

Title	熱対流による物質拡散(流体力学におけるトポロジーの問題)
Author(s)	佐野, 理; 若山, 隆代
Citation	数理解析研究所講究録 (1991), 769: 84-95
Issue Date	1991-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/82347
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

熱対流による物質拡散

農工大・教養 佐野 理 (Osamu Sano)

東京電力 若山隆代 (Takashiro Wakayama)

§ 1. はじめに

物質拡散に対する流れの影響は多大であり、原油の流出、大気中の炭素・窒素・硫黄などの酸化物濃度の上昇に起因する光化学スモッグや酸性雨、湖底や湾岸におけるヘドロの巻き上げ、などをはじめとした多くの環境問題との関係でも重要である。流れが何らかの空間的構造を持つとこの拡散は異方的になり、特定の領域で物質の濃度が異常に高くなること、またさらに時間的な変動が加わるとこの効果が促進されることが予想される。これらの問題を背景として、以下では特に熱対流による物質拡散について考察する。2次元のレイリー・ベナル対流による物質拡散については既にいくつかの実験的・数値的な研究がある。¹⁻²⁾ ここでは3次元の熱対流のうち最もよく知られ、また実験でもよく現れる六角形セル流れを取り上げる。数値シミュレーションでは攪乱の型、その振幅や振動

数、上下面の境界条件などの拡散係数への影響、粒子軌道の初期条件依存性などについて調べる。

§ 2. 対流拡散の実験

実験はシリコン・オイル[25°Cで動粘性率 $\nu=1.00(\text{cm}^2/\text{s})$, 熱膨張率 $\alpha=9.5 \times 10^{-4}(1/\text{K})$, 熱伝導率 $\kappa=1.1 \times 10^{-3}(\text{cm}^2/\text{s})$]を用い、流体層の厚さ $d=0.30(\text{cm})$ 、上面が自由、下面が固体の境界条件の下で行われた。対流によってできた流れはシャドウグラフ法により、また物質拡散の様子はリポコジウム(松の花粉、粒径 $2a \sim 50 \mu\text{m}$)を用いて可視化した。図1はその一例で、

レイリー数 $Ra \approx 1300$ の結果である。六角形セルの中央に置いたリポコジウムが特異な形に広がっていく様子がわかる。対流によるセルの代表的な大きさ l は $1(\text{cm})$ 程度、代表的な流速 v は $10^{-3}(\text{cm}/\text{s})$ 程度[したがってセル内を一周する時間 τ は約 $10^3(\text{sec})$]であった。これから拡散係数を見積ると $D^* \sim l^2/4\tau \sim 10^{-4}(\text{cm}^2/\text{s})$

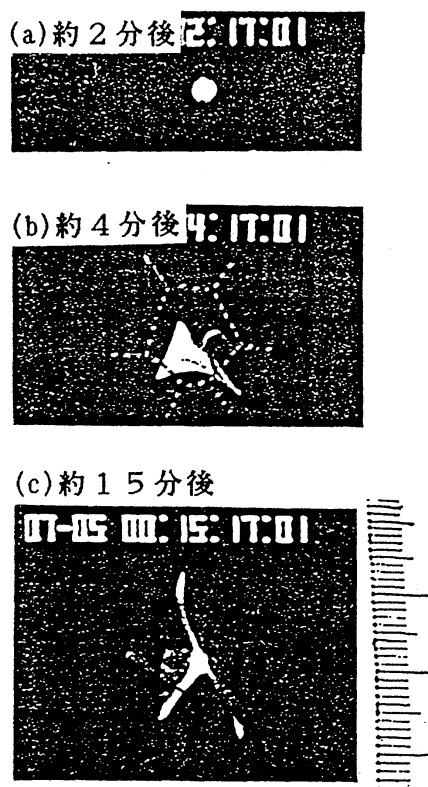


図1 拡散のパターン

(bの破線はセル・パターン)

となる。これは分子拡散による拡散係数 $D \sim k_B T / (6 \pi \mu a) \sim 10^{-12} (\text{cm}^2/\text{s})$ に比べ、格段に大きい (T は温度、 μ は粘性率)。

§ 3. 数値シミュレーション

定常六角形セル流れは次の式で与えられる。速度の直角成分 $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ 、(ここで z 軸は鉛直上向きに選んである) は

$$w = \frac{1}{3} W(z) \left\{ 2 \cos \left(\frac{2\pi x}{\sqrt{3}L} \right) \cos \left(\frac{2\pi y}{3L} \right) + \cos \left(\frac{4\pi y}{3L} \right) \right\}$$

$$u = -\frac{W'(z)}{3a^2} \frac{4\pi}{\sqrt{3}L} \sin \left(\frac{2\pi x}{\sqrt{3}L} \right) \cos \left(\frac{2\pi y}{3L} \right)$$

$$v = -\frac{W'(z)}{3a^2} \frac{4\pi}{3L} \left\{ \cos \left(\frac{2\pi x}{\sqrt{3}L} \right) + 2 \cos \left(\frac{2\pi y}{3L} \right) \right\} \sin \left(\frac{2\pi y}{3L} \right)$$

となる (ただし、 $L = 4\pi/3a$)。上面 ($z=1$)、下面 ($z=0$) がともに自由表面のときは、

$$W(z) = A \sin(\pi z)$$

となる。境界条件が固体-固体や固体-自由の組み合わせについては、例えば Chandrasekhar³⁾などを参照されたい。

この流れ全体にわずかな攪乱を与え、その中で粒子がどのように動いて行くかを調べる。攪乱は原点が①並進振動: すなわち $x \rightarrow x + \varepsilon \cos \delta \sin(2\pi ft)$, $y \rightarrow y + \varepsilon \sin \delta \sin(2\pi ft)$ 、(ε は攪乱振幅、 δ は振動の方向、 f は振動周波数) となる場合、及び②回転: すなわち $x \rightarrow x + \varepsilon \cos(2\pi ft)$, $y \rightarrow y + \varepsilon \sin(2\pi ft)$ 、となる場合、を考えた。

(1) 拡散の空間分布

まず、境界条件として{自由-自由、または固体-自由}、また攪乱の型として{x軸に平行な並進振動($\delta = 0$)、または原点の回りの回転}の4つの組み合わせに対して、それぞれ中央のセル内に1000個の初期点をランダムに選び、その時間発展を見た。計算はルンゲ・クッタ・ジル法($\Delta t = 0.01$)により倍精度で行なった。結果の一例を図2に示す。六角形の辺の中央付近から隣接するセルの中心方向に伸びる特徴的なパターンは、実験で観測されたものとよく似ているように思われる。また、このパターンは上記のどの組み合わせでも見られた。

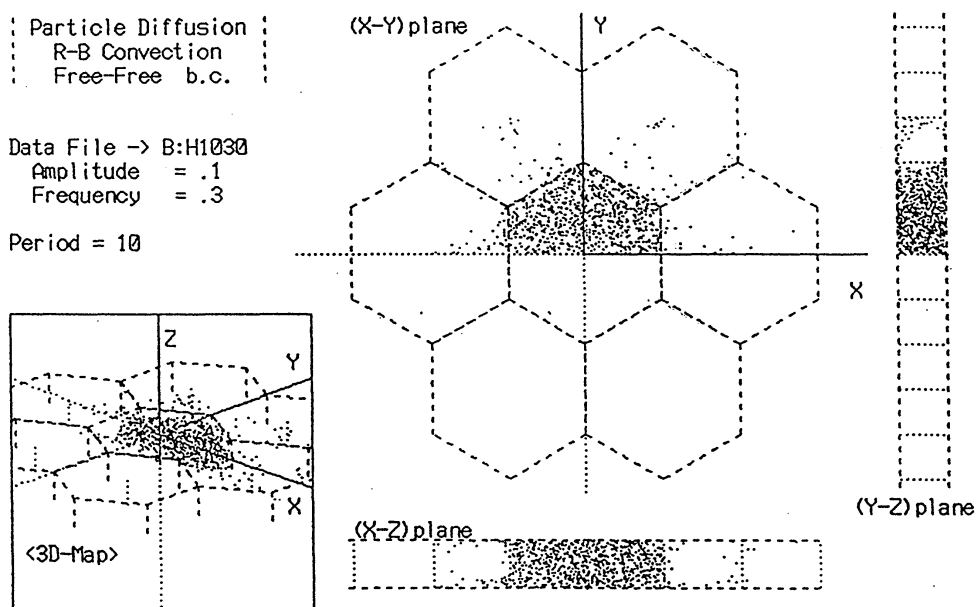


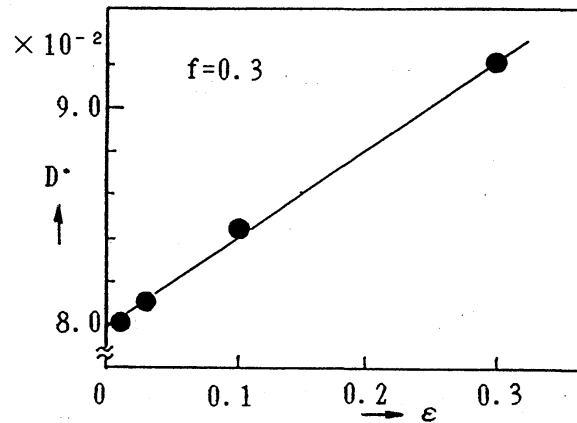
図2 拡散の空間分布の例; $t = 10T$, $T = 1/f$ は攪乱の周期

(自由-自由境界; $\delta = 0$, $\varepsilon = 0.1$, $f = 0.3$)

(2) 拡散係数の攪乱振幅依存性

自由-自由境界条件で並進振動型攪乱($\delta = 0$)という場合に絞って、拡散係数の攪乱振幅依存性を調べた。ここで拡散係数

は中央のセルから外に出て行く粒子の数を基にして算出した。図3は $f = 0.3$ の場合の結果である。 $\varepsilon = 0.01$



~ 0.3 において

図3 攪乱振幅依存性($f = 0.3$)

拡散係数 D^* はほぼ ε に比例している。また拡散係数の大きさは 10^{-1} 程度になっている。これは計算では代表的な速度の大きさを1程度に選んでいたからで、もしこれを実験で観測されている 10^{-3} 程度の大きさに換算すると $D^* \sim 10^{-4}$ 程度になり、実験値と一致する。

(3) 拡散係数の周波数依存性

つぎに、自由-自由境界条件で並進振動型攪乱($\delta = 0$)という条件の下で攪乱振幅 $\varepsilon = 0.1$ を固定し、攪乱周波数 f に対する依存性を調べた。図4(a)に結果を示す。これから $f \sim 0.1$ 付近で D^* が最大になっていることがわかる。1つの粒子がセルの中心や境界付近を通過して1周する経路を考えれば、その1

周の長さは約5程度、また平均の速さは0.5程度であるから、1周に要する時間は10程度になり、攪乱の周期 $1/f \sim 10$ とほぼ一致する。このことは、図4(b)に示したように粒子が流れの分岐点付近に来ると同期するような摂動を受けると隣接したセルに移りやすいことを反映していると解釈できる。

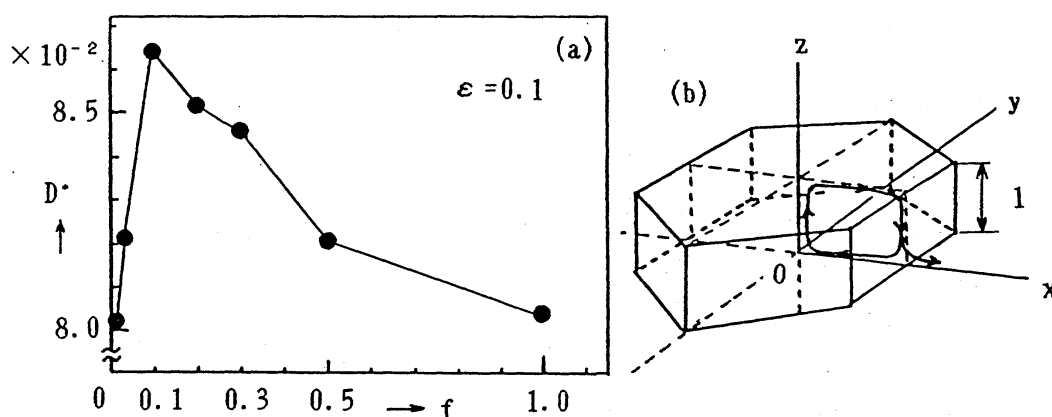


図4(a) 拡散係数の攪乱

(b) D^*_{\max} に対応

周波数依存性

する軌道

(4) 粒子軌道

これまでは粒子全体としての振舞いを見て来たが、ここでは個々の粒子がどのように動いているか、とくに初期位置や攪乱振動数に対する依存性などについて調べてみよう。図5は中央のセルの $x=0$ 面内にある代表的な数点を初期位置に選びその軌道を書いたものである。上下は自由境界で、並進振動型の攪乱 ($\delta=0, \varepsilon=0.1, f=0.3$) を与えている。

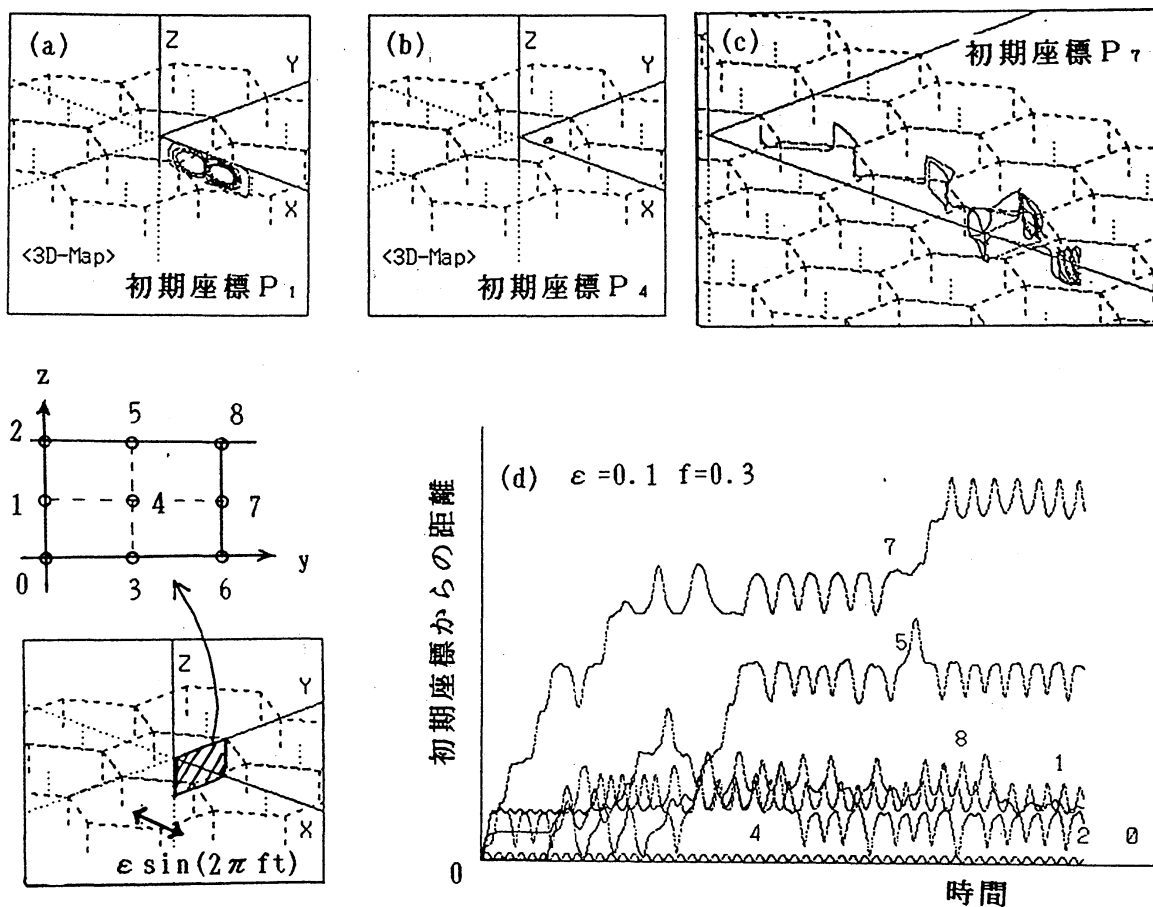


図5 軌道の初期位置依存性

(並進振動型攪乱; $\delta = 0, \epsilon = 0.1, f = 0.3$)

これから言えることは、①ロールの中央付近(位置 P_4)の粒子はほとんど動かないのでセルの外には出ないこと、②セルの境界上の点のうち P_7 を初期点とする軌道は比較的速く隣接するセル間を移動すること、③その他の点を初期点とするもの(特に P_0, P_2, P_6, P_8)は初期の流速が小さいために移動が遅いこと、などである。

つぎに P_7 を初期点とする軌道の攪乱周波数依存性を調べた。攪乱は並進振動型で $\delta = 0$ 、 $\varepsilon = 0.1$ とし、周波数 f を $0.001 \sim 3$ で変化させた。結果の一部を図6に示す。充分高い振動数や逆に充分低い振動数の攪乱では粒子の軌道は定常状態のそれとあまり変わらない(図6(a)(d)参照)。しかしその中間の振動数に対しては図5(c)のようにセル間を渡り歩いたり、図6(b)(c)のように空間を塗りつぶして行くような軌道が見られた。

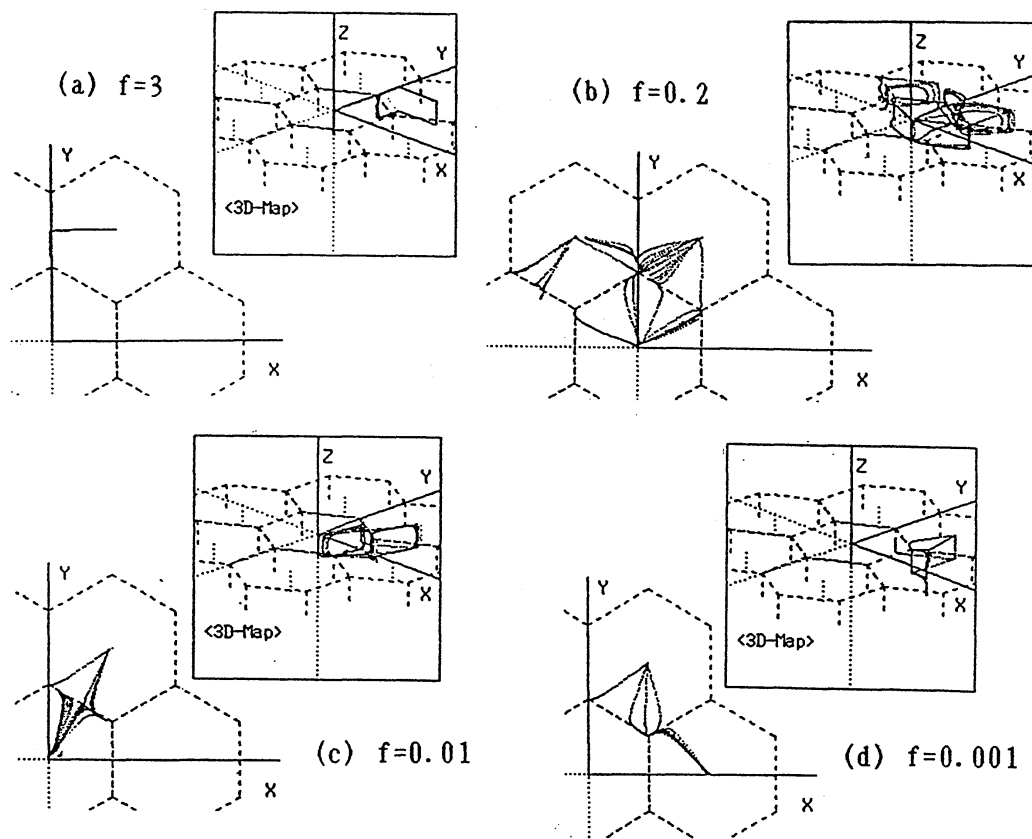


図6 粒子軌道の攪乱周波数依存性

(並進振動型、 $\delta = 0$ 、 $\varepsilon = 0.1$)

(5)対流による混合過程

セルの境界付近の粒子は比較的速やかに拡散していくが、この過程は分子拡散におけるような乱雑な外力によるものではなく3次元的な「引き伸ばし」と「折り畳み」の機構による

線分 $(x=0, y=1, 0 < z < 1)$ 上の初期分布

$$\epsilon = 0.1, f = 0.01$$

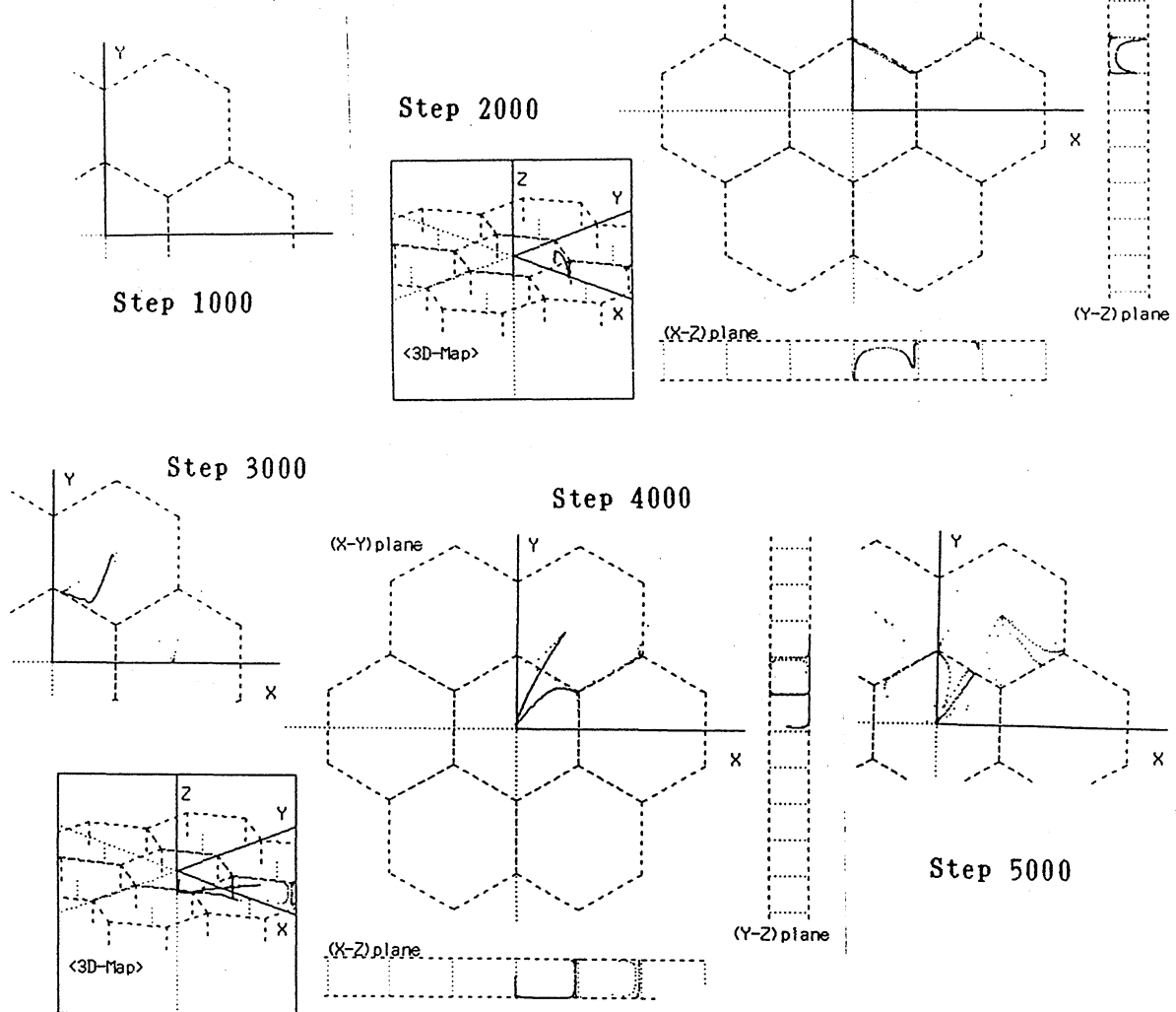


図7 3次元的な「引き伸ばし」と「折り畳み」による混合過程

ものである。この様子を調べるために、セルの境界の $x=0, y=1$ の線分上に1000個の粒子を並べ、その時間発展を見た。一例を図7に示す。よどみ点付近で折り畳まれ次第に複雑に入り組んでいく様子が見られるが、トポロジカルには $x=0, y=1, 0 < z < 1$ 上の線分と同じである。

(6) 六角形セルの移動や消滅と物質拡散

対流により六角形セルが作られほぼ安定した状態に達したと思われた後でも、長時間にわたりセルを観測しているとセルの生成・消滅、分裂・合併、移動などが見られる。図8は§2と同様の対流が生じているときに、多数のセルの中の1つに着目して、その面積や角数の時間変化を調べたものである。隣接したセルが消滅すると着目しているセルが大きくなり、また逆に隣接したセルが成長すると着目しているセルが小さくなる。また短時間ではあるが、五角形や七角形のセルも作られる。上の例ではセルの動きは約 10^{-4} (cm/s) 程度で、これは対流セル内の流速に比べて1桁小さくなっている。さて、セルの生成・消滅や分裂・合併などのトポロジカルな変化が起こると、物質の移送に大きな影響を与える。これは1つのセルの内部にある物質がほぼ全体として隣のセルに受け渡されるからである(図9参照)。これらの現象の発生する場所は時間的にも

空間的にもランダムで、まだ不明の点が多いが、物質拡散に与える影響が大であるため今後の研究が待たれる課題である。

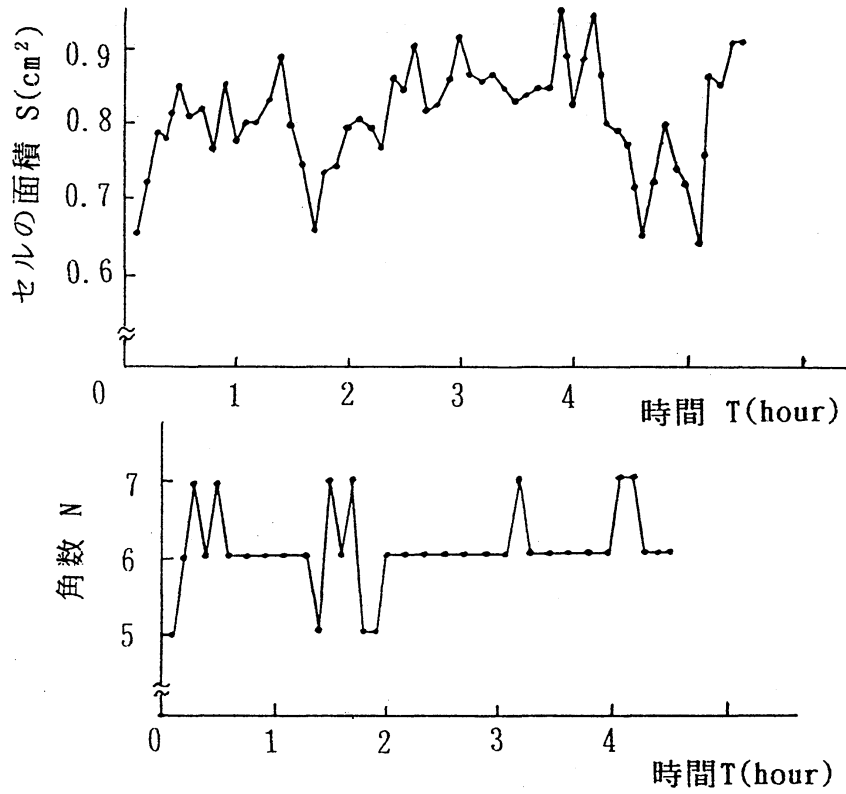


図8 対流胞の面積と角数の時間変化

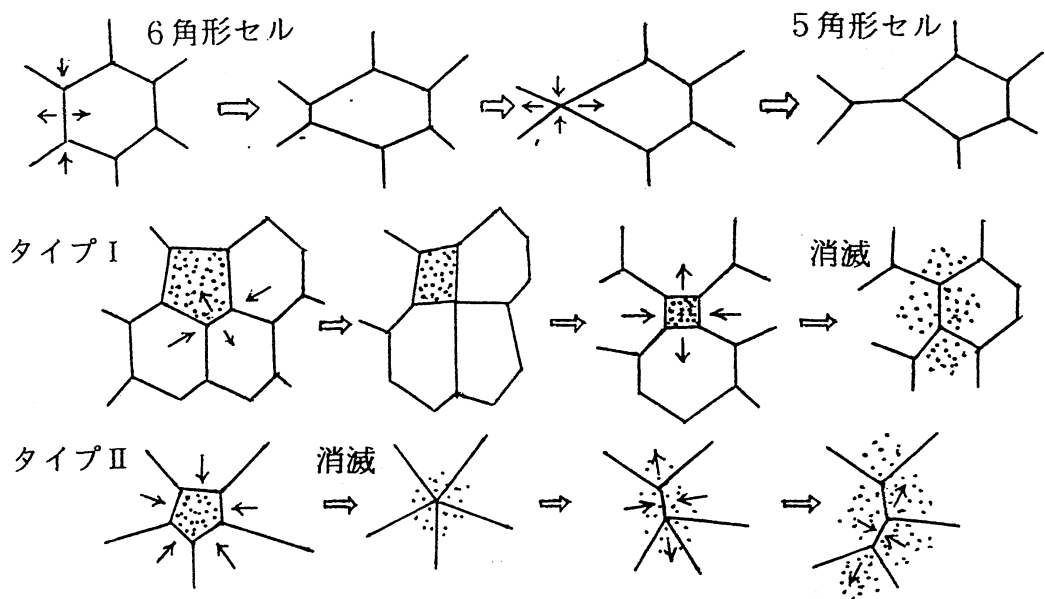


図9 セルの分裂・合併、消滅の模式図

§ 4. まとめ

対流による物質拡散について、実験と数値シミュレーションにより調べた。6角形セル流れを例にとり比較検討した結果、①対流拡散係数が分子拡散係数に比べて数桁大きく、また②拡散が流れを反映した異方的な分布をもつこと、③その空間分布は境界条件や攪乱の型にあまり依存しないこと、しかし拡散係数は④攪乱の振幅に比例し、⑤攪乱の周波数に依存すること、とくに対流の周期と同程度の攪乱周波数に対しては拡散係数が極大になること、⑥前述の攪乱周波数においては、セルの境界付近の粒子は速やかにセルを渡り歩いて行くが、それより充分高い周波数や充分低い周波数に対しては軌道が有限な領域に留まる傾向の強いこと、⑦ここでの拡散は引き伸ばしと折り畳みの機構によること⑧セルのトポロジ的な変化は拡散に大きな影響を与える可能性があること、などが分かった。対流による拡散の予測や制御に向けてはまだ未解決の問題も多く、今後さらに検討が望まれる。

参考文献

- 1) T. H. Solomon & J. P. Gollub: Phys. Rev. A 38 (1988) 6280.
- 2) E. Moses & V. Steinberg: Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 2030.
- 3) S. Chandrasekhar: Hydrodynamic and hydromagnetic stability (Oxford, 1961)