数理解析研究所講究録
766巻 1991年 55-58

Briot-Bouquet型の特異点をもつ一階非線型偏微分方程式

上智大理工　田原 秀敏　(Hidetoshi Tahara)

非線型常微分方程式の特異点で　最も基本的なもののひとつに Briot-Bouquetの特異点と呼ばれているものがある。　ここでは、その偏微分方程式版とでもいうべき 次の一階非線型偏微分方程式を考えてみたい。

(E) $$t\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\text{。}$$

ここで、 $(t,x)\in\mathbb{C}_t\times\mathbb{C}_x^n$ 、 $x=(x_1,\ldots,x_n)$、 $\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ とし関数 $F(t,x,u,v)$ (ただし $v=(v_1,\ldots,v_n)$) は、次の条件を満たしているものとする。

(A_1)　$F(t,x,u,v)$ は、原点の近傍 Δ で holomorphic 。

(A_2)　$F(0,x,0,0)=0$ 、 $x\in\Delta_0$ $(=\Delta\cap\{t=0,\ u=0\ \&\ v=0\})$ 。

(A_3)　$\frac{\partial F}{\partial v_i}(0,x,0,0)=0$ 、 $x\in\Delta_0$ 、 $i=1,\ldots,n$ 。

まず最初に幾つかの特異な例を挙げておく。

例① $t\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x}$ は $u=\frac{x+c}{1-\log t}$ なる解をもつ。

例② $t\frac{\partial u}{\partial t} = u-x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ は $u=x$ なる解をもつ。

例③ $t\frac{\partial u}{\partial t} = u-2tx\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ は $u=\frac{x}{t}$ なる解をもつ。

この様に、方程式(E)を一般的に扱おうとすると、ものすごく多

様な解が表われてきて、今の所、著者には殆ど魑魅魍魎の世界の様に思えてしまう。　そこで、次の方針で考えてゆくことにしたい。

<u>方針</u>　解のクラスを制限して (E) を解析する。

<u>解のクラス $\tilde{\mathcal{O}}_+$ の定義</u>　$\tilde{\mathcal{O}}_+$ で、次の (あ) (い) をみたす様な $u(t,x)$ の全体を表わすものとする。

(あ)　或る $\varepsilon(s)\in C^0(\mathbb{R}_s)$、$\varepsilon(s)>0$ と或る $\delta>0$ とが存在して $u(t,x)$ は $\{\ (t,x)\in(\widetilde{\mathbb{C}\setminus\{0\}})\times\mathbb{C}^n\ ;\ 0<|t|<\varepsilon(\arg t),\ |x|<\delta\ \}$ で holomorphic 。

(い)　或る $a>0$ が存在して、任意の $\theta>0$ と任意のコンパクト集合 K に対して、$\{\ t\in\widetilde{\mathbb{C}\setminus\{0\}};\ |\arg t|<\theta\ \}\ni t\longrightarrow 0$ のとき、

$$\max_{x\in K}|u(t,x)| = O(|t|^a)\ 。$$

もちろん、この $\tilde{\mathcal{O}}_+$ は、例①②③の様な解をすべて除外しているわけだけれど、しかし、その代りにひとつの橋頭堡として次の結果を得ることができる。

$$\rho(x) = \frac{\partial F}{\partial u}(0,x,0,0)、$$

$$S_+ = (E)\ の\ \tilde{\mathcal{O}}_+\text{-解の全体}$$

とおく。

<u>定理</u>　$\rho(0)\notin\{1,2,3,...\}$ <u>と仮定すると</u> S_+ <u>は次のとおり</u>。

$$S_+ = \begin{cases} \{u_0\}、 & \mathrm{Re}\rho(0)\leq 0\ \ \underline{のとき}、\\ \{u_0\}\cup\{U(\varphi);\ 0\not\equiv\varphi(x)\in\mathbb{C}\{x\}\}、 & \mathrm{Re}\rho(0)>0\ \ \underline{のとき}。\end{cases}$$

<u>ただし</u>、 u_0 <u>は (E)の唯一つの holomorphic な解であり</u>、$U(\varphi)$ <u>は次の</u>

<u>様な展開式によって与えられる (E) の singular な解である</u>。

$$
(*)\begin{cases} U(\varphi) = \sum\limits_{i\geq 1} u_i(x)t^i + \sum\limits_{\substack{i+2j\geq k+2 \\ j\geq 1}} \varphi_{i,j,k}(x)t^{i+j\rho(x)}(\log t)^k \text{、} \\ \varphi_{0,1,0}(x)=\varphi(x) \quad \text{。} \end{cases}
$$

<u>また</u>、$\mathbb{C}\{x\}$ <u>は収束巾級数環を表わすものとする</u>。

注① $U(\varphi)$ について、もう少し詳しくいうと次のとおり。
任意の $\varphi\in\mathbb{C}\{x\}$ に対して、 1) (E)は(*)の形の形式解を唯一つもち、2) それは、収束して $\tilde{\mathcal{O}}_+$ に属する。 そこで、これによって得られる解を $U(\varphi)$ と記述した。

注② $\varphi=0\in\mathbb{C}\{x\}$ の時は $U(\varphi)=u_0$ である。 本当に singularなものと、holomorphicなものとを区別するため、 u_0 を特別視しておいた。

上の定理は、あくまでも (E) を $\tilde{\mathcal{O}}_+$ の中で考えるとうまくゆく、というにすぎない。 $\tilde{\mathcal{O}}_+$ は、例①②③の様な解をすべて除外しているわけであるから、上の定理は魑魅魍魎の世界での ひとつの橋頭堡ではあるものの、 かなり網の目は荒い。

<u>今後の問題</u>

解のクラスを広くすれば、新しい singular な解はいくらでも出て来そうである。 そこで、それらをどのように捕えてゆくか?

本稿の結果は、R. Gérard (Univ. de Strasbourg) との共同作業によるものです。 詳細は 次の [1][2] の論文を見てください。

参考文献

[1] R. Gérard and H. Tahara, Nonlinear singular first order partial differential equations of Briot-Bouquet type, Proc. Japan Acad. Ser. A, 66 (1990), 72-74.

[2] R. Gérard and H. Tahara, Holomorphic and singular solutions of nonlinear singular first order partial differential equations, Publ. RIMS, 26 (1990), 979-1000.