} & \end{array} \quad \bmod GL(\mathbb{N}^c)$$

$$(*) = \mathbb{W}_\phi = (\xi_{\phi; j \to i} / \xi_\phi)_{i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}^c}$$

となる．

UGM_S の上では $GL(1)$-主束 $\pi : \widetilde{UGM} \to UGM$ も自明化されている．

$$\pi^{-1}(UGM_S) \simeq UGM_S \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \simeq Mat(S^c, S, \mathbb{C}) \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$$

$$\xi \bmod SL(\mathbb{N}^c) \leftrightarrow (\xi \bmod GL(\mathbb{N}^c), \xi_S) \leftrightarrow (\mathbb{W}_S, \xi_S)$$

ここまでは有限次元の場合と全く平行に議論が進行した．それでは線型群の作用も同じ様に扱えるのかと言うと，そうは問屋が卸さない，というのが次節で明らかになることである．そもそも無限次元における一般線型群とは何なのか，というところからして問題である．実はそれをどうとるかに依って答が違ってくる．

3. 普遍グラスマン多様体への線型群の作用

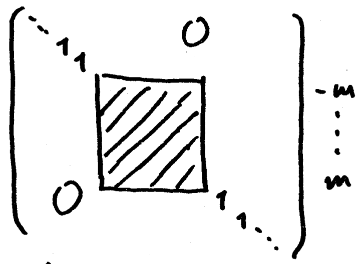
3-1. "有限型" 行列の作用

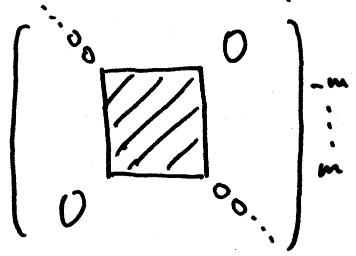
次のようなものを考える:

$$
\begin{aligned}
GL_{fin}(\mathbb{Z}) := \{\, g = (g_{ij}) \in \mathrm{Mat}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, C) \;;\; \exists m \\
g_{ij} = \delta_{ij} \text{ unless } |i| \le m \text{ and } |j| \le m, \\
(g_{ij})_{-m \le i,j \le m} \in GL(2m) \,\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
gl_{fin}(\mathbb{Z}) := \{\, \gamma = (\gamma_{ij}) \in \mathrm{Mat}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, C) \;;\; \exists m \\
g_{ij} = 0 \text{ unless } |i| \le m \text{ and } |j| \le m \,\}.
\end{aligned}
$$

図示すれば次のような感じになっている:

$g \in GL_{fin}(\mathbb{Z}) \iff g =$ 

$\gamma \in gl_{fin}(\mathbb{Z}) \iff \gamma =$ 

$GL_{fin}(\mathbb{Z})$, $gl_{fin}(\mathbb{Z})$ はそれぞれ群, リー代数をなす. "有限型" の名のとおり, これらは有限次元の一般線型群とそのリー代

数をサイズの制限を取り払ってそのまま無限次元に埋め込んだものである．$GL_{fin}(\mathbb{Z}) = \varinjlim GL(m+n)$ であり，これはシャファレヴィッチの意味の無限次元線型代数群になっている．

$GL_{fin}(\mathbb{Z})$ は $Fr(\mathbb{Z}, \mathbb{N}^c)$ に作用する．従って $GL(\mathbb{N}^c)$ あるいは $SL(\mathbb{N}^c)$ の右作用に関する同値類をとることで UGM と $\widetilde{UGM}$ にも作用ができる．

この作用をプリュッカー座標 ξ_S を使って表わすことも有限次元の場合と全く同様であって，

$$g \cdot \xi_S = \sum_{S'} g_{SS'} \xi_{S'} \qquad (S' \text{は単調増加})$$

$$g_{SS'} := \det(g_{s_i s'_j})_{i,j \in \mathbb{N}^c} \quad (S = (s_i)_{i \in \mathbb{N}^c},\ S' = (s'_i)_{i \in \mathbb{N}^c})$$

となる．ここで $\det(g_{s_i s'_j})_{i,j \in \mathbb{N}^c}$ は $\lim_{m,n \to \infty} \det(g_{s_i s'_j})_{-m \le i,j < n}$ と解釈する．ξ_S の定義に於ける行列式と同様，この行列式も m, n を充分大きくとると一定の値をとるので stable limit として意味が確定する．$\sum_{S'} g_{SS'} \xi_{S'}$ は実際には有限和となる．以上のようにここには何ら位相的要素は現れない．

無限小作用の導出も有限次元と全く同様である．$g(\varepsilon) = \exp \varepsilon\gamma$, $\gamma \in gl_{fin}(\mathbb{Z})$，という形式的1パラメータ群の作用を $\bmod\ \varepsilon^2$ で考えることにより，$\gamma = (\gamma_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ のプリュッカー座標への無限小作用は

$$\delta(\gamma)\xi_S = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \gamma_{ij}\, \xi_{S;\, i\to j}$$

となる．特に行列単位 $E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ i) & \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$ （(i,j)成分にのみ 1，他は 0 ）に対する無限小変換を添字を入れかえて

$$L_{ji} := \delta(E_{ij}) \qquad (i,j\in\mathbb{Z})$$

と定義すると，L_{ij} は E_{ij} と同じ交換関係に従う．

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{kj}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}$$

$$[L_{ij}, L_{kl}] = \delta_{kj}L_{il} - \delta_{il}L_{kj}$$

一般に $\gamma \mapsto \delta(\gamma)$ は $\mathfrak{gl}_{fin}(\mathbb{Z})$から $\widetilde{UGM}$ 上のヴェクトル場へのリー代数"反準同型"になる：

$$[\delta(\gamma), \delta(\gamma')] = \delta([\gamma', \gamma]) \qquad (\gamma, \gamma' \in \mathfrak{gl}_{fin}(\mathbb{Z}))$$

要するに，有限次元と全く同じことが無限次元でも有限型の行列の作用については成立する．アフィン座標系による具体的な表示も同様にうまく行く．だから"接続"としての解釈も出来て"曲率 ＝ 0"ということも言えそうに見える．

ところが UGM, $\widetilde{UGM}$ に関してはこれだけでは"接続"の解釈は実は出来ない．理由は，UGM には $GL_{fin}(\mathbb{Z})$ が推移的に作用していないことによる．実際，UGM の"原点"

$$\xi = \left(\begin{array}{c} \begin{smallmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & 1_1 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 \end{array}\right) \mod GL(N^c)$$

の $GL_{fin}(\mathbb{Z})$ による軌道は UGM 全体にはならなくて，[Sat-Sat]の言うところの UGM_{fin} ($= \varinjlim GM(m, n)$) になる．だから UGM, $\widetilde{UGM}$ のかわりに UGM_{fin}, $\widetilde{UGM}_{fin}$ を考えれば問題はなく，"接続"としての解釈が可能で"曲率"が消えることが従う．これは要するに m, n を固定しないであらゆる $GM(m, n)$ について同時に2節の議論を展開する，という以上のことではない．

3-2. 普遍グラスマン多様体の等質性の問題

こうして，UGM, $\widetilde{UGM}$ というのは見掛けは簡単だがそう一筋縄ではいかないものであることが判ってくる．そもそも UGM, $\widetilde{UGM}$ の代わりに UGM_{fin}, $\widetilde{UGM}_{fin}$ を考えれば"等質空間"になるから問題はない，と言うが，一方では UGM, $\widetilde{UGM}$ 固有の代数的位相というものもあって，それは言わば有限次元の Zariski位相の射影的極限であるが，それに関しては UGM_{fin} は稠密部分集合をなす．（KP方程式[Sat-Sat]との対応で言えばこれは任意の τ 函数が多項式 τ 函数で近似されるということに他ならない．）稠密部分集合がそれ自身代数的な意味で等質空間になっている（基礎体が共通で）というのは少し

妙な感じを抱かせるが，要するにUGM_{fin}とUGMでは位相の入れ方が全然違っているからこういうことが起こる．ここでも無限次元代数多様体の概念構成に関する両極端の考え方がぶつかり合うのである．

UGMそのものに対して（その自然な位相に基いて）それを等質空間とするような群はあるだろうか？ [Sat-Sat]を読んでみてもそれは必ずしも明確には述べられていない．その辺の問題もあって[Seg-Wil]はヒルベルト空間の中で理論を再構築している．これは[Sat-Sat]のUGMの中の（但し$C=\mathbb{C}$として）定量的な条件をみたす点だけを拾い出すことである．（もっとも[Sat-Sat]にも，L^2だとかヒルベルト空間だとかいう設定とは異質だが，解析性に基く様々な部分族のことが触れてある．）

[Sat-Sat]では"群"について直接に言及せず，代わりにリー代数を構成している．その主張するところを要約すれば次のようになるだろう：

> UGMには1変数擬微分作用素全体 $\mathcal{E}=C[[x]]((\frac{\partial}{\partial x})^{-1})$ が無限小に作用し，さらにその適当な1次元"中心拡大"は$\widetilde{UGM}$に無限小作用する．

このことの正確な内容は後に吟味することにして，目下

の論点に戻ろう．[Sat-Sat]でも"群"に関する言及は間接的に読み取れる．つまり，$\mathcal{E}^{(0)}_{monic} = 1 + \mathbb{C}[[x]][[(\frac{d}{dx})^{-1}]](\frac{d}{dx})^{-1}$ というものを考えると（これは"ヴォルテラ群"として昔から知られているものだが），これは"概ね等質的に"UGMに作用する．（実はUGM$_\phi$はこの群に関する原点 $\xi = \left[\begin{smallmatrix} \ddots & & 0 \\ & 0\ 1 & \\ & 0 & \end{smallmatrix}\right] \bmod GL$ の軌道である．）その意味でUGMは"概ね等質空間"であると言ってもよい．ところがこのヴォルテラ群のリー代数は-1階以下の擬微分作用素全体 $\mathcal{E}^{(-1)} = \mathbb{C}[[x]][[(\frac{d}{dx})^{-1}]](\frac{d}{dx})^{-1}$ とみなしてよい．明らかに$\mathcal{E}$の非負巾部分，つまり微分作用素全体 $\mathcal{D} = \mathbb{C}[[x]][\frac{d}{dx}]$ がヴォルテラ群からは脱落している．

$\mathcal{D}$の中には定数係数微分作用素が含まれているが，これらはKP方程式の理論では"時間発展"に対応する極めて重要なものである．だから$\mathcal{D}$の部分も併せてはじめて理論的に完全なものになる．すでに注意したようにリー代数のレベルではとにかく$\mathcal{E}$全体の無限小作用が意味づけできる．

それではその無限小作用を"群作用"に持ち上げられるだろうか？ここで決定的な問題が生じる．つまり，$\mathcal{E}$をリー代数とする群とは何だろうか？一般的に言ってそんなものは存在しない．尤も，"$\mathcal{E}$をリー代数とする群"ということの意味がそもそも明確ではない．[Seg-Wil]は直接にこの問題を扱っているわけではないが，間接的には函数解析的な枠組

に基いて同様の事を論じているのだとも言えよう．[Pre-Seg]，[Fre] なども同じ思想圏にある．函数解析的方法では本当に群を（無限次元リー群として）つくる．これに比べ，[Kac] のような代数的構成法がはたしてカッツ・ムーディ代数を越えて今のような状況にまで適用できるのか筆者は良く知らないのだが，それは既に注意したようにシャファレヴィチ的なものになるはずで，我々の目的とは少しずれている．我々の純代数的な UGM に対してリー代数の無限小作用を"群作用"にもちあげる（"積分する"）には一体どうすればよいのか？そもそも"群"そのものが無いではないか？

ここで再び 2-2節の最後に指摘した問題がかかわって来る．そもそも [Ber-Roz] を読むと気が付くように，そこでは無限次元等質空間の概念はリー代数のみの言葉で定義されていて，群については直接に言及しない．彼らがこのような立場を採るのは，ひとつには，そこで扱われる実際の例が群ではなくて"擬群"（pseudo-group）に伴うものであるからだが，このことは大いに示唆的ではないか．つまり，何も本当の群にこだわる必要はなくて"群もどき"でも充分なのではないか，というわけだ．そもそもリーが群と呼んでいたのは今日の言葉で言えばせいぜい擬群か群芽（group germ）なのだった．

このように考えれば，もっと徹底的な抽象化を行っても

よかろう．例えば$P \in \mathcal{E}$に対して形式的変数tを導入して，$\exp tP$というものを何か"想像上の群"の元と考えることはどうか．つまり別の言い方をすれば，$\mathcal{E}$の元Pごとに形式的変数t_Pなるものを用意し$\exp(t_P P)$なる形式的対象の全体を"群"と称するのである．tをP毎に別々にとればこれは決して本当の群にはならない．しかしこれは我々の直観や実際の計算にはむしろしっくり来るものがある．（こういう考え方の原型は[Mul]の中に見ることができる．但しそこでは専ら時間発展のみが問題にされている．）

このように考えて来ると，UGMの幾何の問題にも一定の見通しが立ってくるように思われる．要するにここで古典的な意味での幾何空間の概念に変更が迫られているのだ．そしてそこに[Seg-Wil]とは異なる枠組を構築する可能性が秘められているわけだ．そのための材料は，上に掲げたように，結構いろいろとある．

そういう作業は単に[Sat-Sat]が疾走した跡をなぞるだけで余り面白くない，と思われるかも知れない．筆者は決してそうは思わない．漠然とした感覚を徹底的に抽象化してひとつの概念にまとめ上げるというのは数学の重要な作業ではないだろうか．そのような作業を経て初めて見えて来る地平というものは少くない．ヒルベルト空間という概念は定義そ

のものは極めて単純で，何か当り前のことを言っているとしか思えない程だが，そこまで概念を純化することが函数解析学という分野を基礎づける為にどうしても必要だったのだ．代数幾何学にしても，特にグロタンディク流の理論構成はせんじつめれば可換環論に帰着してしまう．我々がUGMに感じる何かもやもやしたものも，そういう風に一度徹底的な分析を行って，何らかのはっきりとした概念にまとめ上げる必要がある．

筆者はいつかこの問題をUGMに限定しないでもっと一般的な文脈で考え直してみたいとも思っている．それは代数的構造による統制の下で無限次元多様体論，特に等質空間論を展開するというひとつの大きなプログラムの可能性である．微分方程式，殊に積分可能系，の代数的理論はそのようなプログラムの下で見直すことができる（［辻下］およびその引用文献参照）．［Ber-Roz］はその材料として大いに示唆的であるし，また“群”の概念を拡張するという問題について，はりー・ベックルンド変換について［Ibr］が言っていることはなかなか意味深長である．［Ibr］については，微分方程式の一般理論のひとつの在り方を提示した［Vin］（［辻下］は基本的構図をそこに負っているようだ）はやや否定的な論評を与えているが，筆者は（確かに［Ibr］の言っていることはあまり

深い内容ではないが）そういちがいに捨て去るわけにはいかないと思う．何よりも，そういう風に拡張された“群もどき”が無いとUGM をはじめとして積分可能系の諸理論が機能しなくなるのである．

このプログラムのもうひとつの発展の方向は場の量子論にあるように思う．これについては後の節で議論する．

3-3. 中心拡大の必要性

積分可能系への応用，あるいは無限次元リー代数との関連を考えるときには $GL_{fin}(\mathbb{Z})$, $\mathfrak{gl}_{fin}(\mathbb{Z})$ では不充分であり，もっと一般の行列の作用を論じなければならない．そういう拡張は実際に可能であるが，そのときに（無限小）作用の交換関係が行列レベルの交換関係と（“有限型”の場合にも出て来た“符号”の違いを別にしても）食い違って来るという現象が起こる．リー代数のレベルで言えば，これは無限小作用がもとのリー代数そのものの（反）表現ではなくて，その適当な1次元中心拡大の（反）表現である，というように理解される．本節では，何故そのような事が起こるのか，ということを少し堀り下げて考えてみる．無限小作用とその交換関係の導出（3-4節で扱う）を系統的に実行する前にそのような発見的な議論を積んでおくことは無意味ではあるまい．

3-3-1. 問題設定

まず，3-1節の"有限型"の一般線型群に属さないような行列 $g=(g_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ に対して UGM, $\widetilde{UGM}$ への作用をどのように定義すればよいのか，考えてみよう．$g\in GL_{fin}(\mathbb{Z})$ の場合には $\xi\in Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c)$ に対して $g\xi\in Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c)$ であるから作用の定義に何ら問題はない．$g\notin GL_{fin}(\mathbb{Z})$ のときには $g\xi$ は一般には $Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c)$ を飛び出してしまうので何らかの処理をして $Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c)$ へ戻して来なければならない．これは $UGM\cong Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c)/GL(\mathbb{N}^c)$, $\widetilde{UGM}\cong Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c)/SL(\mathbb{N}^c)$ の分子分母をもっと大きいものにおきかえること，と言ってもよいが，我々は（本質的にはそれと同じことだが）少し異なる処法を採る．

それは g の ξ への作用 $g\cdot\xi$ を，どういう枠行列に対応するのかということはまず問わないことにして，そのプリュッカー座標の値によって間接的に定義するというやり方である．$g\in GL_{fin}(\mathbb{Z})$ のときには次の式が帰結として従った：

$$g\cdot\xi_S=\sum_{S'}g_{SS'}\xi_{S'}\quad(S'\text{は単調増加列全体にわたる})$$

$$g_{SS'}:=\det(g_{s_is'_j})_{i,j\in\mathbb{N}^c}\quad(S=(s_i)_{i\in\mathbb{N}^c},\ S'=(s'_i)_{i\in\mathbb{N}^c})$$

g が一般の場合には我々はこれを $g\cdot\xi_S$ の"定義"とみなす．その結果 $g\cdot\xi_S$ が定まって，かつ何らかのやり方でプリュッカー関係式を満たすことが確められれば，これで $\widetilde{UGM}$ 上にひと

つの作用が定められたと解釈してよい．

実際

1) gが上三角行列で対角成分が全て1のとき；

2) gが下三角行列で対角成分が全て1のとき；

の二つの場合にはそのようにして$U\widetilde{GM}$への作用が一応定義できる．いずれの場合も$g_{SS'}$は

$$g_{SS'} := \lim_{m,n\to\infty} \det(g_{s_i s'_j})_{-m\le i,j<n}$$

と定義すると stable limit となって確定する．また，

$$1) \Rightarrow g_{SS'} = 0 \quad \text{unless} \quad S \le S'$$
$$2) \Rightarrow g_{SS'} = 0 \quad \text{unless} \quad S \ge S'$$

（ここで $S \le S' \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}^c \ s_i \le s'_i$ と定義する.）但しこのままでは1)の場合$\sum_{S'} g_{SS'}\xi_{S'}$が無限和になるのでその意味づけが必要である．2)の方は$\sum_{S'} g_{SS'}\xi_{S'}$は有限和になるので問題はない．いずれの場合もこうして定義された$g\cdot\xi_S$がプリュッカー関係式をみたすことはgを$GL_{fin}(\mathbb{Z})$の元で近似して$GL_{fin}(\mathbb{Z})$の場合の対応する事実に帰着させるという論法で示せる．

1)の場合の無限和の処理は，例えば$g = \exp\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\gamma_n$，$\gamma_n$は基準対角線から$n$だけずれた対角線でのみ0でない成分をもつ，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$は形式的変数列，という場合には形式的巾級数環$\mathbb{C}[[\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots]]$で意味づけすればよい．尤もこれは$U\widetilde{GM}$への作用というよりは$U\widetilde{GM}$からその$\mathbb{C}[[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots]]$上の係数拡大（スキームの

意味での）への射をひきおこすと言うべきである．1)の場合に純代数的に理論構成しようとすると，どうしてもこういう感じになってしまう．これは3-2節の議論と関係している．

さて問題はこのようにして定義される行列の作用が行列の乗法と consistent か，ということである．例えば $g_1g_2=g_2g_1$ のとき $g_1g_2\xi_S=g_2g_1\xi_S$ か？　実はこれは成り立たない．

3-3-2. 計算例

例として次の二つの行列を考える：

$$g_+(x):=\exp\sum_{n=1}^{\infty}x_n\Lambda^n$$

$$g_-(y):=\exp\sum_{n=1}^{\infty}y_n\Lambda^{-n}$$

$$\Lambda^n:=(\delta_{i+n,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$$

$g_+(x)$, $g_-(y)$ は確かにそれぞれ 1) 2) の例になっている．しかも前者は $x_1,x_2,\cdots$ を形式的変数とみなすことで前述の無限和の意味づけができる．（KP方程式の理論ではこれらはそれぞれ時間発展・ゲージ変換として基本的な役割を担っている．）

まず $g_{SS'}$ を計算してみると

$$g_+(x)_{SS'}=\chi_{S'/S}(x):=\det(p_{s'_i-s_j}(x))_{i,j\in\mathbb{N}^c}$$

$$g_-(x)_{SS'}=\chi_{S/S'}(y):=\det(p_{s_i-s'_j}(y))_{i,j\in\mathbb{N}^c}$$

ここで $p_n(x)$, $n\geqq 0$, は母函数を使って

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)\lambda^n = \exp \sum_{n=1}^{\infty} x_n \lambda^n$$

で定義される $x=(x_1, x_2, \cdots)$ の多項式で、シューア函数の最も基本的なものである. $\chi_{S/S'}(x)$ は"相対的シューア函数"とでも呼ぶべきもので, $S'=\phi$ ($\phi(i)=i$ $\forall i\in\mathbb{N}^c$)のとき本来のシューア函数 $\chi_S(x)$ に一致する. $\chi_{S/S'}(x)$ を定義する行列式は例の如く $m\times m$ 小行列式をとって $m\to\infty$ の stable limit で定義すればよい.

これらに関する基本的な性質をいくつか記す (以下 $S, S', \cdots$ は単調増加なもののみ考える)

ア) $\{\chi_S(x)\}$ は 1 次独立で $x=(x_1, x_2, \cdots)$ の多項式全体 $\mathbb{C}[x]$ (或いは形式的巾級全体 $\mathbb{C}[[x]]$) の基底をなす.

イ) $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ (或は $\mathbb{C}[[x]]$) を $f(x)=\sum_S f_S\chi_S(x)$ とあらわすとき, 係数 f_S は次のようになる:

$$f_S = \chi_S(\partial_x) f(x)\Big|_{x\to 0}$$

ここで $\chi_S(\partial_x) := \chi_S\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_3}, \cdots\right)$.

ウ) $\chi_{S/S'}(x)$ は χ_S, $\chi_{S'}$ を使って次のように書ける.

$$\chi_{S/S'}(x) = \chi_{S'}(\partial_x)\, \chi_S(x).$$

これらの証明は省く.

これらから特に次の等式を得る：

$$\text{エ)}\quad \sum_{S} \chi_S(x)\chi_S(y) = \exp\sum_{n=1}^{\infty} n x_n y_n \qquad \left(\begin{array}{l}S\text{は単調増加なもの}\\ \text{全体にわたる}\end{array}\right)$$

実際 $\exp\sum_{n=1}^{\infty} n x_n y_n$ を x の形式的巾級数（yはパラメータ）と見てイ)のように $\chi_S(x)$ の1次結合で書くことを考えると，係数は $\chi_S(\partial_x)\exp(\sum n x_n y_n)\big|_{x\to 0} = \chi_S(y)\exp(\sum n x_n y_n)\big|_{x\to 0} = \chi_S(y)$ となるから，結局上の等式を得る．

さて，以上をふまえて $g_+(x)g_-(y)\xi_S$，$g_-(y)g_+(x)\xi_S$ の計算を行う．まず

$$g_+(x)g_-(y)\xi_S = \sum_{S'S''} g_+(x)_{SS'}\, g_-(y)_{S'S''}\,\xi_{S''} \qquad (S', S''\text{は単調増加})$$

$$= \sum_{S'S''} \chi_{S'/S}(x)\chi_{S'/S''}(y)\,\xi_{S''}$$

ウ) エ) により

$$= \sum_{S''} \chi_S(\partial_x)\chi_{S''}(\partial_y)\left(e^{\sum n x_n y_n}\right)\xi_{S''}$$

$$= e^{\sum n x_n y_n}\chi_S(\partial_x + y)\sum_{S''}\chi_{S''}(x)\,\xi_{S''}\ .$$

他方

$$g_-(y)g_+(x)\xi_S = \sum_{S'S''}\chi_{S/S'}(y)\chi_{S''/S'}(x)\,\xi_{S''} \qquad (S', S''\text{は単調増加})$$

同様にウ) エ) により

$$= \sum_{S'S''}\chi_{S'}(\partial_y)\chi_{S'}(\partial_x)\,\chi_S(y)\chi_{S''}(x)\,\xi_{S''}$$

$$= \sum_{S''}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\chi_S(y)\chi_{S''}(x)\,\xi_{S''}$$

これを $\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\chi_{S''}(x) = \chi_{S''}(x)$ に注意しつつ

$$= \exp\left(\sum \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \circ \chi_S(y) \circ \left(\exp - \sum \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$
$$\cdot \sum_{S''} \chi_{S''}(x)\, \xi_{S''}$$

と書き直す（" $\circ$ " は微分作用素の合成）．一般公式 $e^A \circ B \circ e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \cdots$ を使って右辺の最初の3項の合成を計算すると（計算は $A = \sum \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial y_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$, $B = y_j$ の場合に帰着），

$$= \chi_S(\partial_x + y) \sum_{S''} \chi_{S''}(x)\, \xi_{S''}$$

となる．以上により特に

$$g_+(x) g_-(y) \xi_S = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} n x_n y_n\right) g_-(y) g_+(x) \xi_S .$$

となって，確かに $g_+(x)$, $g_-(y)$ の作用の順序によって結果が食い違っていることがわかる．（ちなみに上の計算途中に現れた $\sum_{S''} \chi_{S''}(x)\, \xi_{S''}$ は "τ 函数" に他ならない．）

食い違いの因子 $\exp(\sum n x_n y_n)$ の形から，非可換性はリー代数のレベルで見ると Λ^n と Λ^{-n} の間で生じていることがわかる．

3-3-3. 解釈

このように行列レベルでの乗法規則や交換関係などがプリュッカー座標への作用においては破れてしまうという現象は確かに起こっている．これをリー代数の言葉できちんと定

式化すると"中心拡大"の概念が現れる．しかし何故こんなことが起こるのだろうか？計算すると確かにそうなっている，というだけではなくて，何かもう一歩突っ込んだ説明ができないだろうか？以下ではこのことを少し議論してみる．

こういう"異常"の根源が $g\cdot\xi_S$ を

$$g\cdot\xi_S = \sum_{S'} g_{SS'}\xi_{S'} \quad (S'\text{は単調増加})$$

により"定義"したということにあるのは間違いない．他には何も怪しいことをやっていないからだ．ところで我々は何故これを作用の定義として採用したかというと，単純に g を $\xi\in Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c)$ に掛けると結果が $Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c)$ をはみ出してしまい，例えばプリュッカー座標をどう定義してよいのかわからなくなるからだ．実際 $\xi\in Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c)$ と違ってその場合の $g\xi$ のプリュッカー座標は行列式として有限次のものには帰着できない．$g\cdot\xi_S$ を上の式で定義するということは，つまり，そういう無限次行列式に"一定の意味づけ"を与えるということで，ここに一種の作為が入り込む余地がある．

但し正確にいうと $g\notin GL_{fin}(\mathbb{Z})$ であっても 3-3-1 節の 2) のような場合には $g\xi\in Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c)$ であり，上の式は $Fr(\mathbb{Z},\mathbb{N}^c)$ の元としてのプリュッカー座標の値と実は一致している．もともとこの g は 3-2 節で触れたヴォルテラ群の元と 1 対 1 に対応

していて，余り問題がないのである．

これに対して1)の方は上に述べた"行列式の意味付け"の問題が確かに絡んで来る．問題点をついでにもう一つ指摘すると，今迄敢えて触れなかったが，gが対角行列ならば上のプログラム自体が変更を迫られる．何故ならgが有限型でない限り$g_{ss'}$自体の定義が（素朴に考えれば）

$$g_{ss'} = \delta_{ss'} \prod_{i \in N^c} g_{s_i s_i}$$

となって無限乗積の何らかの意味付けを迫られる．しかしこの場合のことは今はこれ以上立ち入らないで，1)の場合に焦点を絞ることにしよう．

行列式の意味付けに伴う"作為"というのは実は具体的に説明して見せることができる．今ξをUGM_ϕの点の正規化された枠行列

$$\xi = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c} \begin{matrix} & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 \\ & & & 1 \end{matrix} \\ \hline \mathbb{W}_\phi \end{array}\right) & \begin{matrix} \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \end{array}$$

として話を進める．またgとしては3-3-2で例に掲げた$g_+(x) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} x_n \Lambda^n$をとる．そして$g_+(x)\xi_\phi$が何であるかを考えてみる．$g_+(x)\xi$は

$$g_+(x)\xi = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \ddots & \ddots & \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} p_2(x) & \ddots & \\ p_1(x) & p_2(x) & \end{matrix} \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & p_1(x) & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots \end{matrix} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \begin{matrix} \ddots & 0 \\ 0 & 1 \\ & & 1 \end{matrix} \\ \hline \mathbb{W}_\phi \end{array}\right) \begin{matrix} \vdots \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}$$

という形をしているから $g_t(x)\xi_\phi$ はその"上半分"

$$h(x) := \left[\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & p_1(x) & p_2(x) & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & p_1(x) & p_2(x) & \cdots & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \begin{matrix} \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{matrix} \\ \hline \mathbb{W}_\phi \end{array}\right]$$

の行列式というべきものだ. ところで今 $h(x)$ のかわりに左から $(p_{j-i}(x))_{i,j\in\mathbb{N}^c} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & p_2(x) \\ & & \ddots & p_1(x) \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列をかけたものを考えたらどうなるか. それは

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & p_2(x) \\ & \ddots & \ddots & p_1(x) \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}^{-1} h(x) = \left[\begin{array}{ccc|c} \ddots & & 0 & \\ 0 & 1 & & \mathbb{H}(x) \\ & & 1 & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \begin{matrix} \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{matrix} \\ \hline \mathbb{W}_\phi \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \mathbb{H}(x)\mathbb{W}_\phi$$

という形をしていて Fredholm の公式

$$\det(1+X) = 1 + \sum_i x_{ii} + \sum_{i<j} \det\begin{pmatrix} x_{ii} & x_{ij} \\ x_{ji} & x_{jj} \end{pmatrix} + \cdots, \quad X = (x_{ij})$$

を適用できそうな形をしている. Fredholm の公式は X が"トレースクラス"であれば意味を持つことは良く知られているが, 実は上の $\mathbb{H}(x)\mathbb{W}_\phi$ は形式的巾級数環 $\mathbb{C}[[x]]$ に自然に入る位相 (x_n に weight n を与え, $\mathbb{C}[[x]]_n$ で weight $\geqq n$ の x の単項式の1次結合全体を表わすとき, これらを $0 \in \mathbb{C}[[x]]$ の基本近傍系とする線型位相) に関してトレースクラスに属する. しかも, 計算すればすぐわかるように, このFredholm行

列式は $g_+(x)\xi_\phi$ に一致する．つまり我々が $g_+(x)\xi_\phi$ として定義したものは見方を変えればFredholmの意味の行列式になるように補正因子 $\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & p_1(x) \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ を掛けて調節して得られるものだった訳だ．これが"作為"の正体である．

この補正因子は確かにそれ自身の行列式が1に等しいとしか考えられず，従ってそういうものを掛けて行列式を定義し直すというのは文句の無いところである．しかしこのことが回り回って交換関係に異常を引き起こしているのである．

同じような事情は場の量子論の"異常(anomaly)"に関しても発生している．実は $\widetilde{\mathrm{UGM}}$ における交換関係の異常は場の量子論的に解釈できる[Jim-Miw]．ただ $\widetilde{\mathrm{UGM}}$ の場合場の量子論としては時間1次元空間1次元という状況に対応していて，その低次元性故に異常の性質も簡単なものになっている．それがリー代数の中心拡大で済むということにも反映されている．高次元では，後に論じるように，中心拡大では済まない．このことは"行列式"の定義の問題にも現れている．高次元の場の量子論でも或る種の"行列式"が異常の出現と密接に関連している．ところがこの"行列式"は我々が今迄扱ってきたものよりはるかにタチが悪く，例えて言えば，我々の場合行列式をフレドホルム型に直すときの補正因子はそれ自身の行列式が1というべきものだったのに対して，場の量子

論に出てくる"行列式"を意味づけるための補正因子はそれ自身が発散していて ∞/∞ = 有限値 という感じで有限の結果を引き出して来る，という代物である．(物理学者はこのような操作も"正則化"とか"くりこみ"とか呼ぶようである．)

3-4. リー代数の構成

以上の点に留意しつつ[Sat-Sat]のリー代数を見直してみる．

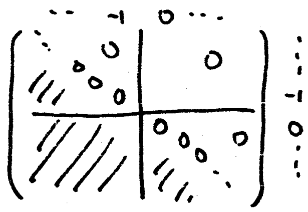
$\mathfrak{gl}_{fin}(\mathbb{Z})$ の $\widetilde{UGM}$ への作用についてはすでに説明した．行列単位 E_{ij} $(i,j\in\mathbb{Z})$ のひきおこす無限小作用つまり $\widetilde{UGM}$ 上のヴェクトル場 $\delta(E_{ij})$ はプリュッカー座標に対して

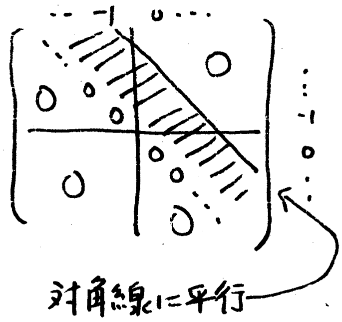
$$\delta(E_{ij})\xi_S = \xi_{S:i\to j}$$

と作用する．$L_{ij}:=\delta(E_{ji})$ と置くと $\{L_{ij}\}$ は $\{E_{ij}\}$ と同じ交換関係に従うのであった．

これから考えるのは $\mathfrak{gl}_{fin}(\mathbb{Z})$ に属さないような行列も許した無限小作用の体系をつくることである．そのようなものとして我々はすでに幾つかの例を見てきた．"群"のレベルで見るとき下三角行列で対角線が1のもの(それがヴォルテラ群に対応していることは既に注意した通り)については文句がなかった．他方上三角行列で対角線が1のものについて

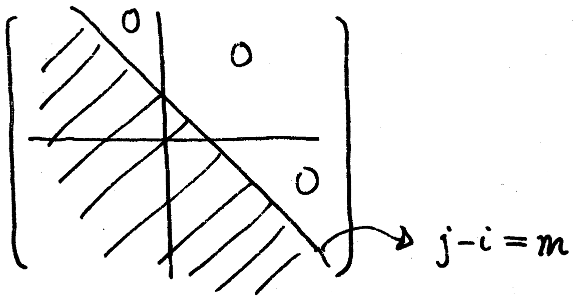
は無限和の処理が必要で，そのひとつのやり方として形式的変数の導入による"群もどき"の考え方を提案した．これらをリー代数のレベルで見ると，それぞれ





という行列を考えることになる．更に，対角行列についてはもっと注意が必要であった．以上のことも踏まえて，我々は対象とする行列の範囲を次のものに限定する：

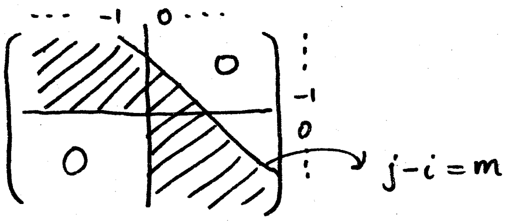
$$gl(\mathbb{Z}) := \{\gamma=(\gamma_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}};\ \forall i,j\in\mathbb{Z}\ \ \gamma_{ij}\in\mathbb{C},\ \exists m\in\mathbb{Z}\ \ \gamma_{ij}=0 \text{ for } j-i>m\}$$



(これは[Jim-Miw]が扱っているものよりもやや広い．)

このようなものを考える理由はもうひとつある．それは1変数擬微分作用素環 $\mathcal{E}=\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(\frac{d}{dx})^n;\ \forall n\in\mathbb{Z}\ \ a_n\in\mathbb{C}[[x]],\ \exists m\in\mathbb{Z}\ \ a_n=0 \text{ for } n>m\}$ をある方法で線型表現すると丁度

表現行列としてこれらが出て来るからである[Sat-Nou]. 因に微分作用素環 $\mathcal{D}=\{\sum a_n(\frac{d}{dx})^n\in\mathcal{E};\ a_n=0 \text{ for } n<0\}$ に対応して



という行列が出てくる. つまりグラスマン多様体を G/P という形に書くときの放物型部分群のリー代数のようなものが確かに出て来るのである.

以下我々は $gl(\mathbb{Z})$ の $\widetilde{UGM}$ への無限小作用を考える. (有限作用, つまり群へひき上げることについては論じない. 既に何度も強調したように, 本当の群にするには定量的条件を設定してヒルベルト空間でも使わないと難しい. 純代数的に理論構成するには"群もどき"にまで対象を拡張することが不可欠である.) 単純に考えれば $\gamma=(\gamma_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}\in gl(\mathbb{Z})$ に対して

$$\delta(\gamma)\xi_S=\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\gamma_{ij}\xi_{S:i\to j}$$

によって作用が定義されるはずだが, 実は右辺は一般には発散する.

発散は γ の対角部分から生じる. 実際 $\xi_{S:i\to j}$ の定義を思い出せば

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\gamma_{ii}\xi_{S:i\to i}=\Big(\sum_{i\in S}\gamma_{ii}\Big)\xi_S$$

となり，無限個の定数を足し上げてしまってCの中では意味を持たない．（Cには何の位相も入れていない．）非対角部分では $i \neq j$ のとき $\gamma_{ij}\xi_{S;i\to j} \neq 0$ となるのは高々有限個なので（$i \in S^c$ または $j \in S$ のときには $\xi_{S;i\to j} = 0$）発散の問題は生じない．対角線のみから発散が生じるということは既に群レベルの発見的議論からも予想されているところである．

この発散の問題を解消するために我々は $\delta(\gamma)$ を少し補正する．（これは[Jim-Miw]の言葉で言えば自由フェルミ場の双線型型式を正規積で置き換えることに他ならない．）補正のしかたは次の通り：

$$\tilde{\delta}(\gamma) \quad := \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \gamma_{ij}\left(\delta(E_{ij}) - \theta(i<0)\delta_{ij}M\right)$$

ここで，Mは $\widetilde{UGM}$ 上のヴェクトル場でプリュッカー座標に

$$M\xi_S = \xi_S \qquad \forall S$$

と作用するもの，また $\theta(i<0)$ はブール函数

$$\theta(i<0) = \begin{cases} 1 & (i<0) \\ 0 & (i\geq 0) \end{cases}$$

をそれぞれあらわす．Mは，プリュッカー座標の比に対して常に0として作用する（$M(\xi_{S'}/\xi_S) = 0 \quad \forall S, S'$）ことから判るように，$\pi: \widetilde{UGM} \to UGM$ のファイバーに接するヴェクトル場で

ある．各 ξ_s に対して作用させてみると $\tilde{\delta}(\gamma)$ については発散が消えていることがすぐに判る．

$L_{ij}=\delta(E_{ji})$ に対応するのは補正された生成系

$$\tilde{L}_{ij}:=L_{ij}-\theta(i<0)\delta_{ij}M$$

である．$\{\tilde{L}_{ij},M\}$ で閉じた交換関係が得られる：

$$[\tilde{L}_{ij},\tilde{L}_{kl}]=\delta_{kj}\tilde{L}_{il}-\delta_{il}\tilde{L}_{kj}+\delta_{kj}\delta_{il}(\theta(i<0)-\theta(j<0))M,$$
$$[\tilde{L}_{ij},M]\ =0$$

そこで

$$\widetilde{gl}(\mathbb{Z}):=\{\tilde{\delta}(\gamma)+cM\ ;\ \gamma\in gl(\mathbb{Z}),\ c\in C\}$$

というものを考えると，これはリー代数をなす．交換関係は

$$[\tilde{\delta}(\gamma),\tilde{\delta}(\gamma')]=\tilde{\delta}([\gamma',\gamma])+\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\gamma_{ji}\gamma'_{ij}(\theta(i<0)-\theta(j<0))M,$$
$$[\tilde{\delta}(\gamma),M\ ]=0,$$

となりMはすべての元と可換になる．こうして自然に $gl(\mathbb{Z})$ の1次元中心拡大が現れる．

$\widetilde{gl}(\mathbb{Z})$ はいろいろな部分リー代数を含んでいる．例えば [Jim-Miw] が自由フェルミ場あるいは頂点作用素と呼ばれるものを使って構成している $\widetilde{gl}(\infty)$ の variation や様々なカッツ・ムーディ代数，ヴィラソロ代数がそうである．[Sat-Sat] ではむしろ擬微分作用素環Eに重点を置いて次のような $U_n^{(k)}$ $(k\geq 0,$

$n \in \mathbb{Z}$) で生成されるリー代数の存在を指摘している：

$$U_n^{(k)} := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{i}{k} \tilde{L}_{i+n,\, i}$$

これは $\mathcal{E}$ の基底 $\frac{x^k}{k!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{k+n}$ に対応するものである. 実際既に引用したような $\mathcal{E}$ の行列表現の下では

$$x \longleftrightarrow K := (i\delta_{i,j+1})_{i,j \in \mathbb{Z}}$$

$$\frac{d}{dx} \longleftrightarrow \Lambda := (\delta_{i,j-1})_{i,j \in \mathbb{Z}}$$

という対応になっているので $U_n^{(k)} = \tilde{\delta}\left(\frac{K^k}{k!}\Lambda^{k+n}\right)$ である. $U_n^{(k)}$, M の交換関係については [Sat-Sat] を見られたい. $\{U_n^{(0)}, M\}$ $\{U_n^{(1)}, M\}$ はそれぞれ交換関係で閉じ, ハイゼンベルグ代数とヴィラソロ代数を与える. $\{U_n^{(0)}, U_n^{(1)}, M\}$ でまたひとつの閉じたリー代数をなす. とにかくこのようにして $\mathcal{E}$ のリー代数としての1次元中心拡大が得られる.

この辺のことは最近理論物理の方で注目されたこともあっていろいろなところで話題に登場することが多いが ([A-D-K-P], [A-G-R], [B-M-S], [K-N-T-Y], [Vaf], [Wit]) 日本人以外誰も [Sat-Sat] を引用しないで専ら [Seg-Wil] ですませているのは誠に残念なことである.

3-5. 接続と曲率 — 曲率は消えない

有限次元の場合にやってみたように，前節の無限小作用の結果を接続の言葉に翻訳してみる．$gl_{fin}(\mathbb{Z})$ とちがって，$gl(\mathbb{Z})$ にはヴォルテラ群のリー代数，すなわち−1階以下の擬微分作用素全体 $\mathcal{E}^{(-1)} = \{ \sum a_n (\frac{d}{dx})^n \in \mathcal{E} ; a_n = 0 \text{ for } n \geq 0 \}$ に対応する行列（下三角で対角線0）が全部入っているので，UGM への無限小作用は各点の接空間を張るくらいに大きい．従って今度は接続としての解釈ができる．

計算を具体的にするために再びアフィン座標近傍 UGM_ϕ の上で考える．$UGM_\phi \simeq Mat(\mathbb{N}, \mathbb{N}^c)$ ，$\xi \bmod GL(\mathbb{N}^c) \to \mathbb{W}_\phi = (w_{ij})_{i\in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}^c}$，$w_{ij} = \xi_{\phi: j\to i} / \xi_\phi$ である．この上での π: $\widetilde{UGM} \to UGM$ の局所自明化は $\pi^{-1}(UGM_\phi) \simeq UGM_\phi \times (\mathbb{C}\setminus 0) \simeq Mat(\mathbb{N}, \mathbb{N}^c) \times (\mathbb{C}\setminus 0)$，$\xi \bmod SL(\mathbb{N}^c) \to (\mathbb{W}_\phi, \xi_\phi)$ で与えられている．

まず L_{ij}, M はこのアフィン座標系の下で

$$L_{ij} = -\sum_{k\geq 0, \ell < 0} w_{kj} w_{i\ell} \frac{\partial}{\partial w_{k\ell}} + \theta(j<0)\, w_{ij}\, \xi_\phi \frac{\partial}{\partial \xi_\phi}$$

と書ける．但し右辺で既定の範囲を逸脱した添字に対しては

$$w_{ij} := \delta_{ij} \quad (i,j \in \mathbb{N}^c) \ ; \quad -\delta_{ij} \quad (i,j \in \mathbb{N})$$

と解釈する．右辺の第1項，第2項はそれぞれ射影 π に関し

水平・垂直方向のヴェクトル場で

$$\pi_* L_{ij} = -\sum_{k\geq 0, \ell<0} w_{kj} w_{i\ell} \frac{\partial}{\partial w_{k\ell}},$$

$$M = \xi_\phi \frac{\partial}{\partial \xi_\phi}$$

となっている。従って上の式は

$$L_{ij} = \pi_* L_{ij} + \theta(j<0) w_{ij} M$$

と書ける。$\tilde{L}_{ij} = L_{ij} - \theta(j<0)\delta_{ij} M$ は従って

$$\tilde{L}_{ij} = \pi_* L_{ij} + \theta(j<0)(w_{ij} - \delta_{ij}) M$$

というように水平・垂直方向に分解される。

$\gamma = (\gamma_{ij}) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \gamma_{ij} E_{ij} \in \mathfrak{gl}(\mathbb{Z})$ に対しては、このことから、

$$\delta(\gamma) = \pi_* \delta(\gamma) + \omega(\gamma) M, \quad \omega(\gamma) := \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z} \\ j\in\mathbb{N}^c}} \gamma_{ji} w_{ij}$$

$$\tilde{\delta}(\gamma) = \pi_* \delta(\gamma) + \tilde{\omega}(\gamma) M, \quad \tilde{\omega}(\gamma) := \sum_{\substack{i\in\mathbb{N} \\ j\in\mathbb{N}^c}} \gamma_{ji} w_{ij}$$

$$\pi_* \delta(\gamma) = \pi_* \tilde{\delta}(\gamma) = -\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}, \\ \ell\in\mathbb{N}^c}} \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z} \\ j\in\mathbb{Z}}} w_{kj} \gamma_{ji} w_{i\ell} \frac{\partial}{\partial w_{k\ell}}$$

というように分解される。$\delta(\gamma)$ における垂直方向 ($\propto M$) の係数は $i\in\mathbb{N}^c, j\in\mathbb{N}^c$ の範囲の和が $\sum_{i\in\mathbb{N}^c} \gamma_{ii}$ で発散している。$\tilde{\delta}(\gamma)$ の方は丁度これを除去したものになっている。水平成分には勿論発散は含まれていない。

有限次元の場合と同様に行列記法を使うとこの結果をも

っと印象的な形に書くことができる．γを

$$\gamma=\begin{pmatrix}\gamma_{--} & \gamma_{-+}\\ \gamma_{+-} & \gamma_{++}\end{pmatrix},\quad \gamma_{--}=(\gamma_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}^c},\text{等々}$$

というように分ける．すると：

$$\pi_*\delta(\gamma)\mathbb{W}_\phi=\gamma_{+-}+\gamma_{++}\mathbb{W}_\phi-\mathbb{W}_\phi\gamma_{--}-\mathbb{W}_\phi\gamma_{-+}\mathbb{W}_\phi$$

$$\omega(\gamma)=\mathrm{tr}\,(\gamma_{--}+\gamma_{-+}\mathbb{W}_\phi)$$

$$\tilde{\omega}(\gamma)=\mathrm{tr}\,(\gamma_{-+}\mathbb{W}_\phi)$$

我々は$\tilde{\delta}(\gamma)$を$GL(1)$-束$U\tilde{G}M\xrightarrow{\pi}UGM$上の接続$\nabla$の$\pi_*\delta(\gamma)$方向の共変微分と解釈する．$\tilde{\omega}(\gamma)$は接続係数となる．$\mathrm{tr}\,\gamma_{--}$が発散部分として除去された訳である．

曲率の計算の原理も有限次元の場合と同じで，$\pi_*\delta(\gamma)$，$\pi_*\delta(\gamma')$　（$\gamma,\gamma'\in\mathfrak{gl}(\mathbb{Z})$）と縮約した接続形式$\Omega(\pi_*\delta(\gamma)$，$\pi_*\delta(\gamma'))$は結局

$$\begin{aligned}\Omega(\pi_*\delta(\gamma),\pi_*\delta(\gamma'))&=[\tilde{\delta}(\gamma),\tilde{\delta}(\gamma')]-\tilde{\delta}([\gamma',\gamma])\\&=\sum_{i,j\in\mathbb{Z}}\gamma_{ji}\gamma'_{ij}(\theta(i<0)-\theta(j<0))M\end{aligned}$$

つまり交換関係に於ける中心拡大項そのものになる．こうして中心拡大項は曲率として解釈できることがわかる．このような認識は場の量子論で最近重視されるようになって来た．後で高次元の場合も含めてこの問題に立ち戻る．

3−6. ＫＰ方程式との関係についての注意

ＫＰ方程式との関連は［Sat-Sat］，［Jim-Miw］，［Seg-Wil］，［Sat-Nou］等を見ていただければ充分であるが，$GL(1)$-主束の接続という視点と“τ函数”やプリュッカー座標を使ってKP方程式を力学系と見ることとの関係についてひと言注意する．

$U_n^{(0)}$ $(n\in\mathbb{Z})$ は $n>0$ ではＫＰ方程式の時間発展の，$n<0$ では“ゲージ変換”の生成子になっている．すでに議論した $g_+(x)$, $g_-(y)$ はそれぞれの有限変換になっている．具体的には

$$\tau(t) = g_+(t)\,\xi_\phi = \sum_S \chi_S(t)\,\xi_S \qquad t=(t_1, t_2, \cdots)$$

がτ函数である．（$U_0^{(0)}$ は 0 になっていて何の働きもしない．）ところで $\widetilde{UGM}$ のレベルで見ても $U_n^{(0)}$ $(n>0)$ は互いに可換である．これは接続の観点から見れば，これらのヴェクトル場の張る方向には曲率形式が消えているということである．従ってこれらの方向には接続による平行移動が一斉に可能になる．プリュッカー座標のレベルでいえばこの平行移動は

$$\xi_S \longrightarrow \xi_S(t) := g_+(t)\,\xi_S \qquad t=(t_1 t_2 \cdots)$$

という $\widetilde{UGM}$ 上のflowを引き起こす．これが［Sat-Sat］の力学系の本当の意味である．曲率が消えていなければ力学系をこのように UGM から $\widetilde{UGM}$ へ引き上げることは出来ないのである．

4. 普遍グラスマン多様体の多成分化

4-1. 多成分化の原理

多成分化というのは $\xi=(\xi_{ij})$ において各 ξ_{ij} が行列（r 成分理論ならば $r\times r$ 行列）に値をとるものに拡張することをいう（「Sat-Sat」，[Jim-Miw] 参照）．積分可能系への応用にはそれは不可欠なことである．また自由フェルミ場を用いた構成 [Jim-Miw] ではこれはフェルミ場を r 組用意することに他ならない．

しかしながらそうやって得られるものも本質的には UGM, $\widetilde{\mathrm{UGM}}$ と同じものであり，ただ記述の仕方が少し違うだけなのである．具体的にはこういうことである：今，UGM, $\widetilde{\mathrm{UGM}}$ の構成の基本となる添字集合 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^c$ を $\mathrm{mod}\ r$ で類別して，同値類の代表系を $\{0,1,\cdots,r-1\}$ とする．このとき

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}\times\{0,1,\cdots,r-1\} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}, \quad (i,\alpha)\mapsto ri+\alpha \\
\mathbb{N}\times\{0,1,\cdots,r-1\} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{N}, \\
\mathbb{N}^c\times\{0,1,\cdots,r-1\} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{N}^c
\end{aligned}
$$

という1対1対応ができる．そこで UGM, $\widetilde{\mathrm{UGM}}$ の構成における整数添字を左側の2重添字におきかえると，例えば枠行列 ξ の行列要素は

$$\xi = (\xi_{ij}^{(\alpha\beta)})_{(i\alpha)\in\mathbb{Z}\times\{0,\cdots,r-1\},\ (j\beta)\in\mathbb{N}^c\times\{0,\cdots,r-1\}}$$

というように添字が付けられる．これを

$$\xi = (\xi_{ij})_{i\in\mathbb{Z},j\in\mathbb{N}^c},\quad \xi_{ij} := (\xi_{ij}^{(\alpha\beta)})_{0\le\alpha,\beta<r}$$

というように書き直すと，確かに今迄の ξ_{ij} のところが $r\times r$ 行列で置き換わったものになっている．プリュッカー座標を番号付けた添字列 S は今度は2重添字列

$$S = (s_i^{(\alpha)})_{(i\alpha)\in\mathbb{N}^c\times\{0,\cdots,r-1\}}$$

になる．あるいは $\mathbb{N}^c\times\{0,1,\cdots,r-1\}$ から $\mathbb{Z}\times\{0,1,\cdots,r-1\}$ への写像 S で殆どすべての $(i\alpha)$ に対して $S(i\alpha)=(i\alpha)$ となるもの，と言ってもよい．この場合2重添字全体に全順序を定めておけば単調増加列を区別できるが，一般的に言ってそれはあまり本質的なことではない．

$\mathbb{Z}\times\{0,1,\cdots,r-1\}$ のうち第2添字の方は今までの UGM, $\widetilde{\mathrm{UGM}}$ に新たに備わった"内部自由度"とみなせる．あとでカレント代数のことを議論するが，それはこのような解釈を背景にしている．繰り返し強調しておくと，この内部自由度もあわせて添字集合を1次元的に再配列すれば結局もとの UGM, $\widetilde{\mathrm{UGM}}$ と同じものになるわけだから，本質的に新しいことをやっているのではない．添字の前述のような対応によって UGM, $\overline{\mathrm{UGM}}$ についての結果は逐一 r 成分化の言葉に翻訳される．

4-2. 無限小作用のリー代数

第3節で導入した $gl_{fin}(\mathbb{Z})$, $gl(\mathbb{Z})$, $\widetilde{gl}(\mathbb{Z})$ を上のような添字集合の読み換えによって r 成分化することが出来る．そうして得られるものをそれぞれ，変な記号だが，$gl_{fin}(\mathbb{Z}\times r)$, $gl(\mathbb{Z}\times r)$, $\widetilde{gl}(\mathbb{Z}\times r)$ と書く．行列単位

$$E_{ij}^{(\alpha\beta)} := E_{ij} \otimes E^{(\alpha\beta)}, \quad E^{(\alpha\beta)} := \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \beta \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & 1 & \\ & & \end{array}\right) \\ \leftarrow r \rightarrow \end{array}\begin{array}{c} \uparrow \\ r \\ \downarrow \end{array}$$

に対応する $U\widetilde{GM}$ への無限小作用

$$L_{ij}^{(\alpha\beta)} := \delta(E_{ji}^{(\beta\alpha)})$$

は次の交換関係に従う（M は今迄と同じもの）：

$$[L_{ij}^{(\alpha\beta)}, L_{k\ell}^{(\mu\nu)}] = \delta_{kj}\delta^{\mu\beta}L_{i\ell}^{(\alpha\nu)} - \delta_{i\ell}\delta^{\alpha\nu}L_{kj}^{(\mu\beta)}$$

$$[L_{ij}^{(\alpha\beta)}, M] = 0$$

$gl(\mathbb{Z}\times r)$ の元 $\gamma = (\gamma_{ij}^{(\alpha\beta)}) = \sum_{ij\alpha\beta}\gamma_{ij}^{(\alpha\beta)}E_{ij}^{(\alpha\beta)}$ に対する補正された無限小変換は

$$\tilde{\delta}(\gamma) = \sum_{ij\alpha\beta}\gamma_{ij}^{(\alpha\beta)}\left(\delta(E_{ij}^{(\alpha\beta)}) - \theta(i<0)\delta_{ij}\delta^{\alpha\beta}M\right)$$

と書ける．特に $L_{ij}^{(\alpha\beta)}$ の補正は

$$\tilde{L}_{ij}^{(\alpha\beta)} := \tilde{\delta}(E_{ji}^{(\beta\alpha)}) = L_{ij}^{(\alpha\beta)} - \theta(i<0)\delta_{ij}\delta^{\alpha\beta}M$$

となる．$\tilde{\delta}(\gamma)$, M の交換関係は次のようになる：

$$[\tilde{\delta}(\gamma), \tilde{\delta}(\gamma')] = \tilde{\delta}([\gamma', \gamma]) + \sum_{ij\alpha\beta} \gamma_{ji}^{(\beta\alpha)} \gamma'^{(\alpha\beta)}_{ij} (\theta(i<0) - \theta(j<0)) M$$

$$[\tilde{\delta}(\gamma), M] = 0$$

となる．これが $\widetilde{\mathfrak{gl}}(\mathbb{Z}\times r)$ の構造をきめている．

特に1成分の場合の $U_n^{(0)}$ にあたるものとして

$$J_n^{(\alpha\beta)} := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{L}^{(\beta\alpha)}_{i+n,i} = \tilde{\delta}(\Lambda^n \otimes E^{(\alpha\beta)}) \quad (n\in\mathbb{Z})$$

を考えると，これは次の交換関係を満たす．

$$[J_n^{(\alpha\beta)}, J_m^{(\mu\nu)}] = \delta^{\mu\beta} J_{n+m}^{(\alpha\nu)} - \delta^{\alpha\nu} J_{n+m}^{(\mu\beta)} + \delta^{\alpha\nu}\delta^{\mu\beta} n \delta_{n+m}$$

$$[J_n^{(\alpha\beta)}, M] = 0$$

これはカレント代数である．$r=1$ とすると右辺第1，第2項が打消し合ってハイゼンベルグ代数に帰着する．ここで与えたのは正確には $\mathfrak{gl}(r)$－カレント代数というべきである．$\mathfrak{gl}(r)$ の部分リー代数 $\mathfrak{g}$ とその $\mathbb{C}$－基底 $\{T^a\}$ をとり，

$$J_n^a := \tilde{\delta}(\Lambda^n \otimes T^a)$$

とおくと今度は $\mathfrak{g}$－カレント代数を得る．$X^{(1)}$ （X：半単純リー代数の分類）型のカッツ・ムーディ代数はその特別な場合である．

カレント代数の抽象的な定義は次の通り：　$\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(r)$

を係数とするローラン多項式のリー代数 $\mathfrak{g}\otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ (t: 不定元) に対して次のコサイクル c で与えられる1次元中心拡大 $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}] + \mathbb{C}z$ (z: 中心元) が $\mathfrak{g}$ に伴うカレント代数である:

$$c(A,B) := \mathrm{res}\ \mathrm{tr}\, A\frac{dB}{dt}, \quad A,B\in \mathfrak{g}\otimes \mathbb{C}[t,t^{-1}]$$
$$\mathrm{res} := t^{-1}\text{の係数}$$

つまり $A+az$, $B+bz$ ($a,b\in\mathbb{C}$, $A,B\in\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$) という2つの元に対して交換子を

$$[A+az, B+bz] := [A,B] + c(A,B)z$$

で定義する. $T^a\otimes t^n$ を J^a_n と書くとこれは次を満たす.

$$[J^a_n, J^b_m] = \sum_c f^{ab}{}_c J^c_{n+m} + \mathrm{tr}(T^aT^b)\, n\,\delta_{n+m}$$
$$[J^a_n, z] = 0$$

($f^{ab}{}_c$ は基底 $\{T^a\}$ の構造定数, $[T^a, T^b] = \sum_c f^{ab}{}_c T^c$) 前述の J^a_n はこのような抽象的なカレント代数のひとつの忠実表現を $\widetilde{UGM}$ 上のヴェクトル場の中に与えている訳である.

カレント代数, ヴィラソロ代数, 等の周辺についての判り易い解説として [God-Oli] を掲げておく.

4-3. アフィン座標による記述

これも基本的には1成分のときと内容的には変わってない．記号的に複雑になるだけである．アフィン座標系は

$$UGM = \bigcup_S UGM_S$$

$$UGM_S \simeq \mathrm{Mat}(S^c, S, \mathbb{C})$$

$$\xi \bmod GL(\mathbb{N}^c \times r) \longrightarrow \mathbb{W}_S = \left(w_{S\,ij}^{(\alpha\beta)} \right)_{(i\alpha)\in S^c,\,(j\beta)\in S}$$

$$w_{S\,ij}^{(\alpha\beta)} := \xi_{S;(j\beta)\mapsto(i\alpha)}$$

で与えられる．記号の意味は説明しなくともよかろう．

例によって $S = \phi$ （ $\phi(i\alpha) = (i\alpha)$ $\forall (i\alpha) \in \mathbb{N}^c \times \{0, \cdots, r-1\}$ ）の場合が重要で，このとき $w_{\phi\,ij}^{(\alpha\beta)}$ を単に $w_{ij}^{(\alpha\beta)}$ と記す．

$$UGM_\phi \simeq \mathrm{Mat}(\mathbb{N}\times\{0,\cdots,r-1\}, \mathbb{N}^c\times\{0,\cdots,r-1\})$$

$$\xi \bmod GL \longrightarrow \mathbb{W}_\phi = \left(w_{ij}^{(\alpha\beta)} \right)_{(i\alpha)\in\mathbb{N}\times\{0\cdots r-1\},\,(j\beta)\in\mathbb{N}^c\times\{0\cdots r-1\}}$$

$$\pi^{-1} UGM_\phi \simeq \mathrm{Mat}(\mathbb{N}\times\{0\cdots r-1\}, \mathbb{N}^c\times\{0\cdots r-1\}) \times (\mathbb{C}\setminus 0)$$

$$\xi \bmod SL \longrightarrow (\mathbb{W}_\phi, \xi_\phi)$$

$\gamma = (\gamma_{ij}^{(\alpha\beta)}) \in gl(\mathbb{Z}\times r)$ に対する補正された無限小作用 $\tilde{\delta}(\gamma)$ をこのアフィン座標で書き下すことも1成分の場合と何ら変わりない．γ をブロック分けして

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{--} & \gamma_{-+} \\ \gamma_{+-} & \gamma_{++} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{--} := (\gamma_{ij}^{(\alpha\beta)})_{\substack{(i\alpha)\in\mathbb{N}^c\times\{0,\cdots,r-1\} \\ (j\beta)\in\mathbb{N}^c\times\{0,\cdots,r-1\}}} \ \text{etc}$$

と書けば行列記法で

$$\tilde{\delta}(\gamma)\mathbb{W}_\phi = \gamma_{+-} + \gamma_{++}\mathbb{W}_\phi - \mathbb{W}_\phi\gamma_{--} - \mathbb{W}_\phi\gamma_{-+}\mathbb{W}_\phi$$
$$\tilde{\delta}(\gamma)\xi_\phi = tr(\gamma_{-+}\mathbb{W}_\phi)\xi_\phi =: \tilde{\omega}(\gamma)\xi_\phi$$

となり，これを $\tilde{\delta}(\gamma)$ の水平方向と垂直方向への分解

$$\tilde{\delta}(\gamma) = \pi_*\tilde{\delta}(\gamma) + \tilde{\omega}(\gamma)\ M$$

と読み直すこと等，前と同様である．

4-4. カレント代数の Λ-不変集合上での表現

ここで少し違うことをやってみる．カレント代数は全無限小作用 $\widetilde{gl}(\mathbb{Z}\times r)$ の中で小さい部分リー代数をなすので，その生成する群（正確にはこれも"群もどき"である）の $\widetilde{UGM}$ 内の適当な軌道を使って，その上の無限小作用として忠実表現をつくれてもおかしくはない．以下ではそのような表現を与える．これは積分可能系と直接の関係をもつ．

我々は [Kac] のような群の構成を避けるので，軌道と言っても意味は曖昧である．そこで直接に軌道を使うかわりに"Λ-不変集合"

$$UGM^{\Lambda\otimes 1_r} := \{\xi \bmod GL(\mathbb{N}^c\times r)\ ;\ \pi_*\delta(\Lambda\otimes 1_r) = 0 \text{ at } \xi\}$$

1_r : $r\times r$ 単位行列

を考える．これは$\Lambda\otimes 1_r$の(無限小作用)で動かない点の集合である．$\Lambda^n\otimes E^{(\alpha\beta)}$と$\Lambda\otimes 1_r$は可換であるからUGM上で見ればやはり無限小作用も可換である．従って$UGM_\phi^{\Lambda\otimes 1_r}$はカレント代数の生成する"群もどき"の作用で保たれると考えられる．

以下話を具体的にするために$UGM_\phi^{\Lambda\otimes 1_r} := UGM^{\Lambda\otimes 1_r} \cap UGM_\phi$の上で座標系$W_\phi = (w_{ij}^{(\alpha\beta)})$を使って話を進める．リー代数の表現を考えるには何にせよこれで充分である．記号の便宜の為$w_{ij} := (w_{ij}^{(\alpha\beta)})_{0\le\alpha,\beta<r}$と置く($r\times r$行列)．$UGM_\phi^{\Lambda\otimes 1_r} \subset UGM_\phi$の定義方程式を具体的に計算してみると

$$w_{i+1,j} = w_{i,j-1} + w_{i,-1}w_{0j} \quad (i\in\mathbb{N},\ j\in\mathbb{N}^c)$$

となる．ところでこういうw_{ij}の構造は良く判っていて[Tak1]，その結果によると，形式的ローラン級数

$$w(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} w_n \lambda^{-n}, \qquad w_0 = 1_r = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_n = (w_n^{(\alpha\beta)})_{0\le\alpha,\beta<r} \in \mathfrak{gl}(r)$$

と次のような対応関係で1対1に対応する：

$(w(\lambda) \to w_{ij})$

$$w_{ij} = \sum_{k\in\mathbb{N}^c} w_{i-k}^{*} w_{k-j}, \quad 但し \sum_{n=0}^{\infty} w_n^{*}\lambda^{-n} := w(\lambda)^{-1}$$

$$(w_{ij} \to w(\lambda)) \qquad w_n = -w_{0,-n} \quad (\Leftrightarrow \; w_n = w_{n-1,-1})$$

そこで $UGM_\phi^{\Lambda\otimes 1_r}$ の座標として $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ を採ることができる.（特に $UGM_\phi^{\Lambda\otimes 1_r}$ はアフィン空間である.）

こうして $UGM_\phi^{\Lambda\otimes 1_r}$ 上のアフィン座標系の存在とその意味が明らかになる. $\pi^{-1}UGM_\phi^{\Lambda\otimes 1_r}$ 上の座標系としては従ってこれに ξ_ϕ を付け加えた (w_n, ξ_ϕ) が採れる. そこで問題は, こういう座標系によってカレント代数がどのように表現されるのか, ということである.

これは基本的には今迄の議論を総動員して計算をすれば答の出ることである. 途中の計算は少し技巧的になるので一切省いて結果だけを示すと, 次のようになる.

$$\tilde{\delta}(\Lambda^n \otimes E^{(\alpha\beta)})\, w(\lambda) = -\left(w(\lambda)\lambda^n E^{(\alpha\beta)} w(\lambda)^{-1}\right)_-$$

$$\tilde{\delta}(\Lambda^n \otimes E^{(\alpha\beta)})\, \xi_\phi = \operatorname{res} \operatorname{tr}\left(\lambda^n E^{(\alpha\beta)} w(\lambda)^{-1} \frac{dw(\lambda)}{d\lambda}\right) \xi_\phi$$

但しここで $(\ )_-$, ついでに $(\ )_+$, はそれぞれ λ の負巾・非負巾部分のみ取り出すことを意味する：

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\lambda^n\right)_+ := \sum_{n\geq 0} a_n\lambda^n \;, \quad \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\lambda^n\right)_- := \sum_{n<0} a_n\lambda^n \;.$$

res は既に出て来たように, λ^{-1} の係数をあらわす.

$w(\lambda)$ に対する無限小作用は積分可能系の理論で無限小リーマン・ヒルベルト変換として知られているもの（例えば [Wu] など参照）に他ならない．これを

$$\delta(\Lambda^n \otimes E^{(\alpha\beta)})w(\lambda) = B(\lambda)w(\lambda) - w(\lambda)\lambda^n E^{(\alpha\beta)}$$

$$B(\lambda) := (w(\lambda)\lambda^n E^{(\alpha\beta)} w(\lambda)^{-1})_+$$

と書いてみるともう少し対応が見易いかも知れない．この式の右辺は積分可能系の理論で頻繁に出てくる形式である（例えば時間発展の記述）．

ξ_ϕ に対する無限小作用の方は少し見慣れない形をしている．このようなものがカレント代数の表現論で既に知られているものなのかどうか筆者は知らない．しかし文献を探してみると積分可能系の理論では既知のものであった！ [Jim-Miw 1] で一般形のスペクトル保存変形の理論が展開されているが，その中でτ函数を

$$d \log \tau = \omega \quad (d \text{ は変形パラメータについての全微分})$$

という形で定義するのに使われる閉微分形式 ω がまさに上の ξ_ϕ の無限小変換の右辺の様な量で構成されているのである．ξ_ϕ はもともとτ函数と直接の関係があったから（第3-6節）これはむしろ当然の結果と言うべきではあろう．しか

しながらここでの我々の取扱いの方が一応より一般的なことを言っている．[Jim-Miw1] ではスペクトル保存変形の変形パラメータ（＝時間変数）に関する無限小変化だけが（微分形式 ω の形で）現れているのに対して，ここではカレント代数の全ての元が同じように無限小作用するということが示されているからである．この辺のことを定常軸対称重力場の変換群に現れる中心拡大の構造 [Bre-Mai] と比べてみるのも面白かろう．

カレント代数の C-基底 $\Lambda^n \otimes E^{(\alpha\beta)}$ の代わりに一般の1次結合 $\gamma(\Lambda) = \sum \Lambda^n \otimes \gamma_n$, $\gamma_n \in gl(r)$, を使って上の変換公式を書いてみることも感じを体得するのに役立つ．$\gamma(\Lambda)$ に対しては

$$\tilde{\delta}(\gamma(\Lambda))w(\lambda) = -(w(\lambda)\gamma(\lambda)w(\lambda)^{-1})_-$$
$$\tilde{\delta}(\gamma(\Lambda))\xi_\phi = \operatorname{res}\operatorname{tr}\left(\gamma(\lambda)\, w(\lambda)^{-1}\frac{dw(\lambda)}{d\lambda}\right)$$

となる．

ここではあるいみで"$\lambda = \infty$（あるいは0）に中心をもつ"カレント代数のみを扱っているが，[Jim-Miw1] などから読み取れるように実際には"多中心"のカレント代数の理論がつくれるはずである．([Tak2] では $\lambda = \infty, 0$ に関する"2中心理論"を試みたが，そこでは ξ_ϕ を導入していない．）そういう方向ではもう少しやるべきことが残っているように思う．

5. 高次元化 — 場の量子論からの接近

我々はこれまで普遍グラスマン多様体の様々な側面を調べて来たが，これを"高次元的に"拡張するという方向を考えると，場の量子論から学ぶべき点は少くない．

まず強調したいのは，無限次元空間，直線束，接続，曲率，というキィワードはここ数年の場の量子論の進歩の中で基本的な位置を占めるようになってきたということである．普遍グラスマン多様体を前節まで論じてきたような形式で見直したいと筆者が思いたったのは，場の量子論の方ですでに登場しているそのような舞台装置をもう少し理解し易いものにするための手近なモデルが欲しかったからである．同じことを最初から［Jim-Miw ］のような場の量子論的形式で考えてもよいのであろうが，そうしなかったのは，ひとつには筆者が［Sat-Sat］流の理論構成の方に慣れているせいもあるが，別の理由としては，同じ場の量子論と言っても［Jim-Miw ］と普通物理で用いる設定とでは見掛上かなりの違いがあるように見えたからでもある．（本当はそうでもないのだそうだ．）

さて，場の量子論でこのような幾何学的舞台装置が用いられたのは"異常（アノマリー）"という現象を説明するためである．"アノマリー"はいろいろな意味で用いられてきた

言葉だが，ここでは古典論のもつ対称性が量子論のレベルで破れることを言う．このことの意味を説明するには量子化とは何かということから始めなければならないが，筆者には荷が重すぎるし中途半端な説明をしても真意は伝わらないだろうから，[Itz-Zub] のようなちゃんとした教科書で勉強することをお勧めする．ただし，数学者の為にひと言だけ注意しておくと，ここで古典論と言っているのは量子論をつくるための出発点となるラグランジアンを与えることであるが，それに対応する古典場が現実に存在するわけではない．そして，ラグランジアンが与えられればオイラー・ラグランジュ方程式によって場の方程式が書けるが，たとえ量子化された場が同じ形の方程式を満たすとしても，場の量子論で問題となるのはそれを解くことではない．この辺を誤解している数学者がかなり居る．

[Itz-Zub] は 1980年に出た本なので，アノマリーについては摂動論的計算に基く議論しか扱っていない．そしてアノマリーについての記述は全体の中で余り大きな比重を占めていない．それでもアノマリーが素粒子論の模型の構築において重要な要素になりそうだ，ということはちゃんと注意してある．これはどういうことかと言うと，アノマリーには実は無害なものと有害なものがあって，無害なものはむしろ場の

量子的効果を反映して実験とのより良い一致を与える点で有用でさえあるのだが，有害なものは量子化の手続きを阻害して理論自体を破壊してしまう．だから模型の構築にあたっては有害なアノマリーは全体として打ち消し合うようにしなければならない．これが模型に対するかなり強い制約になって，うまくすればこの数学的要請が模型をきめてしまう（例えば幾つかの基本的要請からEinsteinが重力場の方程式の形を決めたように）ということさえあり得る，というわけである．同じ様な事情は，アノマリーの種類が多少異なるが，最近の弦模型にもあって，時空の次元が26だとか10だとかいう話はその辺に関係している．

アノマリーの研究にAtiyah-Singerの指数定理とかK理論とかが応用されて急に数学的色彩が濃くなったのは1984年前後からであろう．もっとも，それ以前から指数定理や特性類との関係は或る程度知られていたが，それは前述の意味で無害なアノマリーについてであった．1984年前後に問題になったのは有害なアノマリーの方で，具体的にはある種のフェルミ場と相互作用する非可換ゲージ場においてゲージ対称性にアノマリーが生じるという問題である．このアノマリーの構造が拡張された指数定理やK理論と直接に結びついている，ということがそれ以後の研究で明らかにされたのである．詳し

くは[深谷]とそこに引用された文献を参照されたい.

指数定理やK理論は位相的あるいは微分幾何学的な道具だが，同じころアノマリーの代数的，特にコホモロジー的側面により重点を置いた方法も見出されている．この方法はいわゆるBRS対称性の視点の応用であるが，特性類の理論の代数的側面だけを抽象して一層発展させたものという見方もできる．詳細は[菅野]とその引用文献を見よ．

以上二つの視点はラグランジュ形式に基づくものだが，一方時間を特別視したハミルトン形式での議論もなされている．こちらではアノマリーそのものよりは"シュウインガー項"，つまり同時刻における或る種の作用素(それはやはりゲージ対称性に関係するのだが)の交換関係の異常項が主な考察の対象になる．もっとも，それとはまた違った位相的な問題設定でハミルトン形式における問題を扱う立場(Berry phase)もある．これらについては[細野]とその引用文献に譲る．アノマリーとシュウインガー項は同じものの二つの異なる現われ方である，と広く信じられている．計算してみれば確かにそうなっているし，何か理由らしきものを議論した論文もいろいろあるが，筆者は数学的に厳密かつ明快にそれを証明したものはまだ無いと考える．

さて，歴史的経緯の説明はこのくらいにして，アノマリ

リーを無限次元の幾何学として理解する枠組について説明しよう．以下我々が扱うのは専ら前述の非可換ゲージ対称性のアノマリーである．これは非可換ゲージ場が，物理学者がカイラルフェルミ場と呼ぶものと相互作用する系において現れるもので，ゲージ場は量子化されていない外場として与え，フェルミ場の方だけを量子化して考えるというのがミソである．フェルミ場の量子化は経路積分により行う．これは典型的なラグランジュ形式の定式化であり，このようにフェルミ場の量子化を先に行ってしまえることが数学的扱いを少し楽にしている．ハミルトン形式では今の所そうは行かない．

このアノマリーを幾何学的に記述する舞台となるのはゲージ場のゲージ同値類の空間 $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ である．ここに $\mathcal{A}$ はゲージ場の全体，$\mathcal{G}$ はゲージ変換の全体（群をなす）である．但し，技術的な理由で或る条件を満たすゲージ変換のみを持って来て $\mathcal{G}$ とすることもあるが，今はそれについては触れない．拡張された指数定理の応用［Ati-Sin］も $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ の幾何学に基く．ゲージ場の棲む時空多様体としては偶数次元コンパクト多様体，特に球面 S^{2n} を考える．S^{2n} で考えているときには次元を明示して $\mathcal{A}^{(2n)}/\mathcal{G}^{(2n)}$ とでも書くことにしよう．

この場合のアノマリーは"1-loop effective action"と呼ばれる量 $\Gamma(A)$, $A\in\mathcal{A}$, がゲージ変換 $\Gamma(A)\to\Gamma(A^g)$, $A^g:=g^{-1}Ag+g^{-1}dg$,

$g\in\mathcal{G}$，で不変でなくなること，というように定式化されるのが1984年以降の一般的考え方である．Γ(A)は経路積分

$$W(A):=\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^* e^{S(A,\psi,\psi^*)}$$

の対数として与えられ，実質的にはこのW(A)のゲージ変換に対する振舞が問題になる．ここでψ,ψ^*はフェルミ場，SはAを外場（量子化されていない）として含むフェルミ場の作用積分で，ψ,ψ^*をAのゲージ変換にあわせて適当に変換すると不変になっている．つまりe^Sの部分はゲージ不変で，ゲージ不変性を破る要素は$\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^*$の定義そのものの中にある．

このW(A)は一種の無限次元行列式と解釈される．Sはψ，ψ^*について双線型で，一般にψ,ψ^*のような反可換数しグラスマン数）に関するこの型の積分は行列式で定義される（例えば[Itz-Zub]第9章を見よ）．ただ，ここではψ,ψ^*はグラスマン数に値をとる場であるから行列式としては無限次元のものになるのである．従ってそれをどのように意味づけるかを決めなければならない．（これは経路積分について一般的に言えることで，経路積分の形に書くということは決してその量を定義するということではない．むしろ象徴的な表現と考える方がよい．）よく使われるのはζ-函数の解析接続を利用する方法（例えば[Ati-Sin]を見よ）であるが，他にもいろい

ろあり，どのようなやり方で行列式を意味付けるかによって実際に答が違ってくることがある．しかしながらそのような違いは物理的内容を変えないと一般に信じられている．数学的にはこの食い違いは何らかのコバウンダリーと解釈される（[菅野]とその引用文献を参照）。

W(A)はこのように形式的には行列式だが何らかの意味づけを要する量である．そしてその意味づけ（物理学者のいう"正則化"）の操作が介在するためにゲージ不変性を失う，つまり

$$W(A^g) = W(A)e^{\omega(A,g)}, \quad \omega(A,g) \neq 0$$

ということが起こる．これがアノマリーである．普通はこのような有限のゲージ変換の代わりに無限小ゲージ変換の形でアノマリーの形を決めることが多い（前掲の文献を参照）。$\omega(A,g)$は"積分された"アノマリーと言うべきものである．

上の事実を幾何学的に言うと，W(A)は$\mathcal{A}/\mathcal{G}$上の函数ではなくて何かある直線束の切断だ，ということである．この直線束$\mathcal{L}$は行列式の意味づけ云々という解析的問題とは一応別の形で，Quillenがリーマン面上の類似の問題を扱ったときのアイディア[Qui]に沿ってもっと幾何学的に構成できる．しかも，[Qui]によればこのとき$\mathcal{L}$には同時に或る接続（と計量）が入るのである．ゲージ場の場合も含む非常に一般的な状

況でこのことを詳しく論じたのが[Bis-Fre]である．但しこの Bismut, Freed の仕事では $\mathcal{A}$ や $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ のような無限次元空間を底空間として直接に扱うことは避けて，代わりに有限次元多様体（ゲージ場の有限次元族のパラメータ空間）上に直線束とその上の接続や計量を構成している．これは $\mathcal{A}$ の中に任意に有限次元族をとりそれについて計算することで $\mathcal{A}$ 自体を知る，という原理に基いている．[Ati-Sin]もよく読むとそういう立場で $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ の幾何学を理解していることがわかる．いずれのやり方を採るにせよ，この種の議論で構成される直線束 $\mathcal{L}$ は一般的に"行列式束"と呼ばれる．

　ここまでの舞台装置を普遍グラスマン多様体と比較すると次のような対応表が見えて来る．

ξ_φ	$\longleftrightarrow$	$W(A)$	：直線束の切断
$\widetilde{UGM}$	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{L}$	：直線束
UGM	$\longleftrightarrow$	$\mathcal{A}/\mathcal{G}$	：底空間
3-5節の接続	$\longleftrightarrow$	Bismut-Freed の接続	：接続

ここで $\mathcal{G}$ に対応するものが普遍グラスマン多様体では何になるのかが気になる．ひとつの見方は $Fr(\mathbb{Z}, \mathbb{N}^c) \longleftrightarrow \mathcal{A}$ 及び $GL(\mathbb{N}^c) \longleftrightarrow \mathcal{G}$ というように対応させてみることだが，こ

れでは ξ_ϕ は $h \in GL(\mathbb{N}^c)$ の右作用に従って $\xi_\phi \longrightarrow \xi_\phi \det h$ と変換するだけで"異常"でも何でもない．この場合の正しい解釈は，アノマリーは第3-3-3節に出てきたような無限行列の作用（あそこでは左から掛けたが，それを今後は右から掛ける）に伴うもので，ただその行列式の値を1とみなすので表面化しないだけなのだ，ということであろう．そのような行列は $GL(\mathbb{N}^c)$ には属さないことに注意されたい．この段階では隠れていてもあとで曲率に影響して来る，というのはそのとき注意した通りである．

上の対応表ではプリュッカー座標と $\mathfrak{gl}(\mathbb{Z})$, $\widetilde{\mathfrak{gl}}(\mathbb{Z})$ に対応するものがまだ出て来ていない．プリュッカー座標にあたるものが何か，は実質的に[Ati-Sin]からも読みとれる．それはフェルミ場の多点相関函数であって，正確には

$$\xi_S \longleftrightarrow \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^* e^{S(A,\psi,\psi^*)} \psi(x_0)\psi^*(y_0)\cdots\psi(x_{m-1})\psi^*(y_{m-1})$$

$$W_\phi = (w_{ij}) \longleftrightarrow \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^* e^{S(A,\psi,\psi^*)}\psi(x)\psi^*(y) \Big/ \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi^* e^{S(A,\psi,\psi^*)}$$

$$S,\ (i,j) \longleftrightarrow (x_0, y_0, \cdots, x_{m-1}, y_{m-1}),\ (x,y)\ \text{(時空点の組)}$$

という対応になる．普遍グラスマン多様体の場合プリュッカー座標はフェルミ場の多点相関函数（のフーリエ展開係数）として書ける[Jim-Miw]ので，これは自然な考え方である．

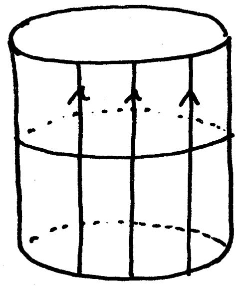
問題は $\mathfrak{gl}(\mathbb{Z})$, $\widetilde{\mathfrak{gl}}(\mathbb{Z})$ の対応物，そして等質性である．筆者は非可換ゲージアノマリーについて考えていた当初，これらに対応するリー代数は時空多様体が S^{2n} の場合 S^{2n-1} 上のゲージ変換群 $\mathcal{G}^{(2n-1)}$ のリー代数と［Mic］が構成したその拡大（中心拡大ではなくて無限次元アーベル拡大）であり，それらが $\mathcal{A}^{(2n)}/\mathcal{G}^{(2n)}$ およびその上の行列式束 $\mathcal{L}$ に推移的に作用する，と思っていた．しかしそれはどうやら間違っていたようである．$\mathcal{G}^{(2n-1)}$ は確かに $\mathcal{A}^{(2n)}/\mathcal{G}^{(2n)}$ と密接に関連しているが，それは後者に対して自然な作用を持たない．もしそのような作用があって推移的であるならば $\mathcal{A}^{(2n)}/\mathcal{G}^{(2n)}$ は普遍グラスマン多様体の非常に良い高次元化の例を与えるのだが，今一歩のところでこれはうまく行かない．

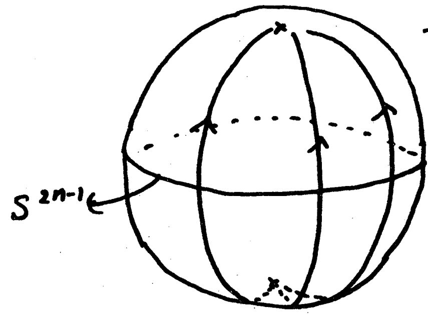
$\mathcal{A}^{(2n)}/\mathcal{G}^{(2n)}$ と $\mathcal{G}^{(2n-1)}$ の関係は［Ati-Jon］にも触れられているが，［Mic］の議論に従うともう少し精密なことが言える．いま S^{2n} を $\mathbb{R}^{2n}$ の共型的1点コンパクト化 $S^{2n}=\mathbb{R}^{2n}\cup\{北極\}$ とみなして，$\mathbb{R}^{2n}$ の Euclid 距離 $r:=|x|$ を考える．$r=0$ は南極，$r=1$ は赤道をあらわす．南極を出発して大円に沿って北極に流れ込む flow を考え，r を"時間パラメータ"にとる．S^{2n-1} 上の Euler 角か何かのような適当な座標 ω をとり (r,ω) を考えると，これは $\mathbb{R}^{2n}$ の極座標である．このとき flow の方向ベクトル場 ∂_r ができる．（$r=0,\infty$ で不

定だが.)このときMickelssonはゲージ場の∂_r方向成分A_rが消えるようなゲージを選ぶ:

$$A_r = 0$$

これは"radialゲージ"と呼ばれるものだそうだが, rを時間と思えば(これは正定値計量の時空ではそれほど変な考え方ではなく, 特にS^2の場合には物理でもしばしばやることである)"Weylゲージ"に対応するものとみなせる. Weylゲージはハミルトン形式のゲージ理論で重要になる[細野].





さてこのようなゲージは$S^{2n} \setminus \{北極\}$, $S^{2n} \setminus \{南極\}$のそれぞれ($\cong \mathbb{R}^{2n}$)で別個にとれる. それぞれの上でのゲージ場をA_+, A_-と書くと, これらは共通集合 $S^{2n} \setminus \{北極, 南極\}$上ゲージ変換で結ばれる:

$$A_- = A_+^g = g^{-1} A_+ g + g^{-1} dg$$

しかも$A_\pm$がそれぞれradialゲージ条件をみたしているので$S^{2n} \setminus \{北極, 南極\}$上の$G$(構造群)値函数$g = g(x)$は

$$\partial_r g = 0$$

を満たす，つまり r には依らない．これはつまり $g \in \mathcal{G}^{(2n-1)}$ ということである．そして radial ゲージにおける S^{2n} の2枚の座標近傍上の局所自明化のはり合わせ函数として自然に $\mathcal{G}^{(2n-1)}$ の元が現れる．

$\mathcal{G}^{(2n)}$ として $g(r=\infty)=1$（これが前に触れた技術的条件の一例）をみたすゲージ変換全体をとれば，以上の議論によって $\mathcal{A}^{(2n)}/\mathcal{G}^{(2n)} \longrightarrow \mathcal{G}^{(2n-1)}$ という写像ができる．[Ati-Jon] はこれが"ホモトピー同値"であることを示している．これがもしも本当の同型写像であれば $\mathcal{A}^{(2n)}/\mathcal{G}^{(2n)}$ は $\mathcal{G}^{(2n-1)}$ 上の等質空間になるのだが，ホモトピー同値ではどうしようもない．そういう訳で $\mathcal{A}^{(2n)}/\mathcal{G}^{(2n)}$ を普遍グラスマンの拡張とみなすことにはどうも無理がある．

このように $\mathcal{A}^{(2n)}/\mathcal{G}^{(2n)}$ 自体にこだわっていると局面の打開は難しいのだが，[Mic] はむしろ $\mathcal{G}^{(2n-1)}$ の上で幾何学を展開しておいて $\mathcal{A}^{(2n)}/\mathcal{G}^{(2n)}$ の幾何学は前者の $\mathcal{A}^{(2n)}/\mathcal{G}^{(2n)} \longrightarrow \mathcal{G}^{(2n-1)}$ による引き戻しとして理解することをめざしているようである．具体的には $\mathcal{G}^{(2n-1)}$ とそのリー代数の拡大を或るコサイクルによって構成し，それを $\mathcal{G}^{(2n-1)}$ 上の幾つかのファイバー束と関係づけている．$n=1$（つまり S^2）の場合には確かにそうやってカレント代数が出て来て，またその場合 $\mathcal{A}^{(2)}/\mathcal{G}^{(2)} \longrightarrow$

$\mathcal{G}^{(1)}$による$\mathcal{G}^{(1)}$上の直線束の引戻しは$\mathcal{A}^{(1)}/\mathcal{G}^{(1)}$上の行列式束と実質的に一致する，と主張している．つまり$\mathcal{A}^{(2n)}/\mathcal{G}^{(2n)}$にはそのように，いわば間接的ながら，群論的構造が反映されているのだと言いたいらしい．ここで用いられているコサイクルはシュウインガー項，つまりハミルトン形式で現れるアノマリーで，その一般的構造はBRS対称性の手法を使って非常にきれいな形で決定されている[Zum]．

Mickelssonの以上の議論の問題点はその基礎づけが少々あやふやなことにある．実際そこではS^{2n}を半球面D^{2n}に置きかえて理論を再構成しているが，これがもとのS^{2n}とどうつながるのか筆者には今ひとつ判らない．代数的処理や微分形式の積分の取扱いには確かにそのことがかなり本質的に効いていて，議論をS^{2n}に焼き直そうとしてもなかなかうまく行かない．もともと$2n$次元のゲージ変換のアノマリーと$2n-1$次元のゲージ変換のシュウインガー項をMickelssonのように直接結びつけようとするのは，今迄かなり異質な形で展開されてきた二つの形式，ラグランジュ形式とハミルトン形式を同一の土俵にのせることであるから，厳密に実行するのは容易ではない．半球面が現れるのはまことにもっともで，rを前述の如く"時間"と見ると，半球面は無限の過去($r=0$)から現在($r=1$)にわたる経過を記述するハミルトン形式の

舞台にふさわしい．（シュウインガー項は同時刻——現在——におけるゲージ変換の振舞に関係している.）しかしラグランジュ形式では“未来”も同時に問われる，つまり S^{2n} 全体が問題になる．とにかく，Mickelssonの主張を厳密に基礎づけて発展させて行くことは今後是非ともやらねばならぬ課題である．

このように $\mathcal{G}^{(2n-1)}$ のような無限次元の群（あるいはむしろ $\mathcal{G}^{(2n-1)}/G$ のような等質空間と言うべきかも知れない）の上に幾何学的構造が乗っているという状況は，最近別の視点からもいろいろ論じられるようになっている．例えば $\mathcal{G}^{(1)}/G$ についてはFreedがケーラー幾何学の無限次元版という視点から詳しく論じている［Fre］．弦模型の方では $\mathrm{Diff}\,S^1/S^1$ の同様の幾何学的構造に基いて理論を構築しようという試みがBowick，Rajeev により提案され［Bow-Raj］，摂動論（リーマン面のモジュライ理論）を越えて非摂動論的記述（弦の場の理論）へ道を開くひとつの可能性として一部で注目を集めている［Sch］．$\mathcal{G}^{(1)}/G$ にせよ $\mathrm{Diff}\,S^1/S^1$ にせよ本質的には普遍グラスマン多様体に埋め込めるらしいが［Mic 1］，こういうところにむしろ高次元化のヒントが隠されているのかも知れない．関連する話題として［F-G-Z］，［Kir-Yur］，［Kos-Ste］，［H-H-R-R］，［Bow-Raj 1］なども掲げておく．ただこの中には明瞭に高次元化をめざすものはないようである．

この節では主にゲージ場と結合したフェルミ場について考えてきた．それはこういう場合が良く研究されていて手掛かりも多いからだが，本当はこれはもっと広いクラスのフェルミ場（quasi-free と言われる）のほんの一部に過ぎないのだそうだ．（小嶋泉氏の御教示による．）普遍グラスマン多様体は別の言い方をすれば2次元時空におけるそのようなフェルミ場全体のモジュライ空間と考えてよい．従って高次元でも最終的には同じ様な形で"普遍"理論ができるかも知れない．

以上，我々は普遍グラスマン多様体に類似の構造を求めて場の量子論の幾つかのテーマを取材して来た．結局"高次元的拡張"の決定的手掛かりは残念ながらまだ得られず，多くの問題点を今後に残している．

しかしながらこの一連の文献調べを通じて筆者がつくづく感じたのは，場の量子論全般にわたって随所に見られる代数的構造の豊かさである．場の量子論における代数的構造というと普通は作用素環を思い浮かべるのであろうが，ここで言う代数的構造はもっと計算技法的側面，特に相関函数やグリーン函数，頂点函数などの間を結ぶ関係式に関わるものである．その典型はゲージ対称性やBRS対称性のコホモロジー的取扱い，そこから導かれる各種の恒等式，などに見ること

ができるが，他にもいろいろある．例えば"繰り込み"というもっと基本的な問題を考えても，無限個のファインマン積分に対して一斉に発散を除去できることは何らかの代数的構造(むしろ組み合わせ論的と言うべきかも知れない)の存在を反映しているわけで，それが"繰り込み群""作用素積展開""Ward-Takahashi恒等式"などのいろいろな形態で表面化していると考えられる．同じ様なことは超対称性の下での発散項の打消し合い現象についても言える．これらのことはもっと深いレベルでみなつながっているのではないか，とさえ思われてくる．

筆者はこういう代数的構造を場の量子論における"代数解析的構造"と呼んでみたいと思う．[Itz-Zub]のような標準的教科書を眺めていても，至る所にそのような構造が見え隠れしているのである．そういうものを掘り起こして行くことが代数解析の今後の新しいテーマになり得るのではないか．今迄の代数解析は場の量子論への応用を考えるときにも"有限性"ということに少し固執し過ぎていた面がある．場の量子論は本来"無限性"を内包している．だから無限個の量，例えば多点グリーン函数全部，が一般には必要になる．今後試みて行かねばならないのは，それらの間を強力な代数的関係で結ぶ(そのためには汎函数微分が不可欠だろう)ことで

"無限"を統制するというプログラムである．普遍グラスマン多様体はその原型となるべき材料を提供しているのではないか．

引用文献

序説：

[Sat-Sat] M. Sato, Y. Sato, in Proc. U.S.-Japan seminor "Non-linear PDE in Applied Science" Tokyo 1982, ed. P.D. Lax, H. Fujita, North-Holland 1982.

[Jim-Miw] M. Jimbo, T. Miwa, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 19 (1983), 943-1001.

[Seg-Wil] G. Segal, G. Wilson, Publ. IHES 61 (1985).

[崇谷] 崇谷俊樹，素粒子論研究 71-2 (1985), 65-115.

[菅野] 菅野浩明，素粒子論研究 37-5 (1986), 209-243.

[細野] 細野 忍，素粒子論研究 75-4 (1987), 37-73.

[Bis-Fre] J.-M. Bismut, D. S. Freed, Commun. Math. Phys. 106 (1986), 159-176 ; ibid. 107 (1986), 103-163.

[Mic] J. Mickelsson, Commun. Math. Phys. 110 (1987), 173-183.

第1節：

[Sat-Sat] 上掲

[Tak] K. Takasaki, Integrable Systems as Deformations of D-Modules, RIMS-601, 1987.

第2節：

[Sat-Sat] 上掲

[Sat-Nou] 佐藤幹夫，野海正俊，ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体，上智大学講究録 No.18, 1984.

[Seg-Wil] 上掲

第3節：

[Sat-Sat] 上掲

[Seg-Wil] 上掲

[Kac] V. Kac, in "Infinite-Dimensional Lie Groups", ed. V. Kac, Publ. MSRI vol. 4, Springer 1985.

[Ber-Roz] I. N. Bernstein, B. I. Rozenfel'd, Russ. Math. Surv. (Uspekhi Mat. Nauk 28 (4) (1973), 103-138).

[Pre-Seg] A. N. Pressley, G. Segal, Loop Groups and their Representations, Oxford University Press 1986.

[Fre] D. S. Freed, in "Infinite-Dimensional Lie Groups", Publ. MSRI. vol 4, Springer 1984.

[Mul] M. Mulase, Adv. Math. 54 (1984), 57-66.

[辻下] 辻下徹，数学 35-4 (1983), 332-357.

[Ibr] N. H. Ibragimov, Math. USSR Sbornik 37 (1980), 205-226.

[Vin] A.M. Vinogradov, J. Soviet Math. 17 (1981), 1624-1649.

[Jim-Miw] 上掲

[A-DeC-K-P] E. Arbarello, C. De Concini, V. Kac, C. Procesi, Moduli Space of Curves and Representation Theory, Preprint 1987.

[A-G-R] L. Alvarez-Gaumé, C. Gomez, C. Reina, Phys. Lett. B190 (1987), 55-62.

[B-M-S] A.A. Beilinson, Yu. I. Manin, Y.A. Shechtman, Localization of the Virasoro and Neveu-Schwartz Algebra, Preprint 1986.

[K-N-T-Y] N. Kawamoto, Y. Namikawa, A. Tsuchiya, Y. Yamada, Geometric Realization of Conformal Field Theory on Riemann Surfaces, Preprint 1987.

[Vaf] C. Vafa, Phys. Lett. B190 (1987), 47-54.

[Wit] E. Witten, Quantum Field Theory, Grassmannians and Algebraic Curves, PUPT-1057, 1987.

第4節：

[Sat-Sat] 上掲

[Jim-Miw] 上掲

[Seg-Wil] 上掲

[God-Oli] P. Goddard, D. Olive, Intern. J. Modern Phys. A, 1 (1986), 303-414.

[Tak 1] K. Takasaki, Commun. Math. Phys. 94 (1984), 35-59.

[Wu] Y.-S. Wu, Commun. Math. Phys. 90 (1983), 461-472.

[Jim-Miw 1] M. Jimbo, T. Miwa, Physica 4D (1981), 26-46.

[Bre-Mai] P. Breitenlohner, D. Maison, Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique, 46 (1987), 215–246.

[Tak2] K. Takasaki, Saitama Math. J. 3 (1985), 11–40.

第5節：

[Jim-Miw] 上掲

[Itz-Zub] C. Itzykson, J.-B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill 1980.

[俟谷] 上掲

[菅野] 上掲

[細野] 上掲

[Mic] 上掲

[Ati-Sin] M.F. Atiyah, I.M. Singer, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 81 (1984), 2597–2600.

[Qui] D. Quillen, Funct. Anal. Appl. (Funkt. Anal. Pril. 19 (1985), 37–40.)

[Bis-Fre] 上掲

[Ati-Jon] M.F. Atiyah, J.D.S. Jones, Commun. Math. Phys. 61 (1978), 97–118.

[Zum] B. Zumino, Nucl. Phys. B253 (1985), 477–493.

[Fre] 上掲

[Bow-Raj] M.J. Bowick, S.G. Rajeev, Nucl. Phys. B293 (1987), 348–384.

[Sch] J.H. Schwarz, Intern. J. Modern Phys. A, 2 (1987), 593–643.

[Bow-Raj 1] M. J. Bowick, S. G. Rajeev, Anomalies as Curvature in Complex Geometry, MIT-CTP # 1449, 1987.

[F-G-Z] I. B. Frenkel, H. Garland, G. J. Zuckerman, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 83 (1986), 8442-8446.

[Kir-Yur] A. A. Kirillov, D. V. Yur'ev, Funct. Anal. Appl. (Funkt. Anal. Pril. 20 (1986), 79-80).

[Kos-Ste] B. Kostant, S. Sternberg, Anal. Phys. 176 (1987), 49-113.

[Mic 1] J. Mickelsson, Commun. Math. Phys. 112 (1987), 653-661.

[H-H-R-R] D. Harari, D. K. Hong, D. Ramond, V. G. J. Rodgers, Nucl. Phys. B294 (1987), 556-572.

(1987年12月)