

Cayley の公式の組合せ論的証明

京大・理 梅田 亨

(Tôru Umeda)

0: ここでいう所謂「Cayley の公式」とは 現代的に言えば、 $GL_n \times GL_n$ が $Mat_{n \times n}$ に働くという 概均質ベクトル空間の μ -函数の計算のことである。実際に A. Cayley 自身がその公式を導いたのかは定かではない。ほかにもいくつか文献上の謎があり、 μ 「数学史」として興味深いのだが、紙数も限られてるので 11 だけは措く。

この公式の発展は Garding (1946), Shimura (1984) と続くし、冒頭で述べたように概均質ベクトル空間の μ -函数の計算がほかならぬ一般化を与えてくる。証明法はいくつかの異なるものが知られてくるが、大別して (a) Plücker relation, (b) $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx$ のような積分, (c) Capelli identity を使うものと分けられる。(see [S]; [GY], [T1], [T2], [G]; [Sh], [RS]; [HU]). また超局所解析による一般的な方法については [K] を参照された。筆者はこれに関しては知るところはない。

本稿では公式にあうられる $s(s+1)\cdots(s+n-1)$ という因子が如何にも組合せ論と関係してゐることに注目して、上のいづれとも異なる“純”組合せ論的証明を与える。使う道具は高校で習う「順列・組合せ」と大学1年で習う行列式の基本性質のみである。

(注) 本稿は筆者の1989-90 Yale 大学滞在中に思いついたささやかな結果に基づく。これは [HU] とは一応独立だが、その研究途中の副産物でもある。しかし多分に既知のものではないかと考えており、歴大な文献をいちいち調べるのも煩しく、発表するのはここが初めてである。はじめの Cayley の件も含めて識者の御教示を乞いたす。

1: 「順列・組合せ」の復習

高校数学(式には小中学校高学年で既習のことともいえるかも知れない)の復習から始める。

(a) 順列. 「ならべ方の数」をいふことを反省する為に「 σ を並べる」とはどういうことかと考えてみる。心理的には二つの逆の方向の描像があり得るが、簡単に済ませる。「 σ 」(=記号)を「位置」に置くとは $\{\text{位置}\} \rightarrow \{\text{記号}\}$ への map (写像) に他ならず。(σ を置くかないことも許すときは $\{\text{記号}\}$ を拡張して ゼロ記号 (=空) を入れておけばよ

い。零の発見に倣うのである。) これが「順列」である。数をかぞえる為に $X = \{\text{位置}\}$, $Y = \{\text{記号}\}$ という集合は有限として $r = \#X$, $n = \#Y$ と置く。

((例 1)):

	map についての制限	$\#\{\text{maps}\}$	備考
1)	制限なし	n^r	「重複順列」
2)	injective	$nPr = n(n-1)\dots(n-r+1)$	「順列」
3)	surjective	$n! \times \text{種 Stirling 数}$	

(b) 組合せ. 順列 $X \xrightarrow{f} Y$ について「位置」の集合 X の方では或る種の同一視を行うのが「組合せ」である。それが群による対称性である場合が典型的で(教珠を作ったり, サイコロに色を塗ったり), しかもそのうち群が置換全体の群 $S(X)$ の時が, いちばんよく知られる「組合せ」である。

((例 2)): 上の例 1 の 1) なら「重複組合せ」, 2) なら「組合せ」がある。

$S(X)$ で割ると X の元には個性がなくなり「濃度」だけの問題となる(濃度の定義!). つまり $\#f^{-1}(y)$ ($y \in Y$) という f の fiber の箇数のみが問題となる。よってこれを別の言葉で言えば「組合せ」は不定方程式

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = r \quad (\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

の解と対応する, この map について α_i の制限は α_i に反映して例 1 に対応して次の例を得る.

((例 2'))

	制限	「組み合わせの数」	備考
1)	制限なし	$nH_r = {}_{n+r}C_{n-1}$ (*)	「重複組合せ」
2)	$\alpha_i = 0, 1$	nC_r	「組合せ」
3)	$\alpha_i > 0$	$rC_{n-1} = nH_{r-n}$	

(*) 重複組合せの数 nH_r だとしても H という文字を使うのがよく知らないが n 変数 r 次斉次の homogeneous polynomials の "箇敷" (次元) に等しいからだという説をきいたことがある。また $nH_r = {}_{n+r}C_{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = \frac{1}{r!} n(n+1)\dots(n+r-1)$ という「公式」については高校以来さまざまに工夫を知っている。あとで使うのはこのことである。

「組み合わせ」も "増加写像" の箇敷を数えることに帰着させたり定式化したりして「写像一元論」を唱える立場もある。しかし、むしろこれは $\{\text{maps}\} \rightarrow \mathcal{G}(X) \setminus \{\text{maps}\}$ の section のうまいとり方として「順序」という構造が付けられたと見るべきである。これは対称性によって「幾何」をみる典型的状況のひとつといえる。

(c) 補足. あとで使わないのだが, 上記に述べたおき $X \rightarrow Y$ を $\mathcal{G}(Y)$ が割ることも考えられる。うまい名前

を知らないが、「区分け」とか「類別」のよ様なものである。さらに $\mathcal{O}(X)$ と $\mathcal{O}(Y)$ の両方で割ると、さきほどの不定方程式で α_i の順番をとりかえたものが同一視されるから「数の分割」があらわれる。

2: 「順列・組合せ」と微分

本稿の主題 Cayley の公式の最も易しい場合は、ほかならぬ

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

というものである。これをくりかえし使えば

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^r x^n = n(n-1)\cdots(n-r+1) x^{n-r}$$

この係数として順列の数 $n P_r$ が出てくるのは勿論偶然ではない。まず $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ について見ると、 $x^n = \overbrace{x \cdots x}^n$ と $\frac{d}{dx}$ という derivation の積の微分の公式を使って微分を実行すると、どの x を消すかということが n 通りの場合が生じ、それが係数の n となる。少し見易くする為に $\frac{d}{dx}$ の代わりに $\xi \frac{d}{dx}$ という derivation を用いる

$$\xi \frac{d}{dx} x^n = \xi x^{n-1} + x \xi x^{n-2} + \cdots + x^{n-1} \xi$$

と書くときは ξ の「語」 $x \cdots x$ のどの x が ξ にとり替わると ξ の「語」 $x \cdots \xi \cdots x$ となるか区別して書ける。この polarization operator $\xi \frac{d}{dx}$ を用いて $\left(\frac{d}{dx}\right)^r x^n = n(n-1)\cdots(n-r+1) x^{n-r}$ と解釈し直すと、 ξ_0, \dots, ξ_{r-1} を新たな文字として

$$\left(\xi_{r-1} \frac{d}{dx}\right) \left(\xi_{r-2} \frac{d}{dx}\right) \cdots \left(\xi_0 \frac{d}{dx}\right) x^n$$

を計算すると もとあった n の x が ξ_1, \dots, ξ_r に r 回替り
 れて $n < r$ である可能性だけの和が生じる。この項数は順列
 $r \rightarrow n$ (injective) の個数であるから $n P_r$ となる。こ
 こで公理的集合論の記号の用法を流用して $r = \{0, 1, \dots, r-1\}$ と
 う略記法を使つた (以下でも時に使う)。

以上は非常に易しい局面での説明だが、微分計算と組合せ
 のこのような関係は MacMahon 氏によりよく使われて
 いる。併し詳しいことはよく知らない。

3: Cayley の公式

易しいことの復習は充分したから本題に入る。 $n \times n$ 行列
 $\text{Mat}_{n \times n}$ の座標を x_{ij} , 対応する微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ を ∂_{ij} と書
 く。定数係数 n 階の微分作用素 Ω を

$$\Omega = \det(\partial_{ij})$$

と定義する。これは Cayley の ω process と呼ばれるわ
 され古典不変式論及び典型群の不変式論に於て重要な役
 割を果たして来た。さて Cayley の公式とは Ω を $\det(x_{ij})^s$
 に作用させた時の計算がある。簡単の爲 $X = (x_{ij})$ と書く:

$$\Omega(\det X)^s = s(s+1) \cdots (s+n-1) (\det X)^{s-1}$$

一般に $\Omega(\det X)^s = \beta(s) (\det X)^{s-1}$ とする多項式 $\beta(s)$ の

存在すること, 及び s が正整数のとき 0 でない, などを示すのは易しい。よって問題となるのは $\beta(s)$ の具体的な計算である。いくつかの知られた方法については序に述べた文献を参照された。

4: 証明

$\beta(s)$ が多項式であることを認めると $\beta(s) = s(s+1)\cdots(s+n-1)$ を証明するには s が正整数のとき言えばよい。基本的な idea は polarization operator によって微分結果の各項と或る写像 (map) の対応を見ることがある。そしてこの場合は map = \langle 順列 \rangle の数が高校数学の範囲で計算できるといふ訳である。

今, 行列 $X = (x_{ij})$ を n のタテバクトルが n 並んだものとみなして $X = (X_1, \dots, X_n)$ と書く。別に同じ size の一組のバクトルを用意する。それを並べた行列を $Y = (y_1, \dots, y_n)$ 。これらに関して polarization operator

$$\sum_j \partial_{x_i} = \sum_{k=1}^n \sum_j \partial_{x_{kj}}$$

を考える。すると determinant は multilinear だから

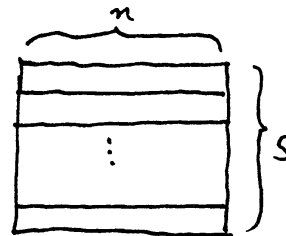
$$(\sum_j \partial_{x_i}) \det X = \det (X_1, \dots, \sum_j \partial_{x_i} X_j, \dots, X_n)$$

となる。つまり i 番のバクトルが $\sum_j \partial_{x_i}$ と取り替わる。今 s を正整数として $(\det X)^s$ にこの polarization operator を施すと,

S の因子のうち、ひとつだけがこうおき替ったものが混り
 そういふ S の和が生ずる。このことを念頭において $\sigma \in S_n$
 について

$$D_\sigma = (\xi_{\sigma(n)} \partial_{x_n}) (\xi_{\sigma(n-1)} \partial_{x_{n-1}}) \cdots (\xi_{\sigma(1)} \partial_{x_1})$$

を $(\det X)^S$ に施した結果を考へよう。 \det の multilinear 2^2
 あることを強調して $\det X = |x_1 \cdots x_n|$ のように書いてみ
 る。この S を S に並べて「積」を表わすことにしよう。
 すると上の $D_\sigma \in (\det X)^S$ に作用させたとき生ずる各項は

$$\left. \begin{array}{l} |x_1 \cdots x_n| \\ x | x_1 \cdots x_n| \\ \vdots \\ x | x_1 \cdots x_n| \end{array} \right\} S \quad (\text{これを図式化して})$$


と書く)

のうち S に並んだ S の x_i のうちどれかひとつが $\xi_{\sigma(i)}$
 に置きかわったものがある。よって σ を fix すると $n \xrightarrow{f} S$
 という S^n 箇の項が並ぶ。おもひやり $n \xrightarrow{f} n \times S$ ($i \mapsto (\sigma(i), f(i))$)
 と書く。さて我々が必要なのは $(\det X)^S$ への Ω の作用 2^2
 ある。上の D_σ との関係を見よと

$$(\det X) \cdot \Omega = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn} \sigma \cdot D_\sigma$$

があることは、行列式の積の法則 2^2 がある (ξ_j は x_i と独立な
 新たな変数があるから微分と積が可換である)。よって D_σ
 を施し交代和をついたのち ξ_j を x_j と特殊化すれば必要

な結果が得られる。即ち

$$(\det \Xi) \cdot \Omega (\det X)^s \Big|_{\Xi \mapsto X} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn } \sigma \cdot D_{\sigma} (\det X)^s \Big|_{\Xi \mapsto X}$$

左辺は $(\det X) \cdot \Omega (\det X)^s$ となるから、示すべきは右辺が $s(s+1)\cdots(s+n-1) (\det X)^s$ となることである。

さて D_{σ} を $(\det X)^s$ に作用させて生ずる項を f_{σ} に対応するものを見る。ここで $\Xi \mapsto X$ と特殊化するとどうなるか。たとえば $|x_1 \ x_2 \ \cdots \ 1|$ のような因子を含んだものは $x_1 \mapsto x_1$ により、2重複したベクトル w を含み、消える。よってこの特殊化で生き残るのは f_{σ} についての条件

(*) σ は各 $f^{-1}(j)$ ($j \in S$) の中で隣りた置換を満たすものに限る。またこのとき $\Xi \mapsto X$ と特殊化して得られるものは up to $\text{sgn } \sigma$ で $(\det X)^s$ である。符号は交代和の符号と打ち消すので、結局は (*) をみたす f_{σ} の個数を数えればよいことになった。

ここで $\{f_{\sigma}\}$ に \mathfrak{S}_n が次のように働く：

$$f_{\sigma} = (\sigma, f) \xrightarrow{\tau} \tau f_{\sigma} = (\tau \sigma \tau^{-1}, f \tau^{-1}) \quad \tau \in \mathfrak{S}_n$$

これは (*) を保つ。(*) をみたす $\{f_{\sigma}\}$ の \mathfrak{S}_n -同値類は $\{f^{-1}(j); j \in S\}$ という data でまますことは容易だから、 $\#\{f_{\sigma}; (*) \text{ をみたす}\} / \sim \mathfrak{S}_n$ という「組合せ」は $\alpha_j = f^{-1}(j)$ と

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_s = n \quad \alpha_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

の解の個数に等しい。これは既に見た通りに sH_n である。

更に $sH_n = \binom{s+n-1}{n} = \frac{(s+n-1)!}{n!(s-1)!} = \frac{1}{n!} s(s+1)\cdots(s+n-1)$ を
 使うと, このが S_n (同値類) の数であるから $n! = \# S_n$ を乗
 じたものが, 結局 (*) をみたす $\{f_\sigma\}$ の箇教となる. \therefore

$$\beta(s) = s(s+1)\cdots(s+n-1)$$

が示された. (注: これは同時に $\sum_{\sigma \in S_n} s^{c(\sigma)} = \beta(s)$ とも見れるが詳しくは
 略す. 但し, $c(\sigma)$ は σ の cycle の箇教.)

5: 問題

証明は終わったが, 残り箇教を使うと, 問題を提出してお
 こす. 必ずしも意味のあるものとは限らないかも知れないが
 当然考えるものがある. 但し, 筆者は充分吟味した訳で
 はない.

[1] 同様の論法が別の h -函数 (及び Shimura の h -函数)
 に使えるか? 特に Garding の例など. または [HV] の中
 の multiplicity-free action の例など

[2] Cayley の公式の q -analogue に対し, 組合せ論
 的存解釈も含めて拡張できるか? 特に有限体上のベクトル
 空間の写像箇教との関連.

[3] Capelli 恒等式の組合せ論的証明. さらに [HV]
 の中の skew symmetric case について.

以上 (1991年1月25日)

BIBLIOGRAPHY

- [Ca1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Annalen **29** (1887), 331–338.
- [Ca2] ———, *Ricerca delle operazioni invariantive fra piu serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariantiva fra le stesse serie*, Atti delle Scinze Fis. e Mast. di Napoli (2) I (1888), 1–17.
- [Ca3] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Annalen **37** (1890), 1–37.
- [HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli Identity, the Double Commutant Theorem, and Multiplicity-Free Actions*, preprint 1990.
- [G] L. Gårding, *Extension of a formula by Cayley to symmetric determinants*, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2 **8** (1947), 73–75.
- [GY] J.H. Grace and A. Young, *The Algebra of Invariants*, Cambridge University Press, 1902.
- [K] T. Kimura, *The theory of prehomogeneous vector spaces*, (in Japanese), Sugaku **32** (1980), 97–118.
- [KS] B. Kostant and S. Sahi, *Capelli identity, the domains and the generalised Laplace transform*, preprint 1989 Dec..
- [Ra] M. Raïs, *Distributions homogènes sur des espaces de matrices*, (Thèse Sc. math. Paris, 1970), Bull. Soc. math. France, Mémoire **30** (1972), 1–109.
- [RS] H. Rubenthaler and G. Schiffmann, *Opérateurs différentiels de Shimura et espace préhomogènes*, Invent. math. **90** (1987), 409–442.
- [S] M. Sato, *The theory of prehomogeneous vector spaces*, notes by T. Shintani (in Japanese), Sugaku no Ayumi **15-1** (1970), 85–157.
- [Sh] G. Shimura, *On differential operators attached to certain representations of classical groups*, Invent. math. **77** (1984), 463–488.
- [T1] H.W. Turnbull, *The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants*, Dover, 1960.
- [T2] ———, *Symmetric determinants and the Cayley and Capelli operators*, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2 **8** (1947), 76–86.
- [W] H. Weyl, *The Classical Groups, their Invariants and Representations*, Princeton University Press, 1946.