

# On a Local Regularity Result for a Minimizer of a Functional with Exponential Growth

名古屋大学・理学部 内藤 久資 (Hisashi NAITO)

## 1. Introduction.

ここでは  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) 内の有界領域  $\Omega$  上で定義された  $\mathbb{R}^m$ -valued function に対して, 汎関数

$$E(u) = \int_{\Omega} e^{|\nabla u|^2} dx$$

を考える.

このような問題を考える動機は以下のようなものである. より一般に, compact Riemann 多様体  $(M, g)$ ,  $(N, h)$  の間の写像  $u: M \rightarrow N$  に対して, 汎関数

$$E_p(u) = \int_M |\nabla u|^p dx$$

を考える. この問題に関して, Hardt-Lin [3] は (適当な class で) minimizer の存在と, その partial regularity を証明している. 汎関数  $E_p$  の minimizer は  $[p] + 1 > \dim M$  のとき  $M$  上で smooth であり,  $[p] + 1 \leq \dim M$  のときは,  $(\dim M - [p] - 1)$ -次元 Hausdorff measure が有界な集合を除いたところで smooth であることがわかる. 特に,  $p = 2$  のときは汎関数  $E_p$  はよく知られた harmonic map の汎関数であり, その regularity に関しては,  $\dim M = 2$  のとき, Sacks-Uhlenbeck [5] によって,  $\dim M \geq 3$  のときは Schoen-Uhlenbeck [6] によって調べられている. したがって, はじめに述べたようなより速い growth を持つ汎関数では, 定義域上全体での regularity を期待することができる.

また汎関数  $E$  を  $S^1$  から Riemann 多様体への写像に対して考えてみると, その critical point は constant speed の測地線であることがわかる. すなわち, 汎関数  $E_2$  を考えたときと同じ geometric object が critical point として現れていることに注意しよう.

この問題に関して, 最近次のような結果が得られている.

**Theorem 1.1** (Éells-Lemaire [1]).  $\mathbb{R}^n$  内の strictly convex な領域上の real-valued function に対する汎関数  $E$  は, 与えられた smooth な境界値  $\varphi_0$  に対して, smooth な  $E$ -minimizer  $\varphi$  with  $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$  が存在する.

この解説での主結果は, 上の結果を (local) に vector-valued に拡張する. ここでは考える関数空間は Orlicz space ではなく, より自然な空間  $W = \bigcap_{1 < p < \infty} W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  で考える. 以下, 関数空間  $B$ ,

$W_g$  を

$$B := \bigcap_{1 < p < \infty} W^{1-1/p, p}(\partial\Omega, \mathbb{R}^m),$$

$$W_g := \left\{ u \in \bigcap_{1 < p < \infty} W^{1, p}(\Omega, \mathbb{R}^m) : u|_{\partial\Omega} = g \right\}, \quad \text{for } g \in B$$

と定義する. このとき, 定理は次のように述べられる.

**Theorem 1.2** [4]. 任意の  $g \in B$  に対して,  $W_g$  のなかに unique な minimizer  $u$  が存在して,  $B_r(a) \subset \Omega$  ならば,  $u$  は  $B_r(a)$  上 Hölder continuous である.

先に述べた汎関数  $E_p$  が  $p > 2$  のときに, degenerate elliptic な変分問題, すなわち, その Euler-Lagrange 方程式が degenerate elliptic となる問題であったのに対して, この問題は, strongly elliptic ではあるが, uniformly elliptic にはなっていない. このことが, この問題の困難さである.

最後に, この問題は Warwick 大学の J. Eells 教授に suggest されたものであることを記しておく.

## 2. Existence of minimizers.

はじめに, 汎関数  $E$  の minimizer の存在について簡単に述べておく. 与えられた境界値  $g \in B$  に対して, Hilbert space  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  の convex subspace  $X_g$  を

$$X_g := \{ u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^m) : u|_{\partial\Omega} = g \}$$

と定義する. このとき, 汎関数  $E$  は  $X_g$  上 strongly convex, coersive かつ weakly lower semi-continuous であることから, unique な  $E$ -minimizer を  $X_g$  のなかに持つことがわかる. 更に簡単な考察により,  $X_g$  での  $E$ -minimizer は  $W_g$  に属し, それは  $W_g$  における  $E$ -minimizer であることがわかる. したがって, 次の定理を得ることができる.

**Theorem 2.1.** 任意の  $g \in B$  に対して,  $W_g$  のなかに unique な  $E$ -minimizer が存在する.

## 3. Regularity of minimizers.

この問題の困難さは Introduction にも述べた通り, uniformly elliptic でないことである. そのために, 少々複雑な手順で Moser の iteration を使う. 始めに, monotonicity formula を示しておこう.

**Lemma 3.1.** 汎関数  $E$  の minimizer  $u$  に対して,  $B_R(a) \subset \Omega$  であれば, 関数

$$r^{-n} \int_{B_r(a)} e^{|\nabla u|^2} dx$$

は  $[0, R]$  で non-decreasing である.

**Proof.** ここでは, Hardt-Lin [3] にしたがって,  $0 < r < s < R$ ,  $0 < t < \frac{r+s}{r}$  に対して, 摂動  $\theta_t$  を

$$\theta_t(x) := \begin{cases} tx & \text{for } 0 < |x| < r \\ \frac{1}{s-t} \{(1-t)|x| + (ts-r)\}x & \text{for } r \leq |x| < s \\ x & \text{for } s \geq |x| \end{cases}$$

と定義する. このとき,  $u \circ \theta_t^{-1} \in W$  かつ  $B_s(a)$  の外側では  $u \circ \theta_t^{-1} = u$  であるから,

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{B_s} e^{|\nabla(u \circ \theta_t^{-1})|^2} dx \right|_{t=1} = 0$$

が成り立つ. これより, 簡単な計算によって

$$n \int_{B_r} e^{|\nabla u|^2} dx - r \frac{d}{dr} \int_{B_r} e^{|\nabla u|^2} dx + 2r \int_{\partial B_r} e^{|\nabla u|^2} |\nabla_\tau u|^2 dS \geq 0$$

を得る. ここで,  $\nabla_\tau$  は ball  $B_r(a)$  の半径方向に関する微分である. これを  $r$  に関して積分することにより,

$$\frac{d}{dr} \left[ r^{-n} \int_{B_r} e^{|\nabla u|^2} dx \right] \geq 2r^{-n} \int_{\partial B_r} e^{|\nabla u|^2} |\nabla_\tau u|^2 dS \geq 0$$

が成り立つ. ■

以下では monotonicity formula を使って, Moser の方法によって regularity を示す outline を紹介する. その時に, よく知られたように  $n = 2$  の場合と  $n \geq 3$  の場合では証明が微妙に異なるので, ここでは  $n \geq 3$  の場合のみ記すことにする. もちろん,  $n = 2$  の場合も同様にして証明できる.

**Lemma 3.2.** 領域  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$ , ( $n \geq 3$ ) の有界領域であるとする. 汎関数  $E$  の  $W_g$  における minimizer  $u$  に対して,  $B_r(a) \subset \Omega$  ならば,  $r$  によらない定数  $C$  と, ある  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n)$  が存在して,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  であれば,

$$\left( r^{-n} \int_{B_{r/2}(a)} e^{(1+\varepsilon)|\nabla u|^2} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \left( r^{-n} \int_{B_r(a)} e^{|\nabla u|^2} dx \right)^{\frac{(1+\varepsilon)(n-2)+1}{2n}}$$

が成り立つ. 特に

$$r^{-n} \int_{B_{r/2}} e^{(1+\varepsilon)|\nabla u|^2} dx$$

は有界.

**Proof.** いま  $E$ -minimizer  $u$  は汎関数  $E$  の Euler-Lagrange 方程式を weak な意味でみたすことがわかる:

$$\int_{\Omega} \nabla_i u^\alpha \nabla_i v^\alpha e^{|\nabla u|^2} dx = 0, \quad \text{for all } v \in C_0^\infty(\Omega).$$

ここで, test function  $v$  を  $\nabla_k v$  に置き換え,  $v^\alpha := \nabla_k u^\alpha w^{\gamma/2} \eta^2$ ,  $w = e^{|\nabla u|^2}$  とおき,  $\gamma < 0$  を  $\gamma > \max\{-1, -4/n\}$  として計算すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_r} (\nabla_k \nabla_i u + \nabla_i u \nabla_k |\nabla u|^2) \nabla_i \nabla_k u w^{\gamma/2+1} \eta^2 dx \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} \int_{B_r} (\nabla_k \nabla_i u + \nabla_i u \nabla_k |\nabla u|^2) \nabla_k u \nabla_i |\nabla u|^2 w^{\gamma/2+1} \eta^2 dx \\ &\quad + 2 \int_{B_r} (\nabla_k \nabla_i u + \nabla_i u \nabla_k |\nabla u|^2) \nabla_k u w^{\gamma/2+1} \nabla_i \eta \eta dx \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,  $\nabla_i u \nabla_i |\nabla u|^2 = -\Delta u$  を使えば,

$$(\text{第1項}) + (\text{第2項}) = \int_{B_r} (|\nabla^2 u|^2 + \frac{\gamma}{2} |\Delta u|^2) w^{\gamma/2+1} \eta^2 dx + \frac{1}{2} (1 + \frac{\gamma}{2}) \int_{B_r} |\nabla |\nabla u|^2|^2 w^{\gamma/2+1} \eta^2 dx$$

を得るが,  $0 > \gamma > \max\{-1, -4/n\}$  を使って, 下から

$$(\text{第1項}) + (\text{第2項}) \geq \frac{1}{2} (1 + \frac{\gamma}{2}) \int_{B_r} |\nabla |\nabla u|^2|^2 w^{\gamma/2+1} \eta^2 dx$$

で評価できる.

一方, 第3項は

$$|(\text{第3項})| \leq C \int_{B_r} (1 + |\nabla u|^2) |\nabla |\nabla u|^2| |\nabla \eta| \eta w^{\gamma/2+1} dx$$

と評価できるが,  $x \geq 0, \delta > 0$  に対して,  $x e^x \leq \frac{1}{\delta} e^{1+\delta} x$  であることを使って,

$$\frac{C}{\delta} \int_{B_r} |\nabla |\nabla u|^2| |\nabla \eta|^2 \eta w^{\gamma/2+1+\delta} dx$$

と評価できる.

したがって,

$$\int_{B_r} |\nabla |\nabla u|^2|^2 w^{\gamma/2+1} \eta^2 dx \leq \frac{C}{\delta} \int_{B_r} |\nabla |\nabla u|^2| \eta \cdot |\nabla \eta| w^{\gamma/2+1+\delta} dx$$

が成り立つ. ここで, 相加相乗の不等式, Hölder の不等式を使って,  $\frac{\gamma}{2} + 1 + 2\delta = 1$  となる  $\delta > 0$  をとれば, ある定数  $C = C(n)$  が存在して,

$$\int_{B_r} |\nabla w^{(\gamma/2+1)/2}|^2 \eta^2 dx \leq C \int_{B_r} w^{\gamma/4+1} |\nabla \eta|^2 dx$$

が成り立つ。Sobolev のうめこみ定理を使えば,

$$\left( r^{-n} \int_{B_{r/2}} w^{(\gamma/2+1)\frac{n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C r^{-n} \int_{B_r} w^{\gamma/4+1} dx$$

が成り立つ。したがって,  $\varepsilon_0 + 1 = (\gamma/2 + 1) \frac{n}{n-2}$  とおけば, もう一度, Hölder の不等式を使って,

$$\left( r^{-n} \int_{B_{r/2}} e^{(\varepsilon_0+1)|\nabla u|^2} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \left( r^{-n} \int_{B_r} e^{|\nabla u|^2} dx \right)^{\frac{(1+\varepsilon)(n-2)+1}{2n}}$$

を得る.

更に Lemma 3.1 を使えば,

$$r^{-n} \int_{B_r} e^{|\nabla u|^2} dx$$

は  $d = \text{dist}(\partial\Omega, a)$ ,  $n$ ,  $E_0 = \int_{\Omega} e^{|\nabla u|^2} dx$  だけによる定数によって bound される. ■

**Lemma 3.3.** Lemma 3.2 と同じ仮定のもと, 任意の  $\gamma > 1$ ,  $\varepsilon > 0$  に対して,  $r$  によらない定数  $C$  が存在して,

$$\left( r^{-n} \int_{B_r} (e^{\gamma|\nabla u|^2} \eta)^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C r^{-n} \int_{B_r} e^{(\gamma+\varepsilon)|\nabla u|^2} dx$$

が成り立つ. ここで,  $\eta$  は  $B_r$  に support を持つ cutoff function である.

証明は, Lemma 3.2 と同様にすればよい.

Lemmas 3.2, 3.3 だけでは iteration argument を行なうことはできない. これらによってわかったことは, 任意の有限な  $q > 1$  に対して,

$$r^{-n} \int_{B_{r/2}} e^{q|\nabla u|^2} dx < C$$

がわかっただけである.

さらに次を示すことができる.

**Lemma 3.4.** Lemma 3.2 と同じ仮定のもとで,  $r$  によらない定数  $C$  が存在して, 任意の  $\alpha > 2$  に対して,

$$\left( r^{-n} \int_{B_{r/2}} (1 + |\nabla u|^2)^{\alpha \frac{n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \left( r^{-n} \int_{B_r} (1 + |\nabla u|^2)^{\alpha p} dx \right)^{1/p}$$

が成り立つ。ここで,  $p$  は  $1 < p < \frac{n}{n-2}$  をみताす。

**Proof.** Lemma 3.2 と同様にして,  $w = 1 + |\nabla u|^2$  に対して,

$$\left( r^{-n} \int_{B_{r/2}} w^{\gamma \frac{n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C r^{-n} \int_{B_r} w^\gamma e^{|\nabla u|^2} dx$$

を示すことができる。ここで, 右辺に Hölder の不等式を使うと,

$$\left( r^{-n} \int_{B_{r/2}} w^{\gamma \frac{n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \left( r^{-n} \int_{B_r} w^{p\gamma} dx \right)^{1/p} \left( r^{-n} \int_{B_r} e^{q|\nabla u|^2} dx \right)^{1/q}$$

を得る。ここで, Lemma 3.2, Lemma 3.3 の結論を使えば, 求める結果を得る。 ■

この Lemma を使えば, iteration argument を実行することができる。

**Lemma 3.4.** Lemma 3.2 と同じ仮定のもとに,  $B_{4r}(a) \subset \Omega$  ならば,  $r$  によらない定数  $C$  が存在して

$$\sup_{B_r(a)} |\nabla u|^2 \leq C$$

が成り立つ。

この gradient の bound を利用して,  $\nabla u$  が Hölder 連続であることを示そう。そのためには, 次の Lemma が本質的である。

**Lemma 3.5.** いま,  $B_{R_0}(a) \subset \Omega$ ,  $0 < r < R_0/4$  と仮定する。このとき, constant vector  $V \in \mathbb{R}^{nm}$  で,

$$|V| \leq \sup_{B_{R_0}} |\nabla u|$$

をみたすものに対して,  $r$  によらない定数  $C$  と, ある constant vector  $V_\sigma \in \mathbb{R}^{nm}$  ( $0 < \sigma < 1/2$ ) が存在して,

$$\begin{aligned} |V_\sigma| &\leq \sup_{B_{R_0}} |\nabla u|, \\ \int_{B_{\sigma r}} |\nabla u - V_\sigma|^2 dx &\leq C \sigma^{n+2} \int_{B_r} |\nabla u - V|^2 dx + C \sigma^n \int_{B_r} |\nabla u - V|^2 dx \end{aligned}$$

を満たす。

**Proof.** これは実際に  $V_\sigma$  を決めればよい。  $v: B_r \rightarrow \mathbb{R}^m$  を,  $B_r$  上  $v = u$  となる  $\Delta v = 0$  の  $H^1$ -solution とし,  $V_\sigma$  を, その  $B_{\sigma r}$  上での平均値とすればよい。 ■

**Lemma 3.6.**  $B_{R_0}(a) \subset \Omega$  ならば, 汎関数  $E$  の minimizer  $u$  は  $0 < r < R_0$  に対して,  $r$  によらない定数  $C$  が存在して,

$$\int_{B_r(a)} |\nabla u - U_r|^2 dx \leq Cr^{n+2\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

をみたす.

**Proof.** Lemma 3.5 によって,  $\sigma > 0$  をうまく選んで, 以下が成り立つようにできる.

$$r_i := \sigma^i \cdot r, \quad B_i := B_{r_i}$$

とおいたとき, constant vectors  $W_0, W_1, \dots, W_k$  に対して  $W_i \leq \sup_{B_{R_0}} |\nabla u|$  ならば,

$$\begin{aligned} W_0 &:= U_r \\ |W_{i+1}| &\leq \sup_{B_{R_0}} |\nabla u| \\ r_{i+1}^{-n} \int_{B_{i+1}} |\nabla u - W_{i+1}|^2 dx &\leq C\sigma^2 r_i^{-n} \int_{B_i} |\nabla u - W_i|^2 dx + C \end{aligned}$$

が成り立つ. この操作を繰り返せば, constant vectors  $\{W_i\}_{i \geq 0}$  が存在して, 上の主張が満たされること  
がわかる. したがって, 平均値  $U_r$  は, 積分  $\int_{B_r} |\nabla u - c|^2 dx$  を minimize することから, ある  $C_0 < 1$   
が存在して, 任意の  $0 < \rho < r < R_0/4$  に対して,

$$r^{-n} \int_{B_\rho} |\nabla u - U_\rho|^2 dx \leq C_0 r^{-n} \int_{B_r} |\nabla u - U_r|^2 dx + C_1$$

を満たすことがわかる. このことから Lemma の主張が従う. ■

**References.**

- [1] J. Eells and L. Lemaire, Private communication.
- [2] M. Giaquinta, "Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Analysis," Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1983.
- [3] R. Hardt and F. H. Lin, *Mappings minimizing the  $L^p$ -norm of the gradient*, Commun. Pure and Appl. Math. **40** (1987), 555-588.
- [4] H. Naito, *On a local Hölder continuity for a minimizer of a certain functional*, preprint.
- [5] J. Sacks and K. Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. of Math. **113** (1981), 1-24.
- [6] R. Schoen and K. Uhlenbeck, *A regularity theory for harmonic maps*, J. Differential Geometry **18** (1982), 307-335.