数理解析研究所講究録
766巻 1991年 83-103



# Parabolic intial-boundary value problems and the asymptotic expansion of fundamental solutions

姫路工大　岩崎千里（Chisato Iwasaki）

## §1. Introduction.

$M$を次元$n$のcompact Riemann manifoldとし，$\Gamma$をその境界とする．次の放物型混合問題について考察する．

$$
(\mathcal{B})\begin{cases} Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t}+P\right)u(t,x)=0 & \text{in } (0,T)\times M, \\ \mathcal{B}u(t,x)=0 & \text{on } (0,T)\times\Gamma, \\ u(0,x)=\Phi(x) & \text{in } M. \end{cases}
$$

ここで，$P=-\Delta+P_1$，$P_1$は一階の微分作用素であって，$B$は以下で述べるような退化したものも含む，境界上の微分作用素とする．

目的は，$(\mathcal{B})$に対する基本解，即ち $LE(t)=0$, $\mathcal{B}E(t)=0$, $E(0)=I$ を満たす$E(t)$を，応用するのにできるだけ都合の良い形で構成する事である．どの様な応用かは以下

に述べる.

$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ を 楕円型境界値問題 (P, B) の固有値とする.

$$T_t(B) = (4\pi t)^{n/2} \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-\lambda_j t)$$

とおくと

$$T_t(B) = (4\pi t)^{n/2} \int_M E(t; x, x)\, dx$$

( $E(t; x, y)$ は $E(t)$ の kernel )

である.

$t \to +0$ のときの $T_t(B)$ の挙動が得られる様な基本解 $E(t)$ もしくは $E(t)$ の近似を得たい.

境界作用素Bとしては, 次の様なものを考察する.

(D) Dirichlet

(N) Neumann

(R) Robin $\quad B = \frac{\partial}{\partial n} + b(x)$

(O) Oblique $\quad B = \frac{\partial}{\partial n} + b(x, D)$

$\frac{\partial}{\partial n}$: 内向き単位法線微分,

$b(x, D)$ ; Γ上の複素数を係数とするベクトル場,

かつ 放物型境界値問題 ( See Arima [1] ).

以下の (S), ($\bar{\text{o}}$-N) は [1] の意味では放物型境界値問題とならない.

(S) Singular $\quad B = a(x)\frac{\partial}{\partial n} + b(x)$, ここで,

$a(x)$, $b(x)$ には次の仮定をおく.

$$(*)\begin{cases}(1)\ a(x) \geqq 0 & x \in \Gamma\ , \\ (2)\ b(x) < 0 & \text{if}\ \ a(x) = 0\ .\end{cases}$$

($\bar{\partial}$-N) $\bar{\partial}$-Neumann problem ( See [3]).

正確には，これは system に対する問題なのだが，本質的に問題となるのは，Oblique の形であって，放物型境界値問題でない．$Z(q)$ の仮定のもとに簡単のために，$(0, q)$-form の上で考える（ See [3]）.

§ 2. Results.

得られた基本解を使って

<u>Theorem 1（解の存在定理）.</u>

(O) ～ (S) については，任意の $p$ $(1<p<\infty)$, $\Phi \in L_p(M)$ に対して，(B) の解 $u(t) \in C([0, T];\ L_p(M))$ が得られ，$u(t) \longrightarrow \Phi$ in $L_p(M)$, かつ $u(t) \in \bigcap_s H_p^s(M)$ $(t>0)$ を満たす.

<u>Remark.</u> 上の結果は $a(x)$, $b(x, D)$ 又は $b(x)$ を $a(x, t)$, $b(x, t, D)$ 又は $b(x, t)$ としても同様に得られる.

$T_t$ (B) については，

<u>Theorem 2.</u> $t \longrightarrow +0$ のとき次の漸近挙動を得る.

(i) $T_t(D) = |M| - \frac{1}{2}\sqrt{\pi t}\,|\Gamma| + c_2 t + O(t^{3/2})$

(ii) $T_t(N) = |M| + \frac{1}{2}\sqrt{\pi t}\,|\Gamma| + \tilde{c}_2 t + O(t^{3/2})$

(iii) $T_t(R) = |M| + \frac{1}{2}\sqrt{\pi t}\,|\Gamma| + \left(\tilde{c}_2 + 2\int_\Gamma \mathfrak{b}(x)\,dS\right)t + O(t^{3/2})$

(iv) $T_t(O) = |M| + \sqrt{\pi t}\int_\Gamma\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\|\mathfrak{b}_2\|^2-\|\mathfrak{b}_1\|^2+2\langle\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2\rangle i}} - \frac{1}{2}\right\}dS$

$+ O(t)$, 但し $\mathfrak{b}(x,\xi) = \mathfrak{b}_1(x,\xi) + i\mathfrak{b}_2(x,\xi)$ とする.

$\mathfrak{b}_j(x,\xi)$ : real

上のいずれの場合も $T_t(B) \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j(B)\, t^{j/2}$ なる展開が得られる.

(v) $\Gamma_0 = \{x\in\Gamma : a(x) = 0\}$ とするとき $|\Gamma_0| > 0$ ならば,

$T_t(S) = |M| + \frac{1}{2}\sqrt{\pi t}\,\{|\Gamma| - 2|\Gamma_0|\} + o(\sqrt{t})$.

<u>Remark.</u> (i) $c_2$, $\tilde{c}_2$ は $M$, 及び $\Gamma$ の curvature を使って正確に書ける. (ii). (iv) において, 境界条件が放物型であることより $\sqrt{\phantom{x}}$ は well defined.

<u>Theorem 3.</u> Levi matrix に関する条件 $Z(q)$ のもとで

$T_t(\bar\partial\text{-}N) \underset{t\downarrow 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j/2} + \sum_{j\geq 2} c_j' t^{j/2}\log t$ であって, 特に $(0,q)$ form 上のものを書くと

$$c_0 = \sqrt{2}^{\,n}\left\{\binom{n/2}{q}|M| + \int_\Gamma \tilde{c}_0(x)\,dS\right\},$$

$c_1 = -\sqrt{2}^{\,n-1}\binom{n/2}{q}\frac{\sqrt{\pi}}{2}|\Gamma|$, さらに $l = \frac{n}{2} - 1$ とおくと

$\tilde{c}_0(x)$ は Levi matrix の固有値 $\{c_j(x)\}_{j=1}^{l}$ をつかって, 次の様に表わせる.

$$\tilde{C}_0(x) = \sum_J \int_0^\infty e^{-C_J\mu/2} \prod_{j=1}^{l} \frac{c_j\mu/2}{\sinh(c_j\mu/2)}\, d\mu , \quad C_J = \sum_{j\in J} c_j - \sum_{j\notin J} c_j ,$$

Jについての和は $J=(j_1,j_2,\dots,j_q)$ $1\leqq j_1<j_2\cdots<j_q\leqq l$ の全てを取るものとする．

## §.3. Histrical Remarks.

放物型方程式の境界値問題の基本解の構成については，Arima [1] 等の研究があるが，$T_t(B)$の漸近挙動に直接に応用できる結果のみに限ると，方法としては大きく分けて二通りある．才一の方法は，Mackean & Singer [8]で使われた方法で，$B=D$, $N$ の場合には，与えられた作用素Pを境界で折りかえして延長して，初期値問題の基本解を使うもの．このとき，係数がsmoothでなくなる欠点がある．才二の方法は Greiner [4] による，$(P+\lambda)$ に対して，Dirichlet問題を解いて，境界上の擬微分作用素に問題を帰着させる方法である．これはラプラス変換及びDirichlet問題を経由するので，初期値に対し$u(t,x)$がどのような形で求められるのかわかりにくい．[4]では$T_t(D)$, $M\subset R^2$ の場合について計算している．

次に，Singularな境界値問題についてふれると，解の存在定理については工拾 [5] が $b(x)=1-a(x)$ の時に基本解の

構成をしている．Kannai [7] は compatibility condition のもとでの解の存在定理を証明している．Taira [11] は operator theory による基本解の存在を示している．一方 Mizohata [9] は仮定(*)が (B)が $H^\infty$- well posed であるための必要十分条件である事を示している．又，$T_t(S)$ については Taira [10] に 才一項が $|M|$ である事は示されている．

$T_t(\bar{\partial}\text{-}N)$ については，Beals & Stanton [2] により

$$c_0 + \sum_{j\geq 1}^{\infty}(c_j + c_j' \log t)\, t^{j/2}$$

の展開を持つ事は示されていて，$c_0$ の計算はされている。彼らの方法は，この節で述べた才二の方法によっている．

## §.4. Sketch of construction of the fundamental solution.

作用素 P の係数の regularity を保ち，さらに t によるラプラス変換を経由しない基本解の構成方法の概要を述べるのがこの節での目的となる．

結果は大ざっぱに述べると，$E(t) = U(t) + V(t)$ として得られる．$U(t)$ は初期値問題の基本解，これは擬微分作用素となる事は知られている [12]．$V(t)$ は境界 $\Gamma$ 上の擬微分作用素であって，normal 方向には，擬微分作用素又は，積分作用素である．

まず，放物型であるので，局所的に近似基本解を構成

すれば，あとは積分方程式に帰着できるので，局所的に考えると十分である。 $\Omega$を十分小さくとって，$\Omega\cap M$ は $\mathbb{R}^n_+=\{(x_1,x');\ x_1>0,\ x'\in\mathbb{R}^{n-1}\}$，$\Omega\cap\Gamma$ は $\mathbb{R}^{n-1}=\{(0,x');\ x'\in\mathbb{R}^{n-1}\}$ とみなせる.

<u>Definition 1.</u> $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ に対し

$$\varphi(x_1,x')=\begin{cases}\varphi(x_1,x) & x_1\geq 0\\ 0 & x_1<0\end{cases},$$

$$\tilde{\varphi}(x_1,x')=\begin{cases}0 & x_1\geq 0\\ \varphi(-x_1,x') & x_1<0\end{cases},$$

と定義する.

[オ1段] 初期値問題の基本解 $U(t)$, 即ち

$$\begin{cases}LU(t)=0 & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^n,\\ U(0)=I & \text{in } \mathbb{R}^n\end{cases}$$

は $t$ を助変数とする擬微分作用素であって，その表象 $u(t)$ は $t\geq 0$ で $S^0_{1,0}$ に属し，$t>0$ では $S^{-\infty}$ に属し，さらに次の展開を持つ（See [12]).

$$u(t)\sim\sum_{j=0}^{\infty}u_{-j}(t),\quad u_{-j}(t)\in S^{-j}_{1,0}\ \text{かつ}\ u_0(t)=\exp(-p_2t),$$

$u_{-j}(t)=f_{-j}(t)u_0(t)$, $f_{-j}(t)$ は $t,\xi$ に関する多項式であって その次数を $d$, $\alpha$ とすると $|\alpha|-2d\leq -j$ である.

[オ2段] $E(t)\Phi = U(t)\Phi + V(t)\tilde{\Phi}$ として解を求めるためには

$$\begin{cases} LV(t) = 0 & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^n_+, \\ \mathcal{B}V(t)\tilde{\Phi}\Big|_{x_1=0} = -\mathcal{B}U(t)\Phi\Big|_{x_1=0} & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^{n-1}, \\ V(0)\tilde{\Phi} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^{n-1}_+ \end{cases}$$

を満たすとよい．例えば $p = p_2 = \xi_1^2$ のとき，$u(t) = \exp(-\xi_1^2 t)$，(D) のとき $v(t) = -u(t)$，(N) のとき $v(t) = u(t)$ とすればよいが，一般には $V(t)$ は擬微分作用素ではあり得ない．$t>0$ で $u(t)\in S^{-\infty}$ である事に注意して，次の Proposition を使う．

Proposition 1. $m(x,\xi)\in S^{-\infty}$ であれば

$$m(x,D_1,D')f\Big|_{x_1=0} = m(x,-D_1,D')\tilde{f}\Big|_{x_1=0}$$

よって，$\sigma(\mathcal{B}U(t))\Big|_{x_1=0} = g(t,x',\xi_1,\xi')$ とすると，$V(t)$ の表象 $v(t)$ は形式的には，

$$(*)\quad \begin{cases} L\circ v(t) = 0, \\ \sigma(\mathcal{B}\circ v(t))\Big|_{x_1=0} = -g(t,x',-\xi_1,\xi') \end{cases}$$

かつ

$$V(t)\tilde{\Phi}\Big|_{t=0} = 0 \qquad x_1>0$$

を満たせばよい.

［才3段］以下(O)の場合について述べる. (R)については $\mathfrak{b}(x',\xi')$ の代りに $\mathfrak{b}(x')$ とすればよい. (D), (N)の場合には, $\mathfrak{b}\equiv 0$ として考えるとよい. さらに(S)の問題については, 後で注意を述べる.

座標系をうまくとって, 表象を

$$(4.1)\quad \begin{cases} \sigma(p_2)\Big|_{\Gamma} = \alpha(x')\xi_1^2 + \beta(x',\xi') \\ \sigma(\mathcal{B}) = \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \dfrac{\mathfrak{b}(x',\xi')}{\sqrt{\alpha(x')}} \end{cases}$$

と仮定してよい. さらに境界条件が放物型であるので, 次を満たす正数 C が存在する.

$$\mathrm{Re}\, \mathfrak{b}(x',\xi') > 0 \text{ ならば, } \mathrm{Re}\{\beta(x',\xi') - \mathfrak{b}^2(x',\xi')\} > C|\xi'|.$$

以下, 簡単のために $\alpha(x')\equiv 1$ とする.

(＊)を解くために作用素を導入する. $L^0 = \frac{\partial}{\partial t} + D_{x_1}^2$, $\mathcal{B}^0 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathfrak{b}(x',\xi')$, $w_0 = e^{-\xi_1^2 t}$, $W_0$ を $w_0$ を表象とする擬微分作用素とすると, 明らかに

$$\begin{cases} L^0 W_0 = 0 , & (0,T)\times R^n, \\ W_0 \tilde{f}\Big|_{t=0} = 0 & \text{in } R^n_+ , \end{cases}$$

を満たす.

<u>Definition 2.</u>　$j\in \mathbb{Z}$, $j\geq 0$ に対し $w_{j,0}=(i\xi_1)^j w_0$, $w_{0,0}=w_0$.
$W_{j,0}$ は表象を $w_{j,0}$ に持つ擬微分作用素とする.
$j\geqq 1$ に対し

$$w_{-j,0}(t,z)=-\frac{(2\sqrt{t})^{j-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\left(\sigma+\frac{z}{2\sqrt{t}}\right)^2}\frac{(-\sigma)^{j-1}}{(j-1)!}\,d\sigma ,$$

$m\geqq 1$ のとき

$$w_{0,-m}(t,z;x',\xi')=-\frac{(2\sqrt{t})^{m-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\left(\sigma+\frac{z}{2\sqrt{t}}\right)^2+2\xi\sqrt{t}\,\sigma}\frac{(-\sigma)^{m-1}}{(m-1)!}\,d\sigma ,$$

$j\geqq 1$, $m\geqq 1$ のとき

$$w_{-j,-m}(t,z;x',\xi')=\frac{(2\sqrt{t})^{j+m-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{(-\tau)^{j-1}}{(j-1)!}\,d\tau\int_0^\infty e^{-\left(\sigma+\frac{z}{2\sqrt{t}}+\tau\right)^2+2\xi\sqrt{t}\,\sigma}\frac{(-\sigma)^{m-1}}{(m-1)!}\,d\sigma$$

とする. $m\geqq 1$ のとき

$$(W_{0,-m}\tilde{f})(x_1,x',\xi',y')=\int_{-\infty}^{\infty}w_{0,-m}(t,x_1-y_1,x',\xi')\tilde{f}(y_1,y')\,dy_1$$

$$=\int_0^{\infty}w_{0,-m}(t,x_1+y_1,x',\xi')f(y_1,y')\,dy_1$$

で定義される積分作用素とする. $W_{-j,0}$, $W_{-j,-m}$ についても同様に定義する. このとき, $j\in\mathbb{Z}$, $m=0,-1,-2,\cdots$ に対し,

<u>Proposition 2.</u> Definition 2 による $W_{j,m}$ は

$$\begin{cases} L^0 W_{j,m} = 0, & \text{in } (0,T)\times\mathbb{R}^n_+ \\ \partial_{x_1} W_{j,m} = W_{j+1,m}, & \mathcal{B}^0 W_{j,m} = W_{j,m+1} \\ W_{j,m}\tilde{f}\Big|_{t=0} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

を満たす.

<u>Definition 3.</u> $\mathcal{H}_s$ を次の元の有限個の線形結合全体とする.

$$\{ t^d x_1^l q(x',\xi') w_{j,k} e^{-\beta t} \ ; \ d, l \geq 0, \text{ integers}, \ q \in S^r_{1,0}(\mathbb{R}^{n-1})$$

但し $j+k+r-l-2d \leqq s$ }

$w = v w_{j,k} \in \mathcal{H}_s$ に対し

$$(W\tilde{\varphi})(x_1,x') = (2\pi)^{-(n-1)} \iint_{R^{n-1} R^{n-1}} e^{i(x'-y')\cdot\xi'} v(t,x_1,x',\xi')$$

$$\times\ (W_{jk}\tilde{\varphi})(t,x_1;x',\xi',y')\,dy'\,d\xi'$$

と定義する.

<u>Remark.</u> (i) $u_0(t)\Big|_{x_1=0} = w_{0,0}e^{-\beta t} \in \mathcal{H}_0$,

(ii) $u_{-s}$ を $x_1=0$ で Taylor 展開すると, $u(t) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{u}_{-s}(t)$

$\tilde{u}_{-s} \in \mathcal{H}_{-s}$ が得られる.

Proposition 3.　$w \in \mathcal{H}_s$ ならば $\partial_{\xi'}^{\alpha} \partial_{x'}^{\beta} w \in \mathcal{H}_{s-|\alpha|}$.

Proposition 4.　$\forall h \in \mathcal{H}_s$, $\forall g \in \mathcal{H}_{s-1}$, $\forall N$ $\exists w \in \mathcal{H}_{s-2}$.

such that
$$\begin{cases} LW \equiv H & \text{mod } \mathcal{H}_{s-N}, \\ BW\big|_{x_1=0} \equiv G\big|_{x_1=0} & \text{mod } \mathcal{H}_{s-N-1}. \end{cases}$$

明らかに

Proposition 5.　$w \in \mathcal{H}_s$ に対し
$$\lim_{t \to +0} W f = 0 \quad \text{in } x \in R_+^n .$$

Proposition 4 の証明の Sketch.　$(x', \xi')$ を助変数として，$x_1$, $t$ を変数とする作用素 $L^0$, $B^0$ について考える．その積を $*$ で表わす．

(I) $h=0$, $g = \frac{t^d}{d!} g\, w_{j,k} e^{-\beta t} \in \mathcal{H}_{s-1}$ とすると $w_1 = \frac{t^d}{d!} g\, w_{j,k-1} e^{-\beta t}$ とおくと，$w_1 \in \mathcal{H}_{s-2}$ かつ

$$\begin{cases} \{L^0 + \beta(x', \xi')\} * W_1 = \begin{cases} \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} g\, W_{j,k-1} e^{-\beta t} & d \geq 1 \\ 0 & d = 0 \end{cases} \\ B^0 * W_1 = G \end{cases}$$

であるから，(i) $d=0$ なら解が得られた．(ii) $d \geq 1$ であれば $g=0$ の問題に帰着できた．

(II) $h=\frac{x_1^l}{l!}g_\delta w_{j,k}e^{-\beta t}\in\mathcal{H}_s$, $g=0$ とすると，$w_1=-\frac{x_1^{l+1}}{2(l+1)!}g_\delta w_{j-1,k}e^{-\beta t}$ とおくと，$w_1\in\mathcal{H}_{s-2}$ かつ

(i) $l=0$ ならば

$$\begin{cases}\{L^0+\beta(x',\xi')\}*W_1=H, \\ \mathcal{B}^0*W_1\Big|_{x_1=0}=-\frac{1}{2}g_\delta W_{j-1,k}e^{-\beta t}\in\mathcal{H}_{s-1}.\end{cases}$$

より $W=W_1+W_2$ として，$W_2$を求める事は(I)に帰着できる．

(ii) $l\geq 1$ ならば

$$\begin{cases}\{L^0+\beta(x',\xi')\}*W_1=-\frac{1}{2}\frac{x_1^{l-1}}{(l-1)!}g_\delta W_{j-1,k}e^{-\beta t}\in\mathcal{H}_s, \\ \mathcal{B}^0*W_1\Big|_{x_1=0}=0,\end{cases}$$

となって $l$ に関する帰納法が使える．

(III) $h=\frac{t^d}{d!}\frac{x_1^l}{l!}g_\delta w_{j,k}e^{-\beta t}\in\mathcal{H}_s$, $g=0$ $(d\geq 1)$のとき，(I)(II)によって得られた$\hat{h}$に対する解を$w_1$とする．但し $h=\frac{t^d}{d!}\hat{h}$ とする．

$$\begin{cases}\{L^0+\beta(x',\xi')\}*W_1=\hat{H}, \\ \mathcal{B}^0*W_1\Big|_{x_1=0}=0.\end{cases}$$

このとき $\tilde{w}_1=\frac{t^d}{d!}w_1\in\mathcal{H}_{s-2}$ は

$$\begin{cases}\{L^0+\beta(x',\xi')\}*\tilde{W}_1=H+\frac{t^{d-1}}{(d-1)!}W_1, \\ \mathcal{B}^0*\tilde{W}_1\Big|_{x_1=0}=0\end{cases}$$

を満たすので，$d$ に関する帰納法が使える．

(IV) (I)～(III) より

$$\begin{cases} \{ L^0 + \beta(x', \xi') \} * W = H \\ \mathcal{B}^0 * W |_{x_1=0} = G \end{cases}$$

から $x'$ についての擬微分作用素として考えると

$$\begin{cases} L \cdot W \equiv H \quad \mathrm{mod}\ \mathcal{H}_{s-1} \\ \mathcal{B} W |_{x_1=0} \equiv G \quad \mathrm{mod}\ \mathcal{H}_{s-2} \end{cases}$$

この操作をくり返すと Proposition 4 が得られる.

［才4段］ $\mathcal{H}_s$ の作用素に対して. 次の二つの Proposition が得られる.

<u>Proposition 6.</u> $\mathcal{W} \in \mathcal{H}_s$ に対して,

$$(W\varphi)(t, x_1, x') = \int_{R^{n-1}} \int_{R^{n-1}} \int_0^\infty \tilde{w}(t, x_1, x_1+y_1; x', \xi') e^{i(x'-y')\xi'} \varphi(y_1, y')$$

$$\times dy_1 dy' d\xi' \quad \text{とすると}$$

正数 $C$, $\delta$ があって

$$\left| \tilde{w}(t, x_1, z; x', \xi') \right| \leq C \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{s+1} \exp\left( -\frac{\delta z^2}{t} - \delta |\xi'|^2 t \right)$$

をみたす.

<u>Proposition 7.</u> $\mathcal{W} \in \mathcal{H}_s$ とすると $\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_0^{\varepsilon}\int_{R^{n-1}} \tilde{w}(t, x_1, 2x_1, x', \xi')\, d\xi'\, dx_1 \leq C\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{n-1+\delta}$$

が成りたつ.

$$g = \sigma(\mathcal{B}U(t))\Big|_{x_1=0} \text{ に対し}, \quad -g(t, x', -\xi_1, \xi') \equiv (i\xi_1 - b)w_{0,0}e^{-\beta t}$$

(mod $\mathcal{H}_0$) より (#) の解 $v(t) = v_0(t) + v_{-1}(t) + \cdots$ ,が帰納的に求められる. $v_0(t) = (w_{0,0} - 2b\, w_{0,-1})e^{-\beta t} \in \mathcal{H}_0$, $v_{-j}(t) \in \mathcal{H}_{-j}$ である.

次に Singular な問題については, $\mathcal{B}^0 = a(x')\frac{\partial}{\partial x_1} + b(x')$ であるから, $m \geq 1$ について,

$$w_{0,-m}(t, z; x', \xi') = -\frac{(2\sqrt{t})^{m-1}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\left(a\sigma + \frac{z}{2\sqrt{t}}\right)^2 + 2b\sqrt{t}\,\sigma}\,\frac{(-\sigma)^{m-1}}{(m-1)!}\,d\sigma$$

とすると, $a(x')$, $b(x')$ に対する仮定(*)-(i), (ii) より上記の積分は well-defined となって (O) 及び (R) の場合と同様の手順で基本解の構成ができる. 最後に $\bar{\partial}$-Neumann problem に代表される degenerate な境界値問題の取り扱いを論じる.

## §.5. degenerate boundary value problem

ここで degenerate とは放物型境界値問題の意味で退化即ち, 局所座標系をとると (4.1) のもとで次を満たす $(x^0, \xi^0) \in T^*R^{n-1}\setminus 0$ が存在することをいう.

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\,\mathfrak{b}(x^0,\xi^0) > 0\,, \\ \mathrm{Re}\left\{\beta(x^0,\xi^0) - \mathfrak{b}^2(x^0,\xi^0)\right\} = 0\,. \end{cases}$$

この場合には $e^{-\beta t} w_{0,-1}$ が $(x^0,\xi^0)$ では $\xi'$ について良い評価は望めない．§4 での［オ1段］，［オ2段］はそのまゝであるが，［オ3段］以降は修正を必要とする．

$\bar\partial$-Neumann problem は局所座標系を適当に取ると，次の形になる．$q_2 = p_2\big|_{x_1=0}$，$q_1 = p_1\big|_{x_1=0} + \partial_{x_1}p_2\big|_{x_1=0} x_1$ とすると

$$q_2(x',\xi) = \left\{\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \hat{\mathfrak{b}}^2) + \sum_{j=1}^{\ell} |z_j|^2\right\} I_N\,,$$

$$q_1(x',\xi) = \mathcal{L}\tilde{\mathfrak{b}} - B\tilde{\mathfrak{b}} + \gamma\hat{\mathfrak{b}}(\hat{\mathfrak{b}}x_1 - \tfrac{1}{2}) + A(i\xi_1 + \tilde{\mathfrak{b}})\,,$$

$$\mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathfrak{b} - B$$

ここで，$\hat{\mathfrak{b}} = \hat{\mathfrak{b}}(x',\xi')$，$z_j = z_j(x',\xi')$ は $\xi'$ に関して一次の多項式，$z_j, \bar z_j$ $j=1,\dots,\ell$，及び $\hat{\mathfrak{b}}$ は一次独立で $T^*(\mathbb{R}^{n-1})$ を張る．$(\ell = \frac{n}{2}-1)$

$\mathcal{L}$ は Levi-form．$A = A(x')$，$B = B(x')$ は $N\times N$ 行列，$I_N$ は $N{\times}N$ 単位行列，$\gamma = \gamma(x')$ は関数である．$(N = \binom{p}{q})$

$\mathfrak{b} = \frac{1}{\sqrt2}\hat{\mathfrak{b}}$ であって，$\beta = \frac{1}{2}\hat{\mathfrak{b}}^2 + \sum_{j=1}^{\ell}|z_j|^2$ であるから，

$\Sigma_1 = \{(x',\xi') \in T^*(\mathbb{R}^{n-1});\ \xi' \neq 0,\ \hat{\mathfrak{b}}(x',\xi') > 0,\ z_j(x',\xi') = 0,\ \forall j\} \neq \phi$

である．即ち，degenerate boundary problem である．

<u>Remark.</u> system のある成分について上記の様になって，他の成分については Dirichlet problem である．

(5.1) $$\Sigma(x',\xi') = \sum_{j=1}^{\ell} |z_j(x';\xi')|^2 I_N + r_1(x',\xi')$$

とおくと $\Sigma(x',\xi')$ の主部は $\sum$ で消えているが，次がなりたつ．

<u>Theorem 4 (See [6]).</u> (5.1)で定義した $\Sigma(x',\xi')$ が

(5.2) $$\min_{1\leq j\leq N}\{\mathrm{Re}\,\mu_j(x';\xi')\} + \frac{1}{2}\operatorname{tr}^+ m \geq C|\xi'| \quad \text{on } \{z_j(x',\xi')=0\ \ \forall j\},$$

を満たすならば，

$$\begin{cases} \left[\dfrac{d}{dt} + \Sigma(x',D')\right]u = 0 & \text{in } t>0\times R^{n-1} \\ \quad u\big|_{t=0} = \Phi & R^{n-1} \end{cases}$$

の基本解 $K(t)$ が擬微分作用素として構成できて，その表象 $k(t)\in S^0_{1/2,1/2}$ は次の展開をもつ．

$$k(t) \sim k_0(t) + k_{-1}(t) + \cdots$$

$k_0(t) = e^{\varphi}$ であって $k_{-j}(t) = f_{-j}(t)\,e^{\varphi}$ とするとき

$$\exists \ell_j \text{ s.t. } |f_{-j}(t)| \leq C t^{j/2}(-\varphi)^{\ell_j},$$

但し $\varphi$ は次の式により定義されるもの．

$$\varphi = \left\{ -\frac{t}{2} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbb{Z} \\ \overline{\mathbb{Z}} \end{bmatrix},\ f_0(mt/2) \begin{bmatrix} \overline{\mathbb{Z}} \\ \mathbb{Z} \end{bmatrix} \right\rangle - \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left( \log[\cosh(mt/2)] \right) \right\} I_N - r_1 t,$$

$\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_\ell \end{pmatrix}$, $f_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \tanh \lambda$, $m = i\, \mathbb{X}^* J \mathbb{X}$, $\mathbb{X} = [\nabla z_1 \cdots \nabla z_\ell, \nabla \bar{z}_1 \cdots \nabla \bar{z}_\ell]$

$\nabla z_j = \begin{bmatrix} \nabla_x z_j \\ \nabla_\xi z_j \end{bmatrix}$, $\operatorname{tr}^+ m$ は $m$ の正の固有値の和, $\mu_j(x', \xi')$ は $r_1(x', \xi')$ の

固有値とする.

<u>Remark.</u> (5.2) より 正数 $C$ があって

$\operatorname{Re}\{\varphi$の固有値$\} \leqq C \{ -\sum_{j=1}^{\ell} |z_j|^2 t - |\hat{q}| t \}$, 従って $k(t) \in S^{-\infty}$ $(t > 0)$.

<u>Lemma.</u> 特に $r_1 = \mathcal{L} \hat{q}$ とすると

$\hat{q} > 0$ のとき (5.2) を満たす $\Longleftrightarrow$ $Z(q)$ をみたす.

従って $Z(q)$ のもとで $e^\varphi$ が構成できる;

$\bar{\partial}$-Neumann problem の場合には $e^{-\beta t}$ の代りに Theorem 4 によって構成された基本解の第一近似 $e^\varphi$ を使う.

$\widetilde{w}_{j,k} = w_{j,k} e^{-\frac{1}{2} \hat{q}^2 t}$ とする. $\mathcal{H}_\delta$ の代りに $k = 0, -1$ に対し.

<u>Definition 3'</u> $\mathcal{G}_{\delta, r; k}$ を次の元の有限個の線形結合全体とする.

$$\{ t^d x_1^{\ell_1} y_1^{\ell_2} q(x') \tilde{\xi}^{\tilde{\alpha}} z^{\alpha} \bar{z}^{\bar{\alpha}} g(mt) \hat{w}_{j,k} \in \mathcal{G} \; ; \; d, \ell_1, \ell_2 \geqq 0 \text{ integers},$$

$$q \in B^\infty, \; |\partial_x^\alpha q(x)| \leqq C(1+|x|)^{k+|\alpha|}, \text{ 但し } |\alpha|+|\tilde{\alpha}|+|\bar{\alpha}|+j-\ell_1-\ell_2-2d \leqq s,$$

$$|\bar{\alpha}|+j-\ell_1-\ell_2 \leqq r \}$$

<u>Proposition 3'</u> $w \in \mathcal{G}_{s,r;-1}$ ならば

$$\partial_{\xi'}^{\alpha'} \partial_{x'}^{\beta} w \in \{ \mathcal{G}_{s-|\alpha|, r+|\beta|;-1} + \mathcal{G}_{s-|\alpha|-1, r+|\beta|-1;0} \}$$

この $\mathcal{G}_{s,r;k}$ の元に関しても Proposition 5 は明らかに成立し，Proposition 4 と同様に帰納的に近似解が求められる事がわかる．$v(t)$ が $\mathcal{G}_{s,r;k}$ の和で近似できる．[才4段] の Proposition 6，7 に対応して次の Proposition を得る．

<u>Proposition 6'</u> $w \in \mathcal{G}_{s,r;k}$ ならばその kernel $\hat{w}$ は

$$\left| \hat{w}(t, x_1, y_1, z; x', \xi') \right| \leqq C \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{1+s+k} \exp \left[ -\frac{\delta z^2}{t} - \delta |\xi'|^2 t \right]$$

$$\text{if} \quad k=0, \text{ 又は } k=-1, \; \xi \leqq 0,$$

$$\left| \hat{w}(t, x_1, y_1, z; x', \xi') \right| \leqq C \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{s+r_+} \exp \left[ -\frac{\delta z^2}{t} - \delta \sum_{j=1}^{\ell} |z_j|^2 - \delta \xi t \right]$$

$$\text{if} \quad k=-1, \; \xi > 0$$

を満たす．但し $r_+ = \max(r, 0)$．

<u>Proposition 7'</u> $w \in \mathcal{G}_{s,r;k}$ とすると，$\varepsilon > 0$ に対し

(i) $k=0$ のとき

$$\int_0^{\varepsilon}\int_{R^{n-1}} \hat{w}(t, x_1, x_1, 2x_1 ; x', \xi')\,d\xi' dx_1 \geqq C\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{n-1+\delta}$$

(ii) $k=-1$ のとき

$$\int_0^{\varepsilon}\int_{R^{n-1}} \hat{w}(t, x_1, x_1, 2x_1 ; x', \xi')\,d\xi' dx_1 \leqq \begin{cases} C\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{n-2+\delta+\gamma} & (\gamma>0) \\ C(-\log t)\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{n-2+\delta} & (\gamma=0) \\ C\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{n-2+\delta} & (\gamma<0) \end{cases}$$

がなりたつ.

さらに Proposition 7′ の (ii) の場合には，左辺の $t$ についての展開公式も得られて，$\log t$ の項の出現するのもわかる.

この場合も $v(t)$ の主要項は $v_0=(\tilde{w}_{0,0}-2\hat{t}\,\tilde{w}_{0,-1})e^{\varphi}$ であって，Proposition 7′ より $-2\hat{t}\,\tilde{w}_{0,-1}e^{\varphi}\in \mathcal{G}_{1,1;-1}$ の部分からの寄与が $t$ について特異性が一番高くなる.

## References


[1] R. Arima, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1964).

[2] R. Beals & N.K. Stanton, Comm in Partial Differential Eqs. 12 (1987).

[3] G.B. Folland & J.J. Kohn, Ann. of Math. Studies 75 (1972).

[4] P.C. Greiner, Arch. Rational Mech. Anal. 41 (1971).

[5] S. Itô, Japan J. Math. 27 (1957).

[6] C. Iwasaki, Osaka J. Math. 21 (1984).

[7] Y. Kannai, Osaka J. Math. 25 (1988).

[8] H. P. Mackean & I. M. Singer, J. Differential Geometry 1 (1967).

[9] S. Mizohata, Equations Aux Dérivées Partiells (1983).

[10] K. Taira, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 23 (1976).

[11] K. Taira, to appear.

[12] C. Tsutsumi, Proc. Japan Acad. 50 (1974).