数理解析研究所講究録
第 778 巻 1992 年 26-35

Extension of Jones' projections

京都大学 理学部 桜本 篤司

II_1型因子環の指数理論は１９８３年に Jones により創始され、その後大きな発展を遂げているが、それは指数理論が作用素環論内部だけでなく、その他のさまざまな分野とも密接な関わりがある事によるものであろう。ここでは、指数理論において重要な役割を果たす Jones' projection に対し、その拡張を考える。

§0 準備

指数 (index) 理論は、II_1型因子環以外にも III 型因子環や C^*環でも定義されているがここでは、II_1型因子環のみを対象とする。II_1型因子環とは、unique normalized faithful trace を持つ無限次元の von Neumann 環の事である。

Definition (Jones). *MをII_1型因子環、Nをその部分因子環とする。MのNに対する指数$[M:N]$を*

$$[M:N] = dim_N L^2(M)$$
$$= \begin{cases} tr_{N'}(e_N)^{-1}, & \textit{if } N' \textit{ is finite,} \\ \infty & \textit{if } N' \textit{ is infinite,} \end{cases}$$

により定義する。但し、$L^2(M)$ は Mの normalized faithful trace により定義される Mの内積で Mを完備化したもの、$e_{N'}$は $L^2(M)$ から$\overline{N}$への projection 、$tr_{N'}$ は N'の normalized faithful trace とする。

また、II_1型因子環の組 $M \supset N$からさらに大きなII_1型因子環$< M, e_{N'} >$を構成することを basic construction と言い、この時 $[< M, e_{N'} >: M] = [M:N]$ が成り立っている。指数には、以下の様に群の指数と同様の性質がある。

Proposition (Jones). *$L \supset M \supset N$をそれぞれII_1型因子環とする。この時、*
(i) $[M:N] = 1$ if and only if $M = N$,
(ii) $[L:N] = [L:M][M:N]$.

しかし、II_1型因子環の指数のとる値は自然数だけではなく、さらにその値の集合は、4を境に違った性質を見せている。

Theorem (Jones). II_1型因子環Mに対して、

$\mathcal{C}_M = \{[M:N]; M \supset N : II_1$型因子環$\}$,

$\mathcal{I}_M = \{[M:N]; M \supset N : II_1$型部分因子環$, N' \cap M = \mathbb{C}\}$,

と定める。この時、

$\mathcal{C}_R = \{4\cos^2(\pi/n); n \geq 3\} \cup [4,\infty) \cup \{\infty\}$,

$\mathcal{I}_R \cap (0,4) = \{4\cos^2(\pi/n); n \geq 3\}$,

$\mathcal{C}_M \subset \mathcal{C}_R$,

ただし、Rは$AFDII_1$型因子環とする。

§1 Jones' projection

$M_1 \supset M_0$をII_1型因子環, その部分因子環で、index が λ^{-1} となるものとする。$M_0 \subset M_1$から出発して basic construction を続け、$i \in \mathbb{N}$ に対し $e_i = e_{M_{i-1}}$, $M_i = < M_{i-1}, e_{i-1} >$ と置く。この時、$M = \overline{\cup_{i \in \mathbb{N}} M_i}^{(uw)}$は$\mathrm{II}_1$型因子環となり、$tr$を その normalized trace とすると、projection の列 $\{e_i\,;\, i = 1,2,\ldots\} \subset M$ は次の関係式を満たす

(a) $e_i e_{i\pm1} e_i = \lambda e_i \quad (i \in \mathbb{N})$

(b) $e_i e_j = e_j e_i \quad (|i-j| \geq 2)$

(c) $tr(\omega_1\omega_2) = tr(\omega_1)tr(\omega_2)$

$(\omega_1$: word in $1, e_1, \cdots, e_m$, ω_2: word in $e_{m+1}, \cdots, e_{m+n})$

この関係式 (a),(b),(c) を満たす projection の列$\{e_i\,;\, i = 1,2,\ldots\}$を Jones' projection と呼ぶ。ここで、$A = \{e_i\,;\, i = 1,2,\ldots\}''$, $B = \{e_i\,;\, i = 2,3,\ldots\}''$ と置くと、A, Bは 共に II_1型因子環となり、その index は λ^{-1} となる。さらに、relative commutant $B' \cap A$ は、$\lambda^{-1} < 4$ の時に限り trivial となる。

§2 Jones' projection の拡張

ここでは、Jones' relation のうち (a) を拡張し、以下の条件を満たす non-zero projection の列 $\{e_i\,;\, i = 0,1,2,\ldots\} \subset M$を考える。(但し、以下では$\lambda^{-1} = 4\cos^2(\pi/(n+2)), (n \geq 1)$ とする)

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{a}_1') & e_ie_{i+1}e_i = \lambda e_i \quad (i \in \mathbb{N}) \\
(\mathrm{a}_2') & e_ie_{i-1}e_i = \begin{cases} \lambda e_i & i \geq 2 \\ \alpha e_1 & i = 1 \end{cases} \\
(\mathrm{b}') & e_ie_j = e_je_i \quad (|i-j| \geq 2) \\
(\mathrm{c}') & tr(\omega_1\omega_2) = tr(\omega_1)tr(\omega_2) \\
 & (\omega_1\text{: word in } 1, e_0, \ldots, e_m,\ \ \omega_2\text{: word in } e_{m+1}, \ldots, e_{m+n})
\end{array}
$$

すると、

Theorem (Popa). *Mを有限型 von Neumann 環、tr をその normalized faithful trace とし、$\{e_i\ ;\ i = 0,1,2,\ldots\} \subset M$を、(a$_2'$),(b$'$),(c$'$) を満たす projection の列とする。*

この時、$\lambda^{-1} = 4\cos^2(\pi/(n+2))$, $(n \geq 1)$ ならば

$$\alpha \in \{0\} \cup \{\lambda P_{k-1}(\lambda)/P_k(\lambda)\ ;\ 0 \leq k \leq n-1\}.$$

但し、$P_{-1}(\lambda) = P_0(\lambda) = 1, P_{k+1}(\lambda) = P_k(\lambda) - \lambda P_{k-1}(\lambda), (k > 0)$.

より、αの値は λ によって限定され $\alpha \in \{\lambda P_{k-1}(\lambda)/P_k(\lambda)\ ;\ 0 \leq k \leq n-1\}$ となる。一方、

Theorem (Popa). *$M \supset N$をII_1型因子環, 部分因子環とし、その指数を λ^{-1} とする。ここで、$\Lambda(M,N) \equiv \{\alpha \in \mathbb{R}\ ;\ \exists f \in N$ projection s.t. $E_N(f) = \alpha 1_N\}$ とおくと、$\lambda^{-1} = 4\cos^2(\pi/(n+2))$, $(n \geq 1)$ ならば*

$$\Lambda(M,N) = \{0\} \cup \{\lambda P_{k-1}(\lambda)/P_k(\lambda)\ ;\ 0 \leq k \leq n-1\}.$$

より、任意の $\alpha \in \{\lambda P_{k-1}(\lambda)/P_k(\lambda)\ ;\ 0 \leq k \leq n-1\}$ に対し、(a$_1'$),(a$_2'$),(b$'$),(c$'$) を満たす projection の列 $\{e_i\ ;\ i = 0,1,2,\ldots\} \subset M$が存在することがわかる。実際、$M_1 \supset M_0$を$\mathrm{II}_1$型因子環, その部分因子環で、index が λ^{-1} となるものとし、e_i , M_i , Mを §1 で述べたように構成する。さらに、$E_N(f) = \alpha 1_N$となる projection $f \in N$を e_0とおくと、$e_1e_0e_1 = E_N(e_0)e_1 = \alpha e_1$より、projection の列 $\{e_i\ ;\ i = 0,1,2,\ldots\} \subset M$は (a$_1'$),(a$_2'$),(b$'$),(c$'$) を満たす。以上のことから、次がわかる。

Theorem 1. *MをII_1型因子環とし、$\lambda^{-1} = 4\cos^2(\pi/(n+2))$, $(n \geq 1)$ とする。この時、*

$(a_1'),(a_2'),(b'),(c')$を満たす projection の列 $\{e_i \ ; i = 0, 1, 2, \dots\} \subset M$ が存在する
$\Leftrightarrow \alpha \in \{\lambda P_{k-1}(\lambda)/P_k(\lambda) \ ; 0 \le k \le n-1\}$.

次に、$\{e_i \ ; i = 1, 2, \dots\} \subset M$に上の e_0の様な projection をいくつかつけ加えたもの、つまり、次の条件を満たす projection の系 $\{e_i, f_j \ ; i \in \mathbb{N}, 1 \le j \le m\} \subset M$を考える。

(R-1) $e_i e_{i+1} e_i = \lambda e_i \quad (i \in \mathbb{N})$
(R-2) $e_i e_{i-1} e_i = \lambda e_i \quad (i \in \mathbb{N})$
$e_1 f_j e_1 = \alpha_j e_1 \quad (1 \le j \le m)$
(R-3) $e_i e_j = e_j e_i \quad (|i-j| \ge 2)$
$e_i f_j = f_j e_i \quad (i \ge 2 \,, 1 \le j \le m)$
(R-4) $tr(\omega_1 \omega_2) = tr(\omega_1) tr(\omega_2)$
(ω_1: word in $1, f_1, \dots, f_m, e_1, \dots, e_n$,
ω_2: word in $e_{n+1}, \dots, e_{n+p}$)
(R-5) $\sum_{j=1}^{m} f_j = 1$

上の (R-1)～(R-5) を満たす projection の系 $\{e_i, f_j \ ; i \in \mathbb{N}, 1 \le j \le m\}$ を Extended Jones' projections と呼ぶ。

ここで、$\alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots \le \alpha_m$とし、$\lambda_k = \lambda P_{k-1}(\lambda)/P_k(\lambda)$ $(0 \le k \le n-1)$ とおく。すると、$\lambda = \lambda_0 \le \lambda_1 \le \dots \le \lambda_{n-1}$となり、$\lambda^{-1} = 4\cos^2(\pi/(n+2))$ の時、$\lambda_k = \sin(k+1)\theta_n/(2\cos\theta_n \sin(k+2)\theta_n)$ $(\theta_n = \pi/(n+2))$ となる。また、$e_0 = f_j$とおくと、projection の列 $\{e_i \ ; i = 0, 1, 2, \dots\} \subset M$は $(a_1'),(a_2'),(b'),(c')$ を満たすから、Theorem 1 より$\alpha_j \in \{\lambda_k \ ; 0 \le k \le n-1\}$ となる。

Extended Jones' projections が存在するための必要十分条件は次で与えられる。

Theorem 2. *Mを II_1型因子環とする。この時、*

Extended Jones' projections $\{e_i, f_j \ ; i = 1, 2, \dots, 1 \le j \le m\} \subset M$が存在する

$$\Leftrightarrow (n; \alpha_1, \dots, \alpha_m) = (n; \lambda_k, \lambda_{n-k-2}) \ (0 \le k \le [\tfrac{n-2}{2}] \,, n \ge 2),$$
$$(2k; \lambda_0, \lambda_0, \lambda_{k-2}) \ (k \ge 2),$$
$$(10; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_1), \ (16; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2), \ (28; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_3).$$

必要条件については、

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1\ ,\ \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_m,$$
$$\alpha_j \in \{\sin{(k+1)\theta_n}/(2\cos\theta_n \sin{(k+2)\theta_n});\ 0 < k < n-1\}$$

から、計算によりわかる。存在については、§3 で String algebra を用いて示す。また、Extended Jones' projections を $(n;\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ の値によって次のように分類する。

$$\begin{array}{ll}
(n;\lambda_k,\lambda_{n-k-2}) & \cdots\ \text{A型} \\
(2k;\lambda_0,\lambda_0,\lambda_{k-2}) & \cdots\ \text{D型} \\
(10;\lambda_0,\lambda_1,\lambda_1) & \cdots\ \text{E}_6\text{型} \\
(16;\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2) & \cdots\ \text{E}_7\text{型} \\
(28;\lambda_0,\lambda_1,\lambda_3) & \cdots\ \text{E}_8\text{型}
\end{array}$$

§3 Extended Jones' projections の構成

ここでは、String algebra を用いて Extended Jones' projections を構成する。

G を distinguished vertex $*$ を持つ、unoriented bipartite graph とし、μ を harmonic weight (β: eigenvalue) とする。ここで、$n \in \mathbb{N}$ に対し

$$Path_x^{(n)} \equiv \{\xi\ path;\ s(\xi) = x,\ |\xi| = n\} \quad x \in G_{(0)}$$
$$String_*^{(n)} \equiv \{\rho = (\xi,\eta);\ \xi,\ \eta \in Path_*^{(n)},\ r(\xi) = r(\eta)\}$$
$$H_n \equiv Path_*^{(n)}\text{を}\ C.O.N.S\text{とする}\ Hilbert\ space$$

但し、$s(\xi)$: ξの始点 $r(\xi)$: ξの終点 $|\xi|$: ξの長さ

と定め、H_n 上に $String_*^{(n)}$ を

$$(\rho_+,\rho_-)\xi = \delta(\rho_-,\xi)\rho_+ \qquad (\ (\rho_+,\rho_-) \in String_*^{(n)},\ \xi \in Path_*^{(n)}\ )$$

により作用させる。そして、$String_*^{(n)}$から生成される von Neumann algebra を A_nと置く。この時、

$$e_n \equiv \beta^{-1} \sum_{\alpha \in Path_*^{(n-1)}} \sum_{\xi,\eta \in Path_{r(\alpha)}^{(1)}} \frac{\sqrt{\mu(r(\xi))\mu(r(\eta))}}{\mu(r(\alpha))} (\alpha\circ\xi\circ\tilde{\xi},\ \alpha\circ\eta\circ\tilde{\eta}) \in A_{n+1}$$

但し、$\tilde{\xi}$: ξの向きを逆にした path, $\alpha \circ \xi$: αの後にξをつなげた path

と定義すると、projection の列 $\{e_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ には次の関係がある。

THEOREM (OCNEANU). e_n, βは上の通りとし、$A_\infty = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, tr を μ によって定まる A_∞ 上の $trace$ とする。この時、

(a) $e_n e_{n\pm1} e_n = \beta^{-2} e_n \quad (n \in \mathbb{N})$
(b) $e_n e_m = e_m e_n \qquad (|n-m| \geq 2)$
(c) $tr(\omega_1\omega_2) = tr(\omega_1) tr(\omega_2)$
$(\omega_1$: word in $1, e_1, \cdots, e_m$, ω_2: word in $e_{m+1}, \cdots, e_{m+n})$

次に、projection f_j を構成する。
$Path^{(1)}_{*,x} \neq \phi$ となる $x \in G^{(0)}$ に対し projection f_x を次で定義する。

$$f_x \equiv \sum_{\xi \in Path^{(1)}_{*,x}} (\xi, \xi) \in A_1$$

すると、e_n と f_x の間には次の関係が成り立つ。

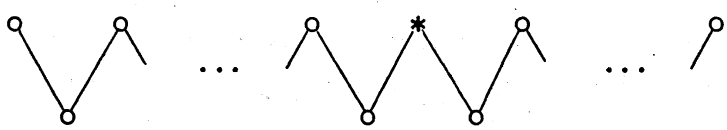
THEOREM 3. e_n, f_x, μ, β, tr はすべて上の通りとする。この時、

(a) $e_1 f_x e_1 = \#(Path^{(1)}_{*,x}) \mu(x) \beta^{-1} e_1$
(b) $e_n f_x = f_x e_n \qquad (n \geq 2)$
(c) $tr(\omega e_{m+1}) = tr(\omega) tr(e_{m+1})$
$(\omega$: word in f_x $(x \in G^{(0)}), e_1, \cdots, e_m)$

Theorem 2 で現れる Extended Jones' projections は、次のグラフから上に述べた方法によって構成される。

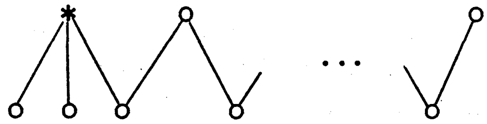
1) $(n; \lambda_k, \lambda_{n-k-2})$ の場合

A_{n+1} $\qquad$ $(k+2)$ 番目



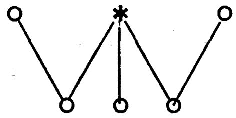
2) $(2k;\lambda_0,\lambda_0,\lambda_{k-2})$ の場合

D_{k+2}



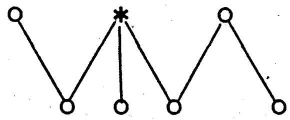
3) $(10;\lambda_0,\lambda_1,\lambda_1)$ の場合

E_6



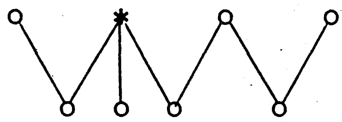
4) $(16;\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)$ の場合

E_7



5) $(28;\lambda_0,\lambda_1,\lambda_3)$ の場合

E_8



§4 Index

ここでは、Extended Jones' projections $\{e_i, f_j\ ; i=1,2,\ldots,1\le j\le m\}$ に対し、$A=\{e_i, f_j\ ; i=1,2,\ldots,1\le j\le m\}''$, $B=\{e_i\ ; i=1,2,\ldots\}''$ と置き、指数 $[A:B]$ を Wenzl の定理を用いて求める。

まず、$A_k=\{e_i, f_j\ ;\ 1\le i\le k, 1\le j\le m\}''$, $B_k=\{e_i\ ;\ 1\le i\le k\}''$ $(k\ge 1)$, $A_{-1}=B_{-1}=B_0=\mathbb{C}$, $A_0=\{f_j\ ;\ 1\le j\le m\}''$と置き、$A_k\subset A_{k+1}$の inclusion matrix $[A_k\to A_{k+1}]$ について考える。はじめに、補題を2つ挙げる。

Lemma 1. $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ を $\alpha_j = \lambda_{k_j}$となるように定め、

$p_{j,k} = 1 - (1 - f_j) \vee e_1 \vee \cdots \vee e_k \ (k \geq 1),\ p_{j,0} = f_j,$

と置く。この時

1) $p_{j,k} \in Z(A_k)$

2) $k \geq k_j + 1$ ならば $p_{j,k} = 0$

Lemma 2. $q_k = 1 - \sum_j p_{j,k}$と置くと

$\exists \Phi_{k+1} : < A_k, e_{A_{k-1}} > \longrightarrow A_{k+1} q_{k+1}$ **-isom,onto*

s.t. $\Phi_{k+1}(x) = x q_{k+1}\ (x \in A_k)$

即ち、$[A_k \to < A_k, e_{A_{k-1}} >] = [A_k q_{k+1} \to A_{k+1} q_{k+1}]$

この2つの補題より、$k \geq \max k_j + 1$ であれば $[A_k \to < A_k, e_{A_{k-1}} >] = [A_k \to A_{k+1}]$ となる。一方、$[A_k \to < A_k, e_{A_{k-1}} >] = [A_{k-1} \to A_k]^t$であるから、$k$が十分大きければ$[A_k \to A_{k+1}] = [A_{k-1} \to A_k]^t$となり、inclusion matrix $[A_k \to A_{k+1}]$ が周期的となることがわかる。また、A_n,B_nは、Wenzl の定理のその他の仮定も満たしている。Wenzl の定理を用いて指数 $[A : B]$ を計算すると次のようになる。

Theorem 4. *Extended Jones' projections* $\{e_i, f_j\ ;\ i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m\}$ に対し、$A = \{e_i, f_j\ ;\ i = 1, 2, \ldots,\ 1 \leq j \leq m\}''$, $B = \{e_i\ ;\ i = 1, 2, \ldots\}''$と置く。この時 A,B は、*hyperfinite* II_1となり、指数 $[A : B]$ は、$(n; \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ により以下のように定まる

1) $(n; \lambda_k, \lambda_{n-k-2})\ (0 \leq k \leq [\frac{n-2}{2}]\ , n \geq 2)$ の場合

$$[A : B] = \frac{\sin^2 (k+2)\theta_n}{\sin^2 \theta_n}$$

2) $(2k; \lambda_0, \lambda_0, \lambda_{k-2})\ (k \geq 2)$ の場合

$$[A : B] = 2 \cot^2 \theta_{2k}$$

3) $(10; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_1)$ の場合

$$[A : B] = 18 + 10\sqrt{3}$$

4) $(16; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ の場合

$$[A : B] = 9\{2 \sin^2 \theta_n (\frac{\sin^2 2\theta_n}{\sin^2 4\theta_n} + \frac{\sin^2 \theta_n}{\sin^2 3\theta_n} + 1)\}^{-1}$$

5) $(28; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_3)$ の場合

$$[A : B] = 15\{2\sin^2\theta_n(\frac{\sin^2\theta_n}{\sin^2 5\theta_n} + \frac{\sin^2 3\theta_n}{\sin^2 5\theta_n} + \frac{\sin^2\theta_n}{\sin^2 3\theta_n} + 1)\}^{-1}$$

次に、relative commutant $B' \cap A$ については、Jones 達の結果（[1] § 4.5）を利用することにより、trivial となることがわかる。

Theorem 5. *Extended Jones' projections* $\{e_i, f_j \ ; i \in \mathbb{N}, 1 \le j \le m\}$ に対し、$A = \{e_i, f_j \ ; i \in \mathbb{N}, 1 \le j \le m\}''$, $B = \{e_i \ ; i = 1, 2, \ldots\}''$ と置く。この時、*relative commutant* $B' \cap A$ は *trivial* である。

次に、$A(j) = \{e_i, \ f_j; \ i = 1, 2, \cdots\}''$ とおき、指数 $[A : A(j)]$ を求める。$\{e_i, f_j, 1 - f_j; \ i = 1, 2, \cdots\}$ は A型の Extended Jones' projections になるから、指数 $[A(j) : B]$ は Theorem 4 よりわかり、$[A : B] = [A : A(j)][A(j) : B]$ によって $[A : A(j)]$ を計算すると次の結果が得られる。

Corollary 1. $A, A(j)$ は上の通りとする。この時、指数 $[A : A(j)]$ は次で与えられる。

1) $(2k; \lambda_0, \lambda_0, \lambda_{k-2})$ $(k \ge 2)$ の場合

$$[A : A(1)] = [A : A(2)] = (2\sin^2\theta_{2k})^{-2}$$
$$[A : A(3)] = 2$$

2) $(10; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_1)$ の場合

$$[A : A(1)] = 6 + 2\sqrt{3}$$
$$[A : A(2)] = [A : A(3)] = 3 + \sqrt{3}$$

3) $(16; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ の場合

$$[A : A(j)] = 9\{2\sin^2(j+1)\theta_n(\frac{\sin^2 2\theta_n}{\sin^2 4\theta_n} + \frac{\sin^2\theta_n}{\sin^2 3\theta_n} + 1)\}^{-1}$$

4) $(28; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_3)$ の場合

$$[A : A(j)] = 15\{2\sin^2(k_j+2)\theta_n(\frac{\sin^2\theta_n}{\sin^2 5\theta_n} + \frac{\sin^2 3\theta_n}{\sin^2 5\theta_n} + \frac{\sin^2\theta_n}{\sin^2 3\theta_n} + 1)\}^{-1}$$

但し、$(k_1, k_2, k_3) = (0, 1, 3)$

最後に、$\{f_j;\ 1 \leq j \leq m\}$ の置換による A の自己同型を与え、その fixed point algebra について考える。ここでは、$(2n; \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1}), (10; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_1)$ の場合のみを考える。

$(2n; \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1})$ の場合

$$\theta(f_1) = f_2,\ \theta(f_2) = f_1,\ \theta(e_i) = e_i\ (i \in \mathbb{N})$$

$(10; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_1)$ の場合

$$\theta(f_1) = f_1,\ \theta(f_2) = f_3,\ \theta(f_3) = f_2,\ \theta(e_i) = e_i\ (i \in \mathbb{N})$$

によってそれぞれ A の自己同型 θ を定義する。すると、$A^\theta \supset B,\ B' \cap A = \mathbb{C}$ より、θ は outer であることがわかり、$\theta^2 = id$ であるから $[A : A^\theta] = 2$ となる。また、$(10; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_1)$ の場合は、$A^\theta \supset A(1)$ である。ここで、指数 $[A^\theta : B]$ および $[A^\theta : A(1)]$ を計算すると次のようになる。

Corollary 2. 記号はすべて上の通りとする。

1) $(2n; \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1})$ の時

$$[A^\theta : B] = (2\sin^2\theta_{2n})^{-1}$$

2) $(10; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_1)$ の時

$$[A^\theta : A(1)] = 3 + \sqrt{3}$$

References

1. F. M. Goodman, P. de la Harpe & V. F. R. Jones, "Coxeter Graphs and Towers of Algebras," MSRI publications 14, Springer-Verlag, New York, 1989.
2. V. F. R. Jones, *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983), 1–25.
3. A. Ocneanu, *Graph geometry, quantized groups and nonamenable subfactors*, Lake Tahoe Lectures, June-July (1989).
4. S. Popa, *Relative dimension, tower of projections and commuting squares of subfactors*, Pasific J. Math. **137** (1989), 181–207.
5. A. Sakuramoto, *Index for factors generated by extended Jones' projections*, (in preparation).
6. H. Wenzl, *Hecke algebras of type A_n and subfactors*, Invent. Math. **92** (1988), 349–383.