

有限体上の超幾何関数

広大 理 小池 正夫 (Masao Koike)

§ 1 Introduction

整数論で重要な役割をはたす Gauss の和を Γ 関数の有限体アナログと見る視点がある。それは Γ 関数の積分表示:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^s e^{-t} \frac{dt}{t}$$

を $\chi_s(t) := t^s$ は \mathbb{R}_+^{\times} から \mathbb{C}^{\times} への乗法的指標, $\lambda(t) := e^{-t}$ は \mathbb{R} から \mathbb{C}^{\times} への加法的指標, $\frac{dt}{t}$ は \mathbb{R}_+^{\times} の Haar 測度と

解釈して 実数体 \mathbb{R} を有限体 \mathbb{F}_p で置きかえて, $\chi(t)$ を \mathbb{F}_p^{\times} から \mathbb{C}^{\times} への乗法的指標, $\lambda(t)$ を \mathbb{F}_p から \mathbb{C}^{\times} への加法的指標.

そして有限体上の不変測度は平均をとる: ととすとは

Gauss の和 $G(\chi) = \sum_{t \in \mathbb{F}_p^{\times}} \chi(t) \lambda(t)$ からくる。

$\lambda(t) = \zeta^t$, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ と固定しておく。同様の考え方で

Beta 関数の積分表示: $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \frac{dx}{x(1-x)}$

から この有限体アナログは A, B を \mathbb{F}_p^\times の乗法的指標として、

$$J(A, B) = \sum_{t \in \mathbb{F}_p} A(t) B(1-t)$$

となり、Jacobi の和として知られているものとなる。

これから 特殊関数に対して 次の変換原理で その有限体アナログを見つけよう：

$$\begin{array}{lll} \int & \rightsquigarrow & \sum \\ t^s & \rightsquigarrow & B(t) \quad B: \mathbb{F}_p^\times \text{ の乗法的指標} \\ t^{-s} & \rightsquigarrow & \bar{B}(t) \quad \bar{B}(t) = \overline{B(t)} \quad \text{複素共役} \\ e^{-s} & \rightsquigarrow & z^s \end{array}$$

不思議なことに有限体アナログは定義だけでなく、性質まで遺伝している；

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \rightsquigarrow J(A, B) = \frac{G(A)G(B)}{G(AB)}$$

Γ 関数の乗法公式 \rightsquigarrow Davenport-Hasse の定理

$$\begin{aligned} & \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{N}\right) \cdots \Gamma\left(z+\frac{N-1}{N}\right) \\ & = \Gamma(Nz) N^{\frac{1}{2}-Nz} (2\pi)^{\frac{N-1}{2}} \end{aligned}$$

$$N \mid p-1$$

B : 位数 N の指標

$$G(A)G(AB) \cdots G(AB^{N-1})$$

$$= G(A^N) \bar{A}^N(N) G(B) \cdots G(B^{N-1})$$

以下 A, B, C, \dots, X, ψ は \mathbb{F}_p^\times の乗法的指標をあらわす：とと
する。

2項展開の有限体アナログは次の様に考える:

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$$

従って

$$A(1+x) = \delta(x) + \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{F}_p^\times}} f_{A,\chi} \chi(x), \quad x \in \mathbb{F}_p$$

$$\delta(x) = 1 \quad \forall x=0 \quad \delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0,$$

の Fourier 係数 $f_{A,\chi}$ が 2項展開の有限体アナログである。

これは簡単に計算できて $f_{A,\chi} = \frac{\chi(-1)}{p-1} J(A, \bar{\chi})$ となる。

これを $\binom{A}{\chi}$ とかく。

同様に 3項展開: $(1+x+y)^a = \sum \binom{a}{n,m} x^n y^m$ のアナログとして

$$\binom{A}{B,C} := \frac{BC(-1)}{(p-1)^2} J(A, \bar{B}, \bar{C})$$

が得られる。ここで $J(A, \bar{B}, \bar{C})$ は Jacobi の積の一般化とよく知られている:

$$J(A, \bar{B}, \bar{C}) = \sum_{\substack{t_1+t_2+t_3=0 \\ t_i \in \mathbb{F}_p}} A(t_1) B(t_2) C(t_3)$$

Greene $[G]$ は有限体上の超幾何関数を

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} A, B \\ C \end{matrix} \middle| x \right) = \varepsilon(x) \frac{BC(-1)}{p-1} \sum_{y \in \mathbb{F}_p} B(y) \bar{B}(1-y) \bar{A}(1-xy)$$

ここで $\varepsilon(x) = 0$ if $x=0$ $\varepsilon(x) = 1$ if $x \neq 0$,

で定義した。これは 超幾何関数の Euler 積分表示:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| z \right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^\alpha (1-t)^{\gamma-\beta} (1-tz)^{-\alpha} \frac{dt}{t(1-t)}$$

と変換原理で移したものであり。但し定数倍は部分の $\alpha \dots$ よ

うにかえてある。この時 超幾何関数の Taylor 展開:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n (1)_n} z^n$$

に注意して 次の式が成り立つ:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} A, B \\ C \end{matrix} \middle| x \right) = \varepsilon(x) \sum_{\chi \in \hat{\mathbb{F}_p^\times}} \binom{A\chi}{x} \binom{B\chi}{C\chi} \chi(x)$$

同様にして

$${}_mF_n \left(\begin{matrix} A_0, A_1, \dots, A_m \\ B_1, \dots, B_n \end{matrix} \middle| x \right) := \varepsilon(x) \sum_{\chi} \binom{A_0\chi}{x} \dots \binom{A_m\chi}{B_n\chi} \chi(x)$$

と定義する。

Greene [G] はこの関数の性質を 古典的な超幾何関数の持つ性質と対応させながら Kummer の変換, 2 次変換 ...

を調べている。我々の興味は Greene が有限体上の超幾

何関数の特殊値に関する次の結果にある:

$$(1) \quad {}_2F_1 \left(\begin{matrix} A, B \\ C \end{matrix} \middle| 1 \right) = A(-1) \binom{B}{\overline{AC}}$$

$$(2) \quad {}_2F_1 \left(\begin{matrix} A, B \\ \bar{A}B \end{matrix} \middle| -1 \right) = \begin{cases} 0 & \text{if } B \neq \text{square,} \\ \begin{pmatrix} C \\ A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi C \\ A \end{pmatrix} & \text{if } B = C^2, \end{cases}$$

∴ $B \neq \text{square}$ とは F_p^x の乗法的指標 C で $C^2 = B$ をみたすものが無いこと。 ϕ は F_p^x の位数 2 の乗法的指標をあらわす。

(3) A, B, ABC がそれぞれ自明な指標であるとする。

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} A, B, C \\ \bar{A}C, \bar{B}C \end{matrix} \middle| 1 \right) = \begin{cases} 0 & \text{if } C \neq \text{square} \\ AB(-1) \left\{ \begin{pmatrix} D \\ A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B\bar{D} \\ AB\bar{D} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi D \\ A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi B\bar{D} \\ \phi AB\bar{D} \end{pmatrix} \right\} & \text{if } C = D^2. \end{cases}$$

$$(4) \quad {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \phi, \phi, \phi \\ \varepsilon, \varepsilon \end{matrix} \middle| -1 \right) = \frac{1}{(p-1)^2} \begin{cases} -p\phi(2) & \text{if } p \equiv 5, 7 \pmod{8}, \\ \phi(2)(4c^2 - p) & \text{if } p \equiv 1, 3 \pmod{8} \end{cases}$$

∴ $p = c^2 + 2d^2$ とする。

§ 2 応用

有限体上の超幾何関数に関する Greene の特殊値の計算と Apery 数の合同式の証明に利用する。Apery 数というのは

2項係数を使, 次の式で定義される:

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2$$

この数は (3) の無理数性を証明するのに使われたが, その後 Beukers 等によって代数幾何学的な対象とのつながりが明らかになってきた. [S-B] を参照.

Apery 数の合同式を説明する前に一般化した Apery 数:

$$a_n^{(m,l)} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k}^m \binom{n}{k}^l \quad m, l \geq 0$$

を定義する.

Beukers 等の見つけた合同式で 我々の興味があるのは p が奇素数, $f = \frac{p-1}{2}$ とおいた時 $a_f^{(m,l)}$ が modulo p で表示する場合である. $m+l \leq 2$ は省略して ([B] 参照)

$$(5) \quad a_f^{(1,2)} \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p} & \text{if } p \equiv 3 \pmod{4}, \\ 4a^2 \pmod{p} & \text{if } p \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

$$p = a^2 + b^2, \quad a \equiv 1 \pmod{4}.$$

$$(6) \quad a_f^{(2,2)} \equiv \gamma_p \pmod{p}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{2\pi i n z} = \eta(2z)^4 \eta(4z)^4, \quad \eta(z) \text{ は}$$

Dedekind の η -関数とする.

$a_f^{(2,1)}$ の合同式もありが, それは [S-B] を参照.

当然, m, l が大きくなった時. どうなる, といふのが興味がある.

谷川氏の見た予想:

$$a_f^{(2,4)} \equiv c_p \pmod{p}$$

$$\text{F.W.C.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i n z} = \eta(z)^8 \eta(4z)^8 + 8 \eta(4z)^{12}.$$

Greeneの結果を利用すための、有限体上の指標とか。

超幾何関数の値を p 進数の中にうめこんで考える。

$$\text{Teichmüller 指標 } \omega: \mathbb{F}_p^\times \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times \quad \omega(x) \pmod{p} = x.$$

$$\text{すなわち } \widehat{\mathbb{F}_p^\times} = \{ \omega^k \mid 0 \leq k \leq p-2 \} \text{ とする。この時}$$

$$\text{Lemma} \quad \begin{pmatrix} \omega^k \\ \omega^i \end{pmatrix} \equiv \begin{cases} \binom{k}{i} \pmod{p} & \text{if } 0 \leq i \leq k, \\ 0 \pmod{p} & \text{if } k < i \leq p-2. \end{cases}$$

すなわち 2 次係数の有限体 \mathbb{F}_p 上の ω^k modulo p で眺めれば又 2 次係数と一致する。これを定義式にあてはめれば。

Proposition

$$a_f^{(m,2)} \equiv \prod_{i=1}^{m+2} \omega^{\epsilon_i} \left(\phi, \phi, \dots, \phi \mid (-1)^\ell \right) \pmod{p}.$$

この合同式の右辺に Greeneの結果を適用すると、例えは

$(m,2) = (1,2)$ とすれば

$$a_f^{(1,2)} \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p} & \text{if } \phi \neq \text{square}, \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}f \\ f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}f \\ \frac{1}{2}f \end{pmatrix} & \text{if } \phi = \text{square}. \end{cases}$$

明らかに $\phi = \text{square} \iff p \equiv 1 \pmod{4}$ だし、古奥なのは

Gaussの合同式 ([B-E], [I-R] 参照)

$$\left(\frac{\frac{3}{2}f}{f} \right) \equiv (-1)^f 2a \pmod{p}$$

を用いたのは Beukersの合同式 (5) が得られる。しかしこの方法では $\sqrt[3]{F_3}$ の特殊値は計算できていないので (6) は出ない。

他の利点というところ、Apery数の $\frac{p-1}{2}$ 番目を考えたことは modulo p で見ると $\omega^{\frac{p-1}{2}} = \phi$ と同じ式を通じて命題のような超幾何関数となることが、この合同式が存在していた。

だから $\frac{p-1}{3}, \frac{p-1}{4}, \dots$ を考えれば超幾何関数の有限体の指標を位数 $3, 4, \dots$ の指標におきかえればよい。

3項係数を定義しておいたのは Appelleの超幾何関数の有限体アナログの Fourier 展開としてそれらがあらわれてくるからなのだが、時間が経ったのでここでの話はいい。Beukersの考察と同様のことが調べられていかなければと思ふ。

有限体の超幾何関数という立場は最近、有限体上の楕円曲線の族から得られた直交行列の研究にも役立つ。

References

- [B] F. Beukers, Arithmetical properties of Picard-Fuchs equations, Sem. de Theorie des Nombres, Paris 1982-1983, 33-38, Progress Math. 51, Basel, Boston, Stuttgart, Birkhauser 1984.
- [B-E] B. Berndt and R. Evans, Sums of Gauss, Jacobi and Jacobstahl, J. Number Theory 11 (1979), 349-398.
- [G] J. Greene, Hypergeometric functions over finite fields, Trans. Amer. Math. Soc. 301 (1987), 77-101.
- [G-S] J. Greene and D. Stanton, A character sum evaluation and Gaussian hypergeometric series, J. Number Theory 23 (1986), 136-148.
- [I-R] K. Ireland and M. Rosen, A classical introduction to modern number theory, GTM 84, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1982.
- [S-B] J. Stienstra and F. Beukers, On the Picard-Fuchs equation and the formal Brauer group of certain elliptic K3-surfaces, Math. Ann. 271 (1983), 269-304.