

実関数芽の変形について

東工大D1 友延 政彦 (Masahiko Tomonobu)

$f_0: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ を、原点で代数的孤立特異点をもつ実解析関数芽とし、 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}, 0$ を、その実解析変形とする。ここでは、関数 f_0 の特異点が、変形 f によ、どう分岐するかを位相的にとらえ、それを代数的に表現することを考えた。

変形 f を位相的にとらえようとするとき、基礎的で重要な問題は、その変形が位相的に自明となるか否かを決定することである。(変形 f は、 $h(x, t) = (\bar{h}(x, t), t)$ なる形をもつ位相同型の芽 $h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \times \mathbb{R}^p$ で、

$f \circ h(x, t) = f_0(x)$ をみたすものが存在するとき、位相的に自明であるという。) 複素の場合、同様の問題に対し、

Lê-Ramanujam, Timourian らの結果によ、 f の位相的自明性は f_t ($f_t(x) = f(x, t)$) の原点における Milnor 数一定というす、きりした条件で特徴付けられている ($n \neq 3$, [L-R], [T])。しかしいまのように実関数の場合には、King ([K])

の結果が示しているように位相的情報が、複素の場合のように代数的情報におきかえられず、変形 f が位相的に自明になるか否かを判別することは一般に難しいことがわかった。この結果、 f が 2 変数関数の場合には、特異点をもつ位相的情報が乏しいため、King の結果を使、2 変形 f が位相的に自明か否かを代数的に表現することができた。

命題 $n=2$ のとき、 f が位相的に自明であることは、

$\deg_0(df_t)$ が一定で $\deg_0(df_t) \neq 0$ なる f_t の特異点 a が $0 \times \mathbb{R}^p$ から分岐しないことと、同値である。

($\varphi: \mathbb{R}^n, a \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ で、 a の近くで $\varphi^{-1}(0) = a$ をみたす写像群に対し、 φ の a における局所写像度 $\deg_a(\varphi)$ を、

$\deg_a(\varphi) = \varphi|_{\varphi_1}: S_\varepsilon^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ の写像度、

で定義する。 $S_\varepsilon^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = \varepsilon\}$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$)

(注意 局所写像度は、Eisenbud-Levine ([E-L]) の定理) により、代数的に計算できる。

一般の n に対しては、上のようなことは成立しないが、特異点をもつ弱い位相的情報として、グラディエント写像の局所写像度に着目し、その分岐について、次の結果を得た。

n を一般のものとし、 $P=1$ とする。 $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ を任意の実解析関数群とする。 $f_t^+ = f_{t^2}^+$, $g_t^+ = g_{t^2}^+$ とおく。 $F^1 = (F_1, \dots, F_n, F_{n+1}^1): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0$

($i=1,2$) を、 $F_1 = df^+ / x_1, \dots, F_n = df^+ / x_n, F_{n+1}^1 = t \cdot g^+ + t^l, F_{n+1}^2 = t \cdot (g^+)^2 + t^l$ (l は十分大きな整数) で定義する。このとき次が成り立つ。

定理

1. l が十分大きな整数ならば、 F^i ($i=1,2$) は finite な写像芽となる。

2. l が十分大きな偶数ならば、

$$\deg_0(F^1) = \left(\begin{array}{l} t > 0, g > 0 \wedge \text{分岐する } f_t \text{ の特異点} \\ a \text{ 点の } \deg_a(df_t) \text{ の和。} \end{array} \right)$$

$$- \left(\begin{array}{l} t > 0, g < 0 \wedge \text{分岐する } f_t \text{ の特異} \\ \text{点 } a \text{ 点の } \deg_a(df_t) \text{ の和。} \end{array} \right),$$

$$\deg_0(F^2) = \left(\begin{array}{l} t > 0, g \neq 0 \wedge \text{分岐する } f_t \text{ の特異点} \\ a \text{ 点の } \deg_a(df_t) \text{ の和。} \end{array} \right),$$

が成り立つ。

(注意 この定理は 西村-福田-青木、各氏による定理) に触発され得られたものである (W-F-A)。

最後に、上の結果を得るまでの期間に、有意義な助言、励ましを与えて下さった福田拓生先生に、感謝の意を表します。

参考文献

- [E-L] D. Eisenbud & H.I. Levine, "An algebraic formula for the degree of a C^∞ map-germ", *Ann. Math.* 106 (1977), 19-38.
- [K] H.C. King, "Topological type in families of germs", *Invent. Math.* 62 (1980) 1-31.
- [L-R] Lê Dũng Tráng & C.P. Ramanujam, "The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type", *Amer. J. Math.* Vol. 98, No. 1 (1976) 67-78.
- [N-F-A] T. Nishimura, T. Fukuda & K. Aoki, "An algebraic formula for the topological types of one parameter bifurcation diagrams", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 108 (1989) 247-265.
- [T] J.G. Timourian, "The invariance of Milnor's number implies topological triviality", *Amer. J. Math.* Vol. 99, No. 2 (1977) 437-446.