

Title	ネマティック液晶と流れと相互作用(流体力学におけるトポロジーの問題)
Author(s)	高木, 隆司
Citation	数理解析研究所講究録 (1991), 769: 53-61
Issue Date	1991-11
URL	http://hdl.handle.net/2433/82350
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

ネマティック液晶と流れの相互作用

東京農工大学 高木隆司 (Ryuji Takaki)

1. はしがき

液晶とは、方向性を持つ分子からなる液体であるが、分子の向きが局所的にそろっているために、一種の結晶としての性格も持つ物質である。したがって、液晶の流体力学的挙動を議論するには、流速場 u のほかに、分子の向きを表すダイレクターと呼ばれる場 n が必要である。ダイレクターは、単位ベクトルであり、位置 r 、時間 t の関数とみなされる。しばしば、分子の向きを逆転させても同じ状態になり、物理的に n と $-n$ を区別することはできない。なお、液晶の誘電率は非等方であり、 n に垂直な方向と平行な方向とで、値が異なる。

液晶の重要な性質は、外からかけられた電場、あるいは磁場に対する応答、ダイレクター場が一様でないことから生じる弾性エネルギー、流動刷る場合に現れる粘性、および光を当てたときに現れる光学的性質である。なお、本論で重要な性質は、電場への応答、弾性エネルギー、および粘性である。

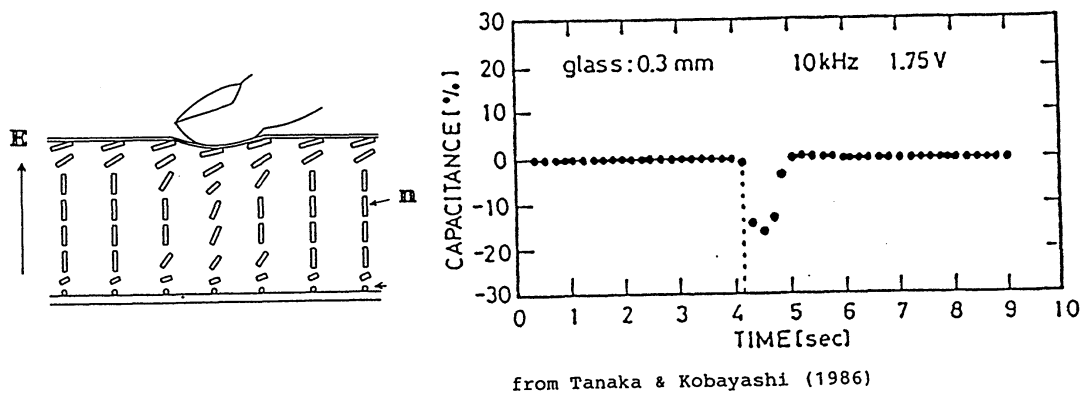


図1. 接触スイッチの仕組みと、生じた電気信号[1]

液晶の工学的応用分野の1つに、接触スイッチ (touch-entry switch) がある。これは、わずかの圧力で押して、電気信号を発生させる装置である。とくに、最近研究されている装置に、図1のように、指で押したとき n の時間変化が生じ、それを通して生じた誘電率の時間変化から電気信号が発生するものがある。[1] その仕組みを以下に説明する。

このスイッチの上面は柔らかい板であり、下の平板の間にネマチック液晶が満たされている。上下の板の内側には、細かい溝がつけられていて、その方向が直交している。一方、境界に接するダイレクターは、この溝の方向にそろって性質がある。すなわち、図2のように座標系を選ぶと、下の面では x 方向に、上の面では y 方向に向いている。流れがないとき、全領域の n の場は、次節に述べる自由エネルギーが最小になるように決まる。その結果は、下の壁から離れると、すぐ n は垂直方向 (z 方向) を向き、上の壁の近くで y 方向にそろってようになっている。

さて、上の板を上から押すと、板のたわみによって液晶の流動が起こる。すると、流れ場 u とダイレクター場 n との相互作用によって、ダイレクターの向きに変化が生じる。もともと、上下の板を電極とするようなコンデンサーが作ってあったとしよう。すると、上述したように誘電率の変化を通して電気容量が変化し、それから電気信号が発生するわけである。

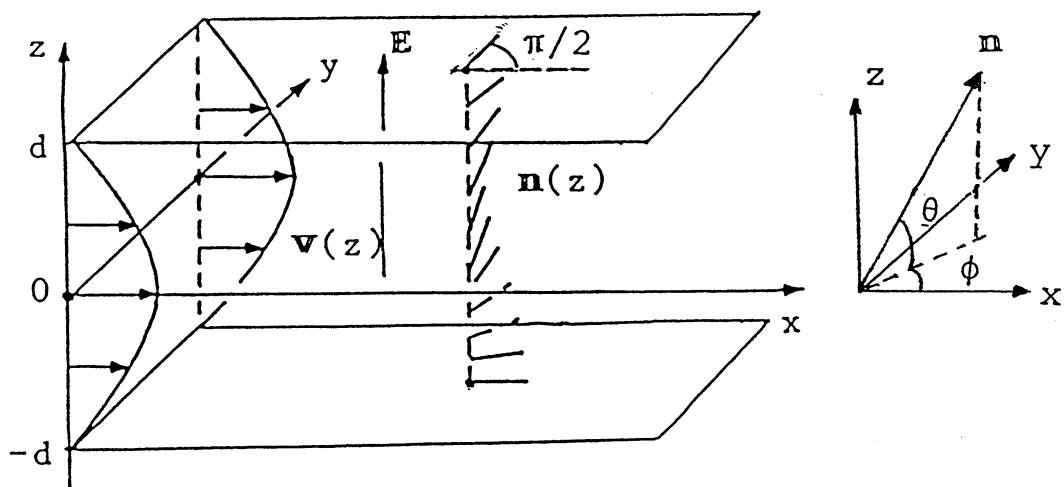


図2 流れとダイレクターの配置、および角度 θ , ϕ の定義

したがって、この仕組みの最も主要な部分は、流れとダイレクターとの相互作用である。その問題について著者らが行った解析を紹介するのが、本論の目的である。[2,3]

2. たわむ板にはさまれた粘性流体のヘレ・シヨウ流

図3に示すように、下側の硬い板と、上側のたわむ板の間に粘性率 μ の流体が満たされ、上から圧力分布 $p_{ex}(x,y,t)$ がかけられたとしよう。それによって、流体層内に流れが生じるが、これが近似的にポアズイーユ流と仮定し、その向きや流速が変化するとする。すなわち、層内の流れをヘレ・シヨウ流と仮定する。

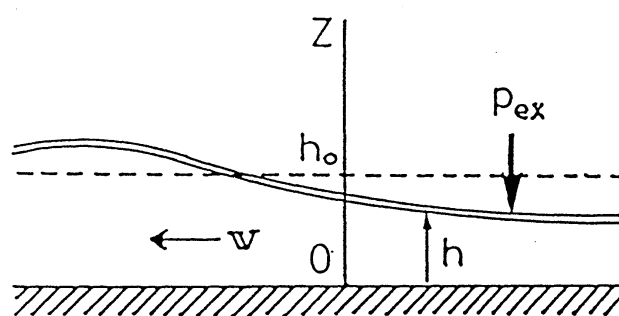


図3 ヘレ・シヨウ流の配置

このとき、流れを解析するための変数は、層内の圧力 $p(x,y,t)$ 、層の厚さ $h(x,y,t)$ 、水平方向の2次元流速 $v(x,y,t)$ である。これらは、たわむ板が弾性体か (Case I)、張力 T をかけられた膜であるか (Case II) によって、次のような方程式に従う。

$$v = -A \text{grad} p, \quad (A = h_0^2 / 12\mu, \quad h_0 \text{は平均厚さ}) \quad (2.1)$$

$$h / t = -\text{div} (h_0 v), \quad (2.2)$$

$$p - p_{ex} = B \Delta^2 h, \quad (\text{case I}) \quad (2.3)$$

$$p - p_{ex} = -T \Delta h. \quad (\text{case II}) \quad (2.4)$$

ただし、 B はヤング率、板の厚さ、ポアソン比を含む定数である。これらの方程式を、適当な初期条件、および境界条件の基で解けば、板の変形や層内の流れが決定できるはずである。

前節で述べた接触スイッチに関して、外部圧力が

$$\begin{aligned} p_{ex} = p_0 P &= p_0 \exp(-x^2/4L^2), & t > 0 \\ &= 0, & t < 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

という場合の近似解を与えておく。詳細は、文献[2]を参照されたい。 L は、圧力の水平スケールで、指の太さの程度である。

h の変動を、次のように無次元の関数 $H(x^*, y^*, t^*)$ で表す。 x^*, y^*, t^* は、それぞれ、 $L, L, L^6/h_0^3 AB$ で規格化した座標と時間である。

$$h = h_0 (1 + H) \quad (2.6)$$

上の方程式系から、 H は次の方程式を満たすことがわかる。

$$\partial H / \partial t^* = \Delta^3 H + G \Delta P, \quad G = L^4 p_0 / h_0 B \quad (2.7)$$

H の近似解として、

$$\begin{aligned} H &= [a(t^*) + b(t^*) x^{*2}/4] \exp(-x^{*2}/4), & (2.8) \\ a(t) &= -4/105 \cdot G (1 - \exp(-105 t^*/8)), \\ b(t^*) &= -2a(t^*) \end{aligned}$$

がある。これは、板が、指で押した所の両側に山を2つ持つ形に変形し、やがて止まるものであり、その緩和時間は

$$\tau \sim L^6 \mu (1 - \sigma^2) / h_0^3 E d^3 \quad (2.9)$$

で与えられる。実際のスイッチに関する値を代入すると、 τ は 10^{-2} 秒の程度である。これは、実際の値に近い。

3. ヘレ・シヨウ流中のダイレクターの分布

ダイレクターの向きが空間的に分布しているとき、弾性のエネルギーが生じる。また、外から電場がかけられていると、双極子のエネルギーが生じる。これらの和は、次のようなフランクの自由エネルギーで与えられる。[4]

$$F = K_1/2 \cdot (\nabla \mathbf{n})^2 + K_2/2 \cdot (\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{n})^2 + K_3/2 \cdot (\mathbf{n} \times \text{rot} \mathbf{n})^2 - \Delta \varepsilon / 2 \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}). \quad (3.1)$$

ただし、 K_1 , K_2 , K_3 は、弾性定数、 $\Delta \varepsilon$ は誘電率の異方性を表す。これから、ダイレクターの先端が受ける力 f の i 成分は、

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial n_i} - \frac{d}{dx_j} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial n_i}{\partial x_j} \right)} \right\} \quad (3.2)$$

で与えられる。一方、ダイレクターに働くトルクは、 $\mathbf{n} \times f$ である。

流れ場 \mathbf{u} があるとき、ダイレクターの先端は、流れから摩擦力を受ける。その i 成分は、次式で与えられる。

$$g_i = -\gamma_1 N_i - \gamma_2 n_j A_{ij}. \quad (3.3)$$

ここで、 γ_1 , γ_2 は摩擦係数、 N_i は周囲の流れの回転に相対的なダイレクターの回転速度で、次式で定義される。 A_{ij} は流れの変位速度テンソルである。

$$N_i = \frac{d n_i}{d t} - 1/2 \cdot (\text{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{n})_i. \quad (3.4)$$

ダイレクターの向きが定常な分布に落ちついたとき、流れとの摩擦力、および弾性エネルギーから来る力のモーメントつりあっている。このことを、上に導入した力、 f と g で表せば、次のようになる。

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{f} + \mathbf{g}) = 0. \quad (3.5)$$

式(3.2)、(3.3)を、式(3.5)に代入すれば、 \mathbf{n} を求める方程式が得られる。ここで、解析を簡単にするために、3つの弾性定数はみな値が等しいと仮定し、 K と表す。さらに、2つの摩擦係数も等しいと仮定し、 γ と表す。また、流速 u は、 x 方向に流れるポアズイーユ流と仮定する。すなわち、

$$u = G(d^2 - z^2) \quad (3.6)$$

すると、 \mathbf{n} は、 z のみに依存し、 x や y には依らない。そこで、 \mathbf{n} の表現として、図2に示すように、方位角 $\phi(z)$ 、 xy 面からの仰角 $\theta(z)$ を用いて、

$$\mathbf{n} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta). \quad (3.7)$$

これを式(3.5)に代入すると、 ϕ と θ に関する次のような連立方程式が得られる。

$$\phi' = C / \cos^2 \theta, \quad (C \text{は未定定数}) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \theta'' + (\phi'^2 + \Delta \varepsilon E^2 / K) \cos \theta \sin \theta \\ + 2Gz\gamma / K \cdot \sin^2 \theta \cos \phi = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

ただし、 z 座標は d で規格化した。ダツシュは z に関する微分である。これらの方程式を、次の境界条件のもとで解けばよい。

$$\begin{aligned} \theta(-1) = 0, \quad \theta(1) = 0 \\ \phi(-1) = 0, \quad \phi(1) = \pi/2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

ルンゲ・クッタ・ジル法を用いて解いた結果を、図4、5に示す。図中の E^* 、 G^* は、次式で定義され、それぞれ液晶の弾性に相対的な電場、流動の強さを表す無次元のパラメーターである。

$$E^* = \Delta \varepsilon E^2 / K, \quad G^* = G r / K \quad (3.11)$$

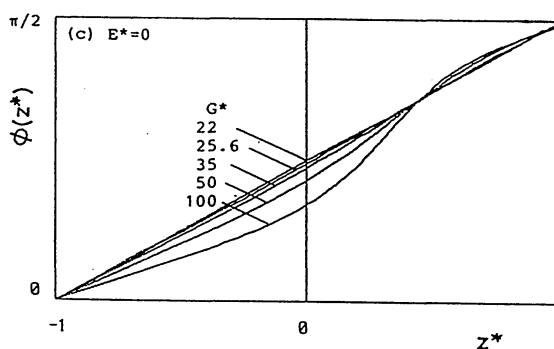
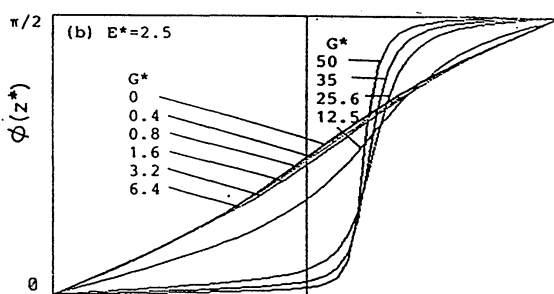
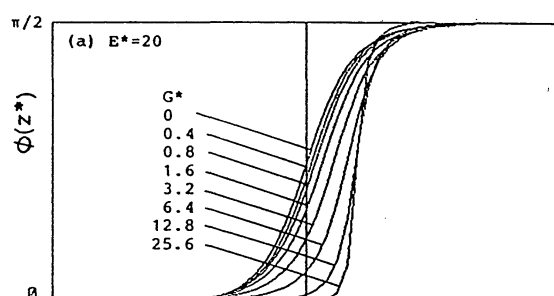
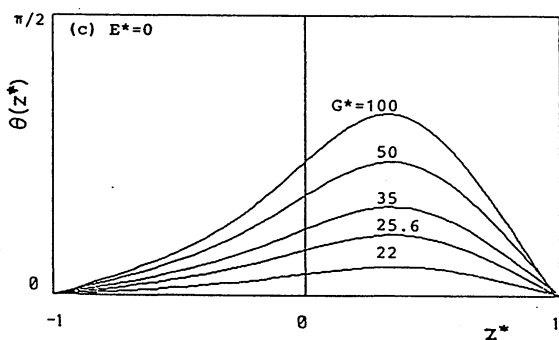
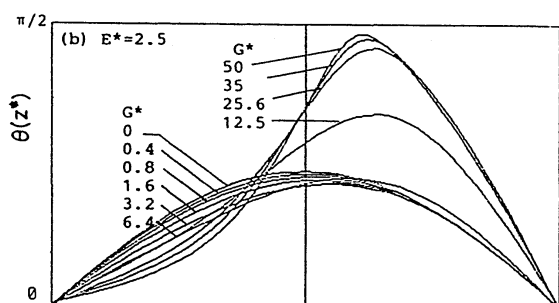
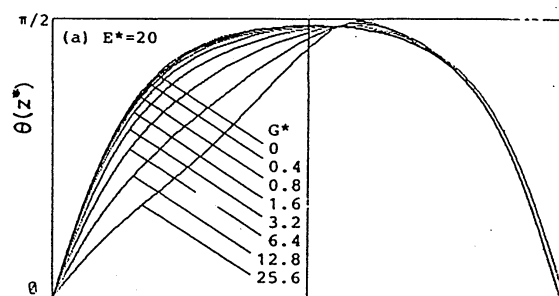


図4 仰角の分布

図5 方位角の分布

図4, 5から結論されることをいくつか述べよう。電場が0の場合、あるいは弱い場合には、流れがないと ($G^* = 0$) 仰角も0であり、方位角も均一の割合で増える。流れがあると、仰角が生じ、方位角の増加もある高さで突然起きるようになる。電場が強くなると、流れの影響は逆になり、流れがある方が仰角が小さくなる。方位角の変化は、それほど流れに影響されない。

流れがない場合は、すでに仰角や方位角が計算されている。[5] それは、上の結果で流れがない場合とよく一致していることを注意しておく。

4. 流れによる電気容量の変化

上に述べたように、流れがあると仰角が影響を受け、そのために誘電率の異方性を通して、電気容量が変化する。ダイレクターと平行、垂直な方向の誘電率を、それぞれ ϵ_{\parallel} 、 ϵ_{\perp} とし、 $\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp} = \Delta\epsilon$ とする。液晶を間にはさんだコンデンサーの電気容量は、コンデンサーの直列接続の公式を適用して、次式で与えられる。

$$C = 2C_0 \left[\int_{-1}^1 (1 + \Delta\epsilon \cdot \sin^2 \theta / \epsilon_{\perp})^{-1} dz \right]^{-1}. \quad (3.12)$$

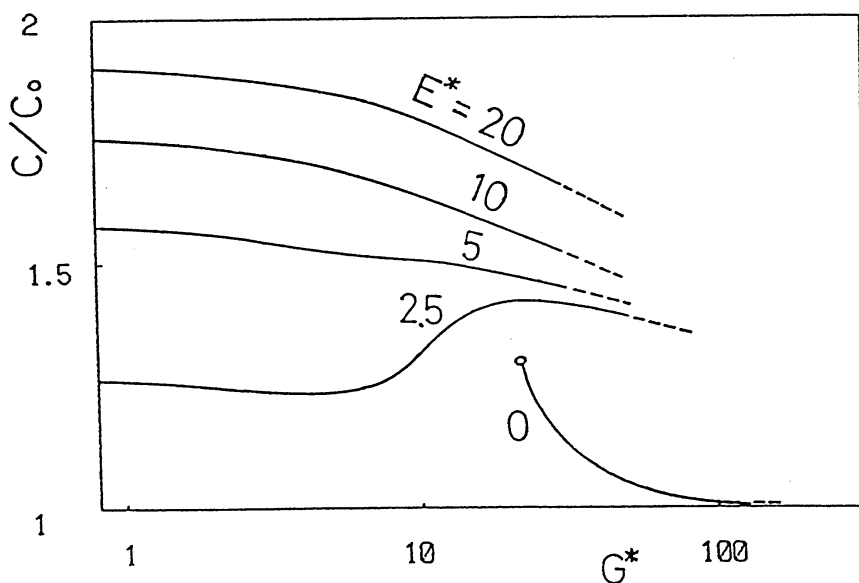


図6 流れの強さと電気容量の関係

ただし、 C_0 は、仰角が0の場合の電気容量である。この式を用いて求めた、流れの強さと電気容量の変化の関係を、図6に示す。電場が強い場合、流れの影響で電気容量が数%減少することがわかる。この傾向は、実験結果と一致している。[1] また、電場がない場合、ある程度流れが強いと ($G^* > 20$ の場合に)、突然仰角が生じ、電気容量が増加することもわかる。ただし、後者の結果は、実験では確認されていない。

5. おわりに

液晶の挙動の問題には、流体力学によって研究されるものが多い。本論で述べたのは、その1例である。

液晶の流動を支配する方程式は、かなり複雑で、解析が厄介である。その主な原因は、粘性率や誘電率などの物性が、非等方であることからくる。その反面、多くの問題は微少な電子素子中で起きるので、流体に特有の慣性効果はほとんど無視できる。将来の電子技術の発達を考えると、この分野で流体力学者がもっと活躍すべきと思われる。本論がその刺激になれば幸いである。最後に、最近の入門書を一つ挙げておこう。[6]

参考文献

- [1] T. Tanaka and S. Kobayashi: Society for Information Display 1986 Int. Symp. Digest of Papers 7 (1986)318.
- [2] R. Takaki: J. Phys. Soc. Jpn. 54 (1985)8.
- [3] R. Takaki and S. Kobayashi: Jap. J. Appl. Phys. 27 (1988)L1793.
- [4] P.G. de Gennes: The Physics of Liquid Crystals (Clarendon Press, Oxford 1974) Chap . 5.
- [5] D.W. Berreman: Appl. Phys. Lett. 25 (1974)12.
- [6] 岡野光治、小林駿介: 「液晶・基礎編、応用編」(培風館,1985).