数理解析研究所講究録
768巻 1991年 93-102


# 球関数の新谷 lifting について

阪大・理 川中宣明 (Noriaki Kawanaka)

## §1. 新谷 lifting

$G$を有限群,

$$\sigma : g \longrightarrow {}^{\sigma}g \quad , \quad g \in G$$

を，$G$の自己同型とする．$G$の$\sigma$による不動点の全体を$G_\sigma$，$G$と$\langle\sigma\rangle$の半直積$G\langle\sigma\rangle$を$\tilde{G}$と書く．$m$を$\sigma$の位数として，"ノルム写像"

$$\mathbf{N} : G \longrightarrow G$$

を

$$\mathbf{N}(g) = (g\sigma)^m = g \cdot {}^{\sigma}g \cdot {}^{\sigma^2}g \cdot \cdots {}^{\sigma^{m-1}}g \quad , \quad g \in G$$

によって定義する．$G$が可換なら$\mathbf{N}(g) \in G_\sigma$となるが一般には，$\mathbf{N}(g)$を含む$G$の共役類${}^{G}\mathbf{N}(g)$が$\sigma$で保たれる，という程度のことしか成り立たない．次の条件(S)を考える．

<u>条件(S)</u>　任意の$g \in G$に対して${}^{G}\mathbf{N}(g) \cap G_\sigma$は$G_\sigma$のひとつの共役類である．

さて，　$R : G \longrightarrow GL(W)$　を　$G$ の複素既約表現とすると，${}^{\sigma}R = R \circ \sigma^{-1}$　も $G$ の既約表現である．いま ${}^{\sigma}R \sim R$　と仮定すれば，$\tilde{G}$ の既約表現

$$\tilde{R} : \tilde{G} \longrightarrow GL(W)$$

で　$\tilde{R}|G = R$　であるものが（同値を除いて $n$ 個）存在する．条件(S) のもとで，次のように定義する．

<u>定義</u>（新谷）　$G_\sigma$ の既約表現　$Q : G_\sigma \longrightarrow GL(V)$ が，$G$ の既約表現 $R$ で ${}^{\sigma}R \sim R$　となるものに "持ち上がる" とは，

$$\mathrm{trace}\ \tilde{R}(g\sigma) = \varepsilon\ \mathrm{trace}\ Q(n(g))$$

がすべての $g \in G$ に対して成立することである．ここに $\varepsilon$ は $\varepsilon^m = 1$ を満たす複素数で $g$ には関係しない，また $n(g)$ は ${}^{G}N(g) \cap G_\sigma$ の任意の元である．

条件(S)が満たされ，$G_\sigma$ の任意の既約表現が，$G$ の既約表現へ持ち上がる場合として，例えば，次の２つが知られている．

<u>Case(G)</u>　$(|G|, m) = 1$ の場合．

（1968 G. Glauberman [1] の結果。Glauberman

自身の formulation は，上と少しだけ異なる。）

<u>Case(S)</u>　$G = GL_n(\mathbb{F}_{q^m})$　（$\mathbb{F}_q$ = 元数 $q$ の有限体），$\langle\sigma\rangle = Gal(\mathbb{F}_{q^m}/\mathbb{F}_q)$ の場合．

（新谷卓郎 1976.[2] 土井，長沼両氏による保型形式，および対応する Dirichlet 級数の持ち上げについての結果を発展させた斉藤裕氏の仕事［5］の本質を，新谷氏は，局所体・アデール環上の reductive 群の表現の持ち上げという形で定式化した［3］，［4］。上記 1976 年の論文は，有限体上でも同様のことが成立することを示したもの。）

良く知られているように，対称空間上の球関数，あるいは，Hecke 環の指標は，群の既約指標の概念の一般化と考えることができる。そこで，“球関数の新谷 lifting” とは何か？という問題を考えてみたい。

## §2. Hecke 環 $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$

有限群の Hecke 環とその表現の一般論については，Curtis, Reiner の本［6］の第1巻，§11D があるが，ここでは，そこの結果を，もう少し一般化しておく。

$G$ を有限群，$H$ と $K$ をその部分群とする。$G$ の群環

$\mathbb{C}G$のべき等元 $e_H = |H|^{-1} \sum_{h \in H} h$, $e_K = |K|^{-1} \sum_{k \in K}$ を用いて

$$\mathcal{H}(H\backslash G/K) = e_H \mathbb{C}G e_K \quad (\subset \mathbb{C}G)$$

とおく。明らかに $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ は，$\mathbb{C}G$ の部分環である。Curtis-Reiner の本の Hecke 環は $H=K$ の特別の場合である。$\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ は，また，左から $\mathcal{H}(H\backslash G/H)$ が，右から $\mathcal{H}(K\backslash G/K)$ が作用する加群とみることもできる。"Hecke 環" $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ およびその表現の一般論について，次のことがわかる。

1° $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ は，半単純とは限らない。また，単位元を持つとは限らない。

2° $\{x_i \mid i \in I\}$ を $H\backslash G/K$ の完全代表系とすると，

$$[x_i] = \frac{|HK|}{|x_i^{-1} H x_i \cap K|} e_H x_i e_K, \quad i \in I$$

は，$\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ の基底をなし，その構造定数 $\in \mathbb{Z}$ となる．

3° $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ のすべての既約指標は，$\mathbb{C}G$ の既約指標の $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ への制限として得られる．また，$\mathbb{C}G$ の相異なる既約指標 $\chi_1$, $\chi_2$ に対して，

$$\chi_i | \mathcal{H}(H\backslash G/K) \neq 0, \ i=1,2 \Rightarrow \chi_1 | \mathcal{H}(H\backslash G/K) \neq \chi_2 | \mathcal{H}(H\backslash G/K)$$

4° $\mathbb{C}G$ の既約指標 $\chi, \chi'$ に対して

$$\chi(1)|G|^{-1}\sum_{i\in I}|Hx_iK|\,\chi(e_Hx_ie_K)\overline{\chi'(e_Hx_ie_K)} = \begin{cases} 0 & \chi\neq\chi' \\ \chi(e_He_K) & \chi=\chi' \end{cases}.$$

5° $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ が半単純（$\Leftrightarrow$ べき零な両側イデアルは(0)）かつ可換たなるための必要十分条件は，
$\langle\chi, 1_H^G\rangle\neq 0$，$\langle\chi, 1_K^G\rangle\neq 0$ となる $G$ の（任意の）既約指標 $\chi$ に対し，$\langle\chi, 1_H^G\rangle=\langle\chi, 1_K^G\rangle=1$ と $\chi(e_He_K)\neq 0$ が成り立つことである.

**定義** $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ の元 $\varphi$（$\neq 0$）が $H\backslash G/K$ 上の球関数であるとは，任意の $f\in\mathcal{H}(H\backslash G/H)$ と任意の $g\in\mathcal{H}(K\backslash G/K)$ に対して

$$f\cdot\varphi = c_\varphi(f)\,\varphi \qquad \exists\, c_\varphi(f)\in\mathbb{C}$$
$$\varphi\cdot g^* = d_\varphi(g)\,\varphi \qquad \exists\, d_\varphi(g)\in\mathbb{C}$$

であること．ここに，$*$ は $\mathcal{H}(K\backslash G/K)$ の標準的な反自己同型である．

このとき $f\longrightarrow c_\varphi(f)$，$g\longrightarrow d_\varphi(g)$ は，それぞれ $\mathcal{H}(H\backslash G/H)$，$\mathcal{H}(K\backslash G/K)$ の1次元表現となる．

とくに $\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ が半単純，可換である場合，$G$ の既約指標 $\chi$ で，$\chi(e_He_K)\neq 0$ を満たすものに対して，

$$\varphi_\chi = \sum_{i\in I}|Hx_iK|\,\overline{\chi(e_Hx_ie_K)}\,e_Hx_ie_K$$

は $H\backslash G/K$ 上の球関数である．逆に，$H\backslash G/K$ 上のすべての球関数は $\varphi_\chi$ の定数倍で，$\mathcal{H}(H\backslash G/K)$ は，$\varphi_\chi$ 達で張られる．

また，
$$\frac{c_{\varphi_\chi}(e_H \times e_H)}{d_{\varphi_\chi}(e_K \times e_K)} = \frac{\chi(e_H \times e_H)}{\chi(e_K \times e_K)}, \quad x \in G$$
である．

§3　$\mathcal{H}(\Delta G\backslash G\times G/\Delta_\sigma G)$ について

$G$ を有限群とし，$\sigma$ をその自己同型とする．直積群 $G\times G$ の部分群として，次の2つを考える．

$\Delta G = \{(x, x) \mid x \in G\}$ ：対角部分群

$\Delta_\sigma G = \{({}^\sigma x, x) \mid x \in G\}$ ：$\sigma$ でひねった対角部分群

このとき，$\mathcal{H}(\Delta G\backslash G\times G/\Delta_\sigma G)$ は，可換．一般には半単純とは限らないが，例えば，§1 の Case(G)，Case(S) の場合は半単純である．$G\times G$ の既約指標 $\psi$ が，
$$\langle 1_{\Delta_\sigma G}^{G\times G}, \psi \rangle \neq 0, \quad \langle 1_{\Delta G}^{G\times G}, \psi \rangle \neq 0$$
となるための必要十分条件は，それが
$$\psi = \chi \otimes \bar{\chi}, \quad \chi \text{ は } {}^\sigma\chi = \chi \text{ をみたす } G \text{ の既約指標}$$
と書けることである．また，このとき
$$(\chi\otimes\bar{\chi})(e_{\Delta G}(g, 1)\, e_{\Delta_\sigma G}) = \frac{\tilde{\chi}(\sigma^{-1})\,\tilde{\chi}(g\sigma)}{\chi(1)^2}$$

が成り立つ．ただし，$\tilde{\chi}$ は §1 の $\tilde{R}$ の指標である．$\sigma = id.$ のときは，良く知られた式

$$(\chi \otimes \bar{\chi})(e_{\Delta G}(g,1)e_{\Delta G}) = \frac{\chi(g)}{\chi(1)}$$

になる．これらの式と Glauberman 1968，新谷 1976 の結果をあわせると，Case(G)，Case(S) の場合は，

$$\Delta(G_\sigma)\backslash G_\sigma \times G_\sigma / \Delta(G_\sigma) \quad \text{上の球関数}$$

と

$$\Delta G \backslash G \times G / \Delta_\sigma G \quad \text{上の球関数}$$

とが，ノルム写像による対応を通して同一視できることがわかる．これは，Glauberman や新谷の結果の球関数的な言い換えである．次節で単なる言い換えでないような例を示す．

## §4 $\mathcal{N}(Sp_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})\backslash GL_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})/U_{2n}(\mathbb{F}_q))$ など

$G$ を有限群，$\jmath$ と $\tau$ をその自己同型で

$$\jmath^2 = \tau^2 = id. \quad \jmath\tau = \tau\jmath$$

を満たすものとする．次の2つの両側剰余類集合を考える．

$$G_\jmath \backslash G / G_{\jmath\tau}, \quad (G_\tau)_\jmath \backslash G_\tau / (G_\tau)_\jmath$$

$$\alpha_\jmath : G \longrightarrow G \quad (x \longrightarrow {}^{\jmath}x^{-1}x)$$

という写像を考えると，次のことが成り立つ．

- $g, h \in G$ に対して $G_j\, g\, G_{j\tau} = G_j\, h\, G_{j\tau}$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha_j(g) = {}^{\tau}x^{-1}\, \alpha_j(h)\, x \quad (\exists\, x \in G_{j\tau})$$

- $g, h \in G_\tau$ に対して $(G_\tau)_j\, g\, (G_\tau)_j = (G_\tau)_j\, h\, (G_\tau)_j$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha_j(g) = x^{-1}\, \alpha_j(h)\, x \quad (\exists\, x \in (G_\tau)_j)$$

よって,

$$G_j \backslash G / G_{j\tau} \xleftrightarrow{\sim} \alpha_j(G) \text{ の } G_{j\tau} \text{ の元による } \tau\text{-共役類}$$

$$(G_\tau)_j \backslash G_\tau / (G_\tau)_j \xleftrightarrow{\sim} \alpha_j(G_\tau) \text{ の } (G_\tau)_j \text{ の元による共役類}$$

これから後は次の2つの場合だけを考える.

Case$(G')$ $|G|$ が odd

Case$(S')$ $G = GL_{2n}(\mathbb{F}_{q^2})$, $\langle\tau\rangle = Gal(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$

$$j : g \longrightarrow J^{-1}\,{}^t g^{-1} J, \quad J = \begin{pmatrix} O_n & 1_n \\ -1_n & O_n \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{このとき, } G_j = Sp_{2n}(\mathbb{F}_{q^2}),\ G_{j\tau} \cong U_{2n}(\mathbb{F}_q) \ \text{ユニタリ群} \\ \qquad G_\tau = GL_{2n}(\mathbb{F}_q) \\ \qquad (G_\tau)_j = Sp_{2n}(\mathbb{F}_q) \end{array} \right)$$

この場合, 任意の $g \in G$ に対し

$${}^{G_\tau}\!\left(\alpha_j(g)\, {}^{\tau}\alpha_j(g)\right) \cap G_\tau$$

は, $\alpha_j(G_\tau)$ の $(G_\tau)_j$ の元によるひとつの共役類になること, 従って, $(G_\tau)_j \backslash G_\tau / (G_\tau)_j$ のひとつの元を決めることが, わかる. さらに, この対応により

$$G_\delta \backslash G / G_{\tau_\delta} \xrightarrow{\sim} (G_\tau)_\delta \backslash G_\tau / (G_\tau)_\delta$$

となり，

$$G_\delta\, g\, G_{\tau_\delta} \longleftrightarrow (G_\tau)_\delta\, x\, (G_\tau)_\delta\,, \quad \begin{matrix} g \in G \\ x \in G_\tau \end{matrix}$$

のとき

$$\frac{|G_\delta\, g\, G_{\tau_\delta}|}{|G_\delta||G_{\tau_\delta}|} = \frac{|(G_\tau)_\delta\, x\, (G_\tau)_\delta|}{|(G_\tau)_\delta|^2}$$

となることもわかる．これらのことを用いて，次のことが証明できる．

<u>定理</u>　Case$(G')$，Case$(S')$ のとき，$\mathcal{H}(G_\delta \backslash G / G_{\tau_\delta})$ は．可換，半単純で，$G_\delta \backslash G / G_{\tau_\delta}$ 上の球関数と $(G_\tau)_\delta \backslash G_\tau / (G_\tau)_\delta$ 上の球関数とは．上の対応を通して同一視できる．

<u>注意</u>　Case$(S')$ のとき，

$$(G_\tau)_\delta \backslash G_\tau / (G_\tau)_\delta = Sp_{2n}(\mathbb{F}_q) \backslash GL_{2n}(\mathbb{F}_q) / Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)$$

上の球関数は，〔7〕で求められている．

## 文　献

〔1〕G. Glauberman: Correspondences of characters for relatively prime operator groups, Canad. J. Math. 20 (1968), 1465 − 1488.

〔2〕T. Shintani: Two remarks on irreducible characters of finite general linear groups, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 396 – 414.

[3] T. Shintani : On irreducible unitary characters of a certain group extension of $GL(2, \mathbb{C})$, J. Math. Soc. Japan 29 (1977), 165 – 188.

[4] T. Shintani : On liftings of holomorphic cusp forms, Proc. Symp. Pure Math. 33, Part 2, Providence (1979), 79 – 110.

[5] H. Saito : Automorphic Forms and Algebraic Extensions of Number Fields, Lecture Notes in Math., Kyoto Univ. 1975

[6] C.W. Curtis, I. Reiner : Methods of Representation Theory, Vol 1, Wiley-Interscience, 1981.

[7] E. Bannai, N. Kawanaka, S-Y. Song : The character table of the Hecke algebra $\mathcal{H}(GL_{2n}(\mathbb{F}_q), Sp_{2n}(\mathbb{F}_q))$, J. Alg. 129 (1990), 320 – 366.