

## Sharp 指標と有限単純群

筑波大 飯寄 信保 (Nobuo Iiyori)

$G$  を有限群.  $\chi$  を  $G$  の一般指標とする. 1904 年に Blichfeldt は  $b(\chi) = |G|^{-1} \prod_{x \in \chi(G^\#)} (\chi(x) - x)$  が有理整数になることを示した.  $b(\chi) = 1$  のとき指標  $\chi$  は Sharp または  $\chi(G^\#)$  型の sharp 指標と呼ばれる. 又.  $|\chi(G^\#)|$  を  $\chi$  の rank と言う. Sharp 指標については, Cameron, Kataoka, Kiyota, Matsuhisa 5 によっていろいろと考察されている.

定義 (1)  $\chi_G$  を  $G$  の正則指標,  $n$  を有理整数とする. 一般に  $\chi_G + n1_G$  は sharp 指標であるが, これを自明な sharp 指標と呼ぶ.

(2)  $\chi$  を  $G$  の (Sharp) 指標とする.  $\chi(G^\#)$  が  $\mathbb{Z} - \{\chi(1) - 1, \chi(1) + 1\}$  の部分集合で又,  $\chi(G^\#) = L_1 \cup \dots \cup L_k$  (disjoint union) に分解され,  $i \neq j$  ならば  $l_i \in L_i, l_j \in L_j$  は常に  $(\chi(1) - l_i, \chi(1) - l_j) = 1$  となるとき  $\chi$  は良-連結であると言う.

さて、Sharp 指標に関する主な問題に次のようなものがある。

問題 (1) 任意の型  $L$  に対し、 $L$  型の Sharp 指標をもつ群を分類せよ。

(2) 自明でない Sharp 指標をもつ群を見つけよ。

(3) 自明でない Sharp 指標をもたない群を見つけよ。

[2]には、問題(1)について色々な結果が書れておりその中の一つに次の定理1がある。

定理1 (Cameron-Kiyota [2])  $\{-1, 1\}$  型の Sharp 指標をもつ群は次のものに限る。

$$D_8, Q_8, S_4, \widehat{S}_4, SL(2, 3), GL(2, 3), S_5, SL(2, 5) \\ PSL(2, 7), A_6, \widehat{A}_7, \text{そして } M_{11}.$$

問題(2)については、あまり考察されていなか、たが、最近次の定理が Kataoka によって示された。

定理2 (Kataoka [5]) 偶数位数基本アーベル群は自明でない Sharp 指標を持たない。

Kataoka は実際は上の定理をもつと大きなクラスの群について示している。

定義  $G$  の Prime graph  $\Gamma(G)$  とは、 $V(\Gamma(G)) = \pi(G)$  で  $x, y \in V(\Gamma(G))$  ( $x \neq y$ ) に対し、 $G$  が位数  $xy$  の元を持つとき、 $\{x, y\} \in E(\Gamma(G))$  となるようなグラフのことである。

この Prime graph と  $k$ -連結 Sharp 指標の概念は密接に関係している。問題(3)に関して次の結果を得た。

定理3 (Iiyori [3]) 次の(1)、(2)は同値である。

- (1)  $\Gamma(G)$  の連結成分の個数が2以上。
- (2)  $G$  は rank 2 の 2-連結 Sharp 指標をもつ。

(2) から (1) は Kiyota による。証明の概略を述べる。次の補題は有限群の Sharp 指標を見つける上で、重要なものである。

補題  $G$  を有限群とし、 $\text{Irr}_G(G) = \{\chi_0, \dots, \chi_r\}$  ( $\chi_0 = 1_G$ ) とする。又、 $\{g_0, \dots, g_r\}$  ( $g_0 = 1$ ) を  $G$  の共役類の代表系とする。 $A = (\chi_i(g_j))$  とおく。  $S = {}^t(s_1, \dots, s_r)$  が  $\prod_{\sigma \in \{s_1, \dots, s_r\}} \sigma = |G|$  を満たしているとする。

もし

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = -A_{ii} \begin{pmatrix} |C_G(g_1)|^{-1} & 0 \\ 0 & |C_G(g_r)|^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^r$$

ならば、 $\chi = \sum_{i=1}^r a_i \chi_i + z 1_G$  ( $z \in \mathbb{Z}$ ) は Sharp 指標である。

ここで  $A_{ii}$  は  $A$  の  $i$  行  $i$  列の余因子行列とする。

さて  $\Gamma(G)$  の連結成分の個数  $s$  が 2 以上ならば、 $|G| = n_1 \cdots n_t$  ( $n_i \in \mathbb{Z}$ ) で次の性質を満すものがあるのが容易にわかる。

(i)  $(n_i, n_j) = 1$  for  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq t$  かつ  $1 < t \leq s$ 。

(ii)  $\tau \in G^\#$  に対しある  $i$  が存在して  $|C_G(\tau)|$  は  $n_i$  を割り切る。

そこで  $\Gamma_i = \{\tau \in G^\# \mid n_i \equiv 0 \pmod{|C_G(\tau)|}\} \cup \{1\}$  とおき、 $\theta \in \text{Irr}_\mathbb{C}(G)$

に対し、 $\theta_i$  を

$$\theta_i(\tau) = \begin{cases} |G|\theta & \tau \in \Gamma_i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とおく。  $\theta_i$  は Brauer の指標定理から一般指標になることがわかる。これと補題から

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau = 1 \\ -n_i & \tau \in \Gamma_i - \{1\} \text{ for } 1 \leq i \leq t \end{cases}$$

とおくと  $\varphi$  が Sharp 指標になることがわかる。従って (1) から (2) を得る。(2) から (1) は背理法を用いて示される。

定理3によつて rank 2 の 2-連結 Sharp 指標をもつ群の分類は  
 実質、Prime graph の連結成分の個数が 2 以上の有限単純群  $G$   
 の分類に帰着される。この分類は Williams に始まり Yamaki と  
 筆者によつて完成されている。

以上

## References

- [1] H.F. Blichfeldt, A theorem concerning the invariants of  
 homogeneous groups with some applications to substitution groups,  
*Trans. Amer. Math. Soc.* 5 (1904) 461-466.
- [2] P.J. Cameron and M. Kiyota, Sharp characters of finite groups,  
*J. Algebra* 115 (1988) 123-143.
- [3] N. Iiyori, Sharp characters and prime graphs of finite groups  
 (preprint)
- [4] N. Iiyori and H. Yamaki, Prime graph components of the  
 simple groups of Lie type over the field of even characteristic,  
 (in preparation)
- [5] T. Kataoka, private communication. (1991年1月11日付)
- [6] J.S. Williams, Prime graph components of finite groups. *J.*  
*Algebra* 69 (1981) 487-513.