数理解析研究所講究録
768巻 1991年 16-22

On certain projective modules for finite groups of Lie type

大阪市大・理　津島行男
Yukio Tsushima

Kを標数$p>0$の代数的閉体とし，qをpのべきとする。

$GL(n,q)\supset G_0$を古典的線形群

$$\underbrace{SL(l+1,q)}\,,\ \underbrace{Sp(2l,q)}_{(\text{斜交群})},\ \underbrace{\Omega(2l+1,q),\ \Omega_{\pm 1}(2l,q)}_{(\text{直交群})},\ \underbrace{SU(l+1,q)}_{(\text{ユニタリー群})}$$

とすると，G_0はSteinberg module St とよばれるK上$|G_0|_p$次元の既約加群をもつ。Stはprojectiveであり，またG_0の複素加群に持ち上げることもできる。$V=K^n$を自然にG_0-加群とみると，これは既約である。Lusztigは$q\geq 3$ならば$G_0=GL(n,q)$に対し，$St\otimes_K V$が直既約projectiveであることを示した(1974)。その後奥山によってこれが$SL(l+1,q)$と$Sp(2l,q)$についても正しいことが示された(1984)。

ここではこれを上にあげた古典的線形群すべてに対して拡張することを試みる。G_0を統一的に取り扱うためには，Chevalley gp.又はSteinberg gp.と見ると都合が良い。また表現論的にはG_0をuniversal Chevalley (又はSteinberg) gp. Gにおきかえてよい。このときGの上にある(即ちK上の)半単純代数群の有理表現のGへの制限としてすべての既約G-加群が得られる。この立場に立って以下大雑把な方針を述べてみる。

1. 記号と準備

$\mathfrak{g}$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$ type の単純 Lie 環，$\mathfrak{h}$ をその standard Cartan subalgebra，Δ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルート系，Π を単純ルート系，Δ^+ を正ルート全体，W_Π を Δ の Weyl 群とする。$\alpha \in \Delta$ に対し $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ を α の coroot とし

$$X = \{\mu \in \hat{\mathfrak{h}} \; ; \; \mu(h_\alpha) \in \mathbb{Z}, \; {}^\forall \alpha \in \Delta\}$$ とおく。

$\mu \in X$ が dominant であるとは $\mu(h_\alpha) \geq 0$ $({}^\forall \alpha \in \Delta^+)$ のときを言う。$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$ とおき $\omega_i \in X$ を $\omega_i(h_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$ と定めると $\{\omega_1, \cdots, \omega_\ell\}$ は X の $\mathbb{Z}$-basis となる。これらを fundamental dominant weight とよぶ。X^+ を dominant weights 全体の集合とすると

$$X^+ = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} a_i \omega_i \; ; \; a_i \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \cdots\} \right\}.$$

G_K^u を $\mathfrak{g}$ によって定義される K 上の universal Chevalley gp. とする；$G_K^u = \langle x_\alpha(t) \; ; \; \alpha \in \Delta, \; t \in K \rangle$.

G_K^u の Frobenius endomorphism σ を次のように与える；

$$\sigma(x_\alpha(t)) = x_{\tau(\alpha)}(\varepsilon_\alpha t^q)$$

ここで τ は identity で ${}^\forall \varepsilon_\alpha = 1$ 又は τ は A_ℓ, D_ℓ type の Dynkin 図形上の order 2 の symmetry で ${}^\forall \varepsilon_\alpha = \pm 1$ である。

$G = (G_K^u)^\sigma$ を σ の fixed points のつくる有限群とする。最初に挙げた古典群はいずれも G の central subgp. による factor gp. となる。

G_K^u の irreducible rational modules (over K) は X^+ によって

parametrize され，その代表系は $\{L(\lambda)\ ;\ \lambda \in X^+\}$ と表される。ここで λ は $L(\lambda)$ の highest weight である。一方 G の既約加群 (over K) 全体は $X_q = \{\sum_{i=1}^{\ell} a_i\omega_i\ ;\ 0 \leq a_i \leq q-1\} \subset X^+$ とおくと $\{L(\lambda)'\ ;\ \lambda \in X_q\}$ と表される。ただし $L(\lambda)' = L(\lambda)|G$ である。例えば $L(0)'$ は trivial module，$L((q-1)\rho)'$ ($\rho = \sum \omega_i$) は Steinberg module である。一方 $G \longrightarrow G_0$ を通して $V = K^n$ を G-module とみると $V = L(\omega_1)'$ である。ただし

$$\omega_1(\mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_n)) = t_1 \quad , \mathrm{diag}(t_1, \cdots, t_n) \in \mathfrak{h}$$

($\mathfrak{g}$ が B_ℓ type の場合は $\omega_1(\mathrm{diag}(0, t_1, \cdots, t_{2\ell})) = t_1$)

$\lambda, \mu \in X \quad , \mu - \lambda = \sum r_i\alpha_i \quad (r_i \in \mathbb{Q})$ と表したとき

$$\lambda \leq_{\mathbb{Q}} \mu \iff r_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, \ell)$$

$$\lambda \leq \mu \iff r_i \in \mathbb{Z}^+ \quad (i = 1, 2, \cdots, \ell)$$

と約束する。

また $\lambda \in X_q$ に対し $\lambda^0 = (q-1)\rho + \varpi_0\lambda$ とおくと $\lambda^0 \in X_q$ である（ここで $\varpi_0 \in W_\pi$ は $\varpi_0\Pi = -\Pi$ となる唯一つの元）。既約 G-加群 $L(\lambda)'$ ($\lambda \in X_q$) の projective cover を $U(\lambda)$ と表す。St は projective であるから $St \otimes L(\lambda)'$ も projective であり，したがって $\{U(\mu)\ ;\ \mu \in X_q\}$ の直和で表される。Jantzen [1] に次の事が示されている（$^2D_\ell$ type の場合も含めた proof は津島 [3] 参照）。

<u>Lemma 1.</u> G を universal Chevalley gp / $\mathbb{F}_q$ 又は universal Steinberg gp of type ${}^2D_\ell$ $(\ell \geq 4)$ とすると $(m(\lambda,\mu) \geq 0)$

$$St \otimes L(\lambda)' \simeq U(\lambda^0) \oplus \bigoplus_{\lambda^0 <_B \mu} m(\lambda,\mu) U(\mu)$$

これを用い，また ${}^2A_\ell$ type の universal Chevalley gp. $SU(\ell+1, q)$ については別の考察を用いると，とも角次の事がわかる。

<u>Lemma 2.</u> $G_0 = SL(\ell+1, q)$, $\Omega(2\ell+1, q)$, $Sp(2\ell, q)$, $\Omega_{\pm 1}(2\ell, q)$, $SU(\ell+1, q)$ に対し次が成り立つ。

(1) $St \otimes V \simeq U(\omega_1^0) \oplus m_1 St \quad (m_1 \geq 0)$

(2) $G_0 = SL(\ell+1, q)$, $SU(\ell+1, q)$ に対しては

$$St \otimes \overset{k}{\wedge} V \simeq U(\omega_k^0) \oplus m_k St \quad (m_k \geq 0, \quad 1 \leq k \leq \ell)$$

ただし $\overset{k}{\wedge} V$ = module of skew symmetric tensors of degree k.

上記の m_k を計算することは全くの別の話となる。次節でそれを述べる。

2. Levi subgroup への reduction

$B_K^u = \langle x_\alpha(t), H_K^u ; \alpha \in \Delta^+, t \in K \rangle$ は G_K^u の Borel subgp であり，

$H_K^u = \langle h_\alpha(t) ; \alpha \in \Delta, t \in K^* = K - \{0\} \rangle$ は G_K^u は maximal torus を与える $(H_K^u \subset B_K^u)$。G_K^u は $(B_K^u, N_{G_K^u}(H_K^u))$-pair を持つ群で，その Weyl 群 $N_{G_K^u}(H_K^u)/H_K^u \simeq W_\Pi$ である。Π の τ-stable subset J に対し Δ_J を J を基本ルート系とする

ルート系とし，$\overline{W}_J$ をその Weyl 群とする。parabolic subgp $\tilde{P}_J = B_K^u \overline{W}_J B_K^u$ を考え $\tilde{L}_J = (B_K^u)_J \overline{W}_J (B_K^u)_J$ をその Levi subgp. とする（$(B_K^u)_J = \langle x_\alpha(t) ; \alpha \in \Delta_J^+, \alpha \in K \rangle H_K^u$）

$P_J = \tilde{P}_J^\sigma$, $L_J = \tilde{L}_J^\sigma$ とおくと L_J は split $(B_J N_J)$-pair of characteristic p をもつ群となり，特に Steinberg module St_{L_J} をもつ。（$B_J = ((B_K^u)_J)^\sigma$, $N_J = N_{\tilde{L}_J}(H_K^u)^\sigma$）

complex character としての St は

$$St = \sum_J (-1)^{|J/\tau|} (1_{P_J})^G$$

である。ここで J は Π の τ-stable subsets を動き，$|J/\tau|$ は J の τ-軌道の個数である。また $St|P_J = (St_{L_J})^{P_J}$ であり，$(St, (1_B)^G) = 1$ となる（$B = (B_K^u)^\sigma$）。φ を V の Brauer character とすると St の projectivity より

$m_1 = \dim \mathrm{Hom}_{kG}(St, St \otimes V) = (St, St \cdot \varphi)$（指標の内積）。

よって Frobenius の相互律より

$$m_1 = \sum_J (-1)^{|J/\tau|} (St_{L_J}, \varphi|L_J)$$

となる。以下 $m_J = (St_{L_J}, \varphi|L_J)$ とおいて m_J を計算する。上の公式は φ として ${}^kV$ の Brauer character をとっても同様であるから（Lemma 2 の記号で）m_K に対しても通用する。G_0 の対角部分群 H の形ははっきりとわかっている。このことから $q \geq 3$ の場合 $G_0 = \Omega(2l+1, q)$ を除くと，すべての $m_J = 0$ が容易にわかる。すなわち

<u>Theorem 3</u>　$q \geq 3$ とする。

(1) $St \otimes V = \begin{cases} V(\omega_1^0) & \text{if } G_0 = SL(l+1,q),\ Sp(2l,q),\ \Omega_{\pm 1}(2l,q) \\ & \quad\text{or } SU(l+1,q) \\ V(\omega_1^0) \oplus St & \text{if } G_0 = \Omega(2l+1,q) \end{cases}$

(2) $G_0 = SL(l+1,q)$ or $SU(l+1,q)$ のとき

$$St \otimes \overset{k}{\bigwedge} V = V(\omega_k^0) \qquad (1 \leq k \leq l)$$

proof. (1)の前半は easy. $\Pi \supset J$ を τ-stable とする。
$m_J \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Hom}_{L_J}(St_{L_J}, V|L_J) \neq 0$, i.e., $St_{L_J} \overset{\oplus}{\subset} V|L_J$.
特に $V|H$ は H-inv. な元 (= highest weight vector) を持つことになるが，これは $\Omega(2l+1,q)$ 以外では不可能である。

$\Omega(2l+1,q)$ の場合，$p=2$ ならば $Sp(2l,q)$ と自然に同型なので，$p>2$ としてよい。このとき $V=K^n$ の first unit vector は H で fix されるので $m_\phi = 1$ である。$J \neq \phi$ のときは highest weight vector は Borel subgp B で fix されねばならないことより $m_J = 0$ となり，$m_1 = 1$ が得られる。

(2)の証明は (1) ほど easy ではないが，$\overset{k}{\bigwedge} V$ の weight の状態と H の形からやはり $m_J = 0$ が云えて $m_k = 0$ を得る。

3. $q = 2$ の場合

この場合 $H = (H_K^q)^\sigma = 1$ が universal Chevalley gp. G において成り立つので Theorem 3 の議論は通用しない。実際符号

つぎの和 $m_1 = \sum (-1)^{|J/\tau|} m_J$ を直接計算することとなり、最終的には2項係数に関する2つの恒等式が決め手となる。結果だけを記しておく。

<u>Theorem 4</u> $SL(l+1,2)$, $Sp(2l,2) \simeq \Omega(2l+1,2)$, $\Omega_{\pm 1}(2l,2)$ に対して,

$$St \otimes V \simeq V(\omega_1^0) \oplus St$$

<u>Theorem 5</u> $SL(l+1,2)$ に対し

$$St \otimes \overset{k}{\wedge} V \simeq V(\omega_i^0) \oplus St \qquad (1 \leq k \leq l)$$

<u>Theorem 6</u> $SU(l+1,2)$ に対し $(1 \leq k \leq l)$

$$St \otimes \overset{k}{\wedge} V = \begin{cases} V(\omega_k^0) \oplus St & \text{if } l = \text{odd and } k = \frac{l+1}{2} \\ V(\omega_k^0) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

文献

[1] J.C. Jantzen: Representations of Chevalley groups in their own characteristics, Proc. Symposia, AMS 47, part 1 (1987), 127–146.

[2] 奥山哲郎：BN-pairをもつ有限群のp-block theory,「群とその表現」研究集会報告集(1984), 176–185.

[3] 津島行男：On certain projective modules for finite groups of Lie type, Osaka J. Math. (1990) vol.27, 947–962.