数理解析研究所講究録
第 779 巻 1992 年 16-27

シュレディンガー作用素の固有関数の増大度

立命館大学 荒井正治 (Masaharu ARAI)
京都工芸繊維大学 内山 淳 (Jun UCHIYAMA)

1 序

問題と解法を明らかにするために最も簡単な場合から考えよう。u を $-u''-\lambda u=0,\ \lambda>0$ の解とする。この時、$u=C\sin(\sqrt{\lambda}x+\alpha)$ であるから、$u\not\equiv 0$ であっても $|u|$ を下からすくい上げて評価することはできない。しかし、$|u'|^2+\lambda|u|^2$ についてはそれが可能である。

次に u を

(1.1) $\quad -u''+q(x)\,u=0$

の非自明解とする。次の問題を考えよう。

問題 1.1 u に依らない正値関数 $\Phi(x)$ と $k(x)$ が存在して

$$\liminf_{x\to\infty}\ \Phi(x)\,[|u'|^2+k(x)|u|^2]>0$$

となるための $q(x)$ の条件を求めよ。

簡単のため q も u も実数値関数としよう。

$$\Phi(x)=\exp\int^x\gamma(t)dt$$

$$F(x)=\Phi(x)\,[u'^{\,2}+k(x)u^2]$$

と置く。$F(x)$ を微分すると、(1.1) を使って

(1.2) $\quad F'(x)=\Phi(x)\,[\gamma u'^{\,2}+2(k+q)uu'+(\gamma k+k')u^2]$

を得る。

STEP I　任意の u, u' に対して (1.2) の右辺が非負となるような γ, k を求めること。

例えば $q(x)=q_1(x)+q_2(x)$ と分解でき

$$(1.3)\qquad q_1'+\gamma q_1+\gamma^{-1}{q_2}^2\le 0$$

となる $\gamma(x)>0$ が存在するならば $k(x)=-q_1(x)$ と取れば良い。特に、$q_1=-\lambda$（λ:正定数）の時は $\gamma(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}|q_2(x)|$ とすればよい。

STEP I がうまくいったとしよう。

STEP II　u は (1.1) の解であるから、任意の点 x_1 において $F(x_1)>0$ であり、STEP I より $F(x)$ は非減少関数であるから

$$\liminf_{x\to\infty}F(x)\ge F(x_1)>0$$

を得る。

同様の問題を偏微分方程式

$$(1.4)\qquad -\Delta u+q(x)\,u=0$$

について考えよう。

$$\Phi(r)=\exp\int^r\gamma(t)dt$$

と置き、(1.4) の両辺に $2\,\Phi(|x|)\,\partial_r\bar{u}$ をかけ、$s<|x|<t$ で積分し、部分積分をして、実数部分を取ると

$$(1.5)\qquad \left(\int_{|x|=t}-\int_{|x|=s}\right)\Phi\left\{2\,|\partial_r u|^2-|\nabla u|^2\right\}dS$$

$$=\int_{s<|x|<t}\Phi\Bigg[\left(\gamma-\frac{n-1}{r}\right)|\partial_r u|^2$$

$$+\left(\frac{2}{r}-\gamma-\frac{n-1}{r}\right)(|\nabla u|^2-|\partial_r u|^2)+2\mathrm{Re}\left[q\left(\partial_r\overline{u}\right)u\right]\Bigg]dx$$

を得る。これと部分積分によりえられる公式

$$(1.6)\quad \left(\int_{|x|=t}-\int_{|x|=s}\right)\Phi(|x|)k(x)\,|u(x)|^2 dS$$

$$=\int_{s<|x|<t}\Phi\left[2\,k\,\mathrm{Re}[\,(\partial_r u)\,\overline{u}]+\left\{\partial_r k+\left(\gamma+\frac{n-1}{r}\right)k\right\}|u|^2\right]dx$$

とを辺々加えて

$$(1.7)\quad F(t)-F(s)=\int_{s<|x|<t}|x|^{-1}\Phi G\,dx$$

$$(1.8)\quad F(t)=\int_{|x|=t}\Phi\left\{2\,|\partial_r u|^2-|\nabla u|^2+k(x)|u(x)|^2\right\}dS$$

の形の式を得る。

常微分の場合の STEP I と同様に

$\forall u$ に対して $G\geq 0$

が示せたとしよう。さらに、

STEP II′ $F(r_1)>0$ なる r_1 が存在する

ことが言えると、問題 1.1 は解決することとなるが、(1.8) の右辺の被積分関数は $u,\,\partial_j u$ の二次形式と見たとき正定値ではないので、STEP II′ は正しいかどうか分からない。それを回避するために 4 節の STEP IV 以降の考察と、補助関数 ρ と ϕ の導入とを必要とした。

なお、(1.8) の右辺の被積分関数が $u,\,\partial_j u$ の二次形式と見て正定値であることを要しないのであれば、そこに cross term $(\partial_j u)\overline{u}$ が加わっても良いであろう。そこで、4 節では (1.5) を導くにあたって (1.4) の両辺に $2\Phi(|x|)\,\partial_r\bar{u}$ をかけたところを $\Phi(|x|)\,(2\,\partial_r\bar{u}+g\bar{u})$ をかけることにする。

2 定理

$u(x)\in H^2_{loc}(\Omega)$ を

$$(2.1)\quad -\Delta u+(q_1(x)+q_2(x))u(x)=0\qquad \text{in}\quad \Omega\supset\{\,x\in\mathbf{R}^n\,;\,|x|\geq R_0\}$$

を満たす、台が有界ではない関数とする。

以下 $r=|x|$ とし $'=\frac{d}{dr}$ とする。

以後次の仮定 (Q), (A) をおく。

(Q.1) $q_1(x)$ は実数値関数であり次の性質を満たす：

$\forall w(x) \in H^1_{loc}(\Omega)$ に対して

$$\sqrt{|q_1(x)|}w(x) \in L^2_{loc}(\Omega) \text{ かつ } \sqrt{|\partial_r q_1(x)|}w(x) \in L^2_{loc}(\Omega).$$

(Q.2) $q_2(x)$ は複素数値関数でもよいが次の性質を満たす：

$\forall w(x) \in H^1_{loc}(\Omega)$ に対して $\sqrt{|q_2(x)|}w(x) \in L^2_{loc}(\Omega)$.

(A) $i=1,2$ に対して以下の性質を満たす $[R_0,\infty)$ で連続な関数 $\psi_i(r)$, $\sigma_i(r)$, $\eta_i(r)$ が存在する。

(A.1) $\psi_i(r) > 0$,

(A.2) $\sigma_i(r) > 0$ かつ 有界,

(A.3) $\eta_i(r) \le 2$ かつ 有界,

(A.4) $\sigma_i(r) - \eta_i(r) \in C^1([R_0.\infty))$ かつ

$$\left\{\left(\sigma_2(r) - \eta_2(r)\right) - \left(\sigma_1(r) - \eta_1(r)\right)\right\}' = O(r^{-1}),$$

(A.5) 定数 $a_1 > 1$, $a_2 > 0$ が存在して

$$\limsup_{|x|\to\infty} \frac{\psi_i(r)^2}{\sigma_i(r)}\left[r\partial_r q_1(x) + \eta_i(r) q_1(x) + \frac{a_i}{\sigma_i(r)}\left|rq_2(x) + \frac{1}{4}\left\{\sigma_i(r) - \eta_i(r)\right\}'\right|^2\right] < 0,$$

(A.6) $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} \frac{\psi_i(r)}{r\sigma_i(r)} = 0$,

(A.7) 正定数 C_1, C_2 と連続関数 $\tau(r)$ が存在して、

$$C_2\sigma_2(r) \le \tau(r) \le C_1,$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\psi_2(r)}{\sqrt{\sigma_2(r)}} \exp\left(\int_{R_0}^{r} \frac{\tau(t)-\eta_2(t)}{2t} dt\right) = 0.$$

＜仮定終わり＞

さて

(2.2) $$\Phi_i(r) = \exp\left(\int^{r} \frac{\sigma_i(t)+\eta_i(t)}{2t} dt\right)$$

と置こう。

定理 2.1 以上の仮定が満たされているとき

$$\liminf_{R\to\infty} \int_{|x|=R} \Phi_1(|x|)\left[|\partial_r u|^2 + \left(\frac{1}{r^2} + (q_1)_-\right)|u|^2\right] dS > 0$$

が成り立つ。ここで

$$(q_1)_-(x) = \mathrm{Max}\,\{0, -q_1(x)\}$$

である。

定理 2.2 さらに、

(Q.3) 定数 $0 < a_3 < 1,\ \delta \geq 0,\ C_3 > 0$ が存在して

$$\int_\Omega \left\{(q_1)_-(x) + \left(\mathrm{Re}[q_2] + \frac{1}{4r}(\sigma_1 - \eta_1)'\right)_-(x)\right\}|w|^2 dx$$

$$\leq \int_\Omega \left\{a_3|\nabla w(x)|^2 + C_3 r^\delta |w|^2\right\} dx$$

がすべての $w(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して成り立つとしよう。

このとき

(1) $$\liminf_{R\to\infty} R^\delta \Phi_1(R) \int_{R<|x|<R+1} |u|^2\, dx > 0$$

が成り立つ。

(2) さらに $\int^\infty R^{-\delta}\Phi_1(R)^{-1} dR = \infty$ であれば $u(x) \notin L_2(\Omega)$

である。

注 2.3 最も基本的な仮定は (A.5) の $i=1$ である。これは $n=1,\ \sigma_1 \equiv \eta_1$ のときには、$\gamma = x^{-1}\sigma_1 = x^{-1}\eta_1$ と置くことにより (1.3) とほぼ同値となる。なお、ここで $\sigma_1 = \eta_1$ を仮定しなくてもよいのは、1節の最後に注意した g の導入のご利益である。

また、(A.3) の中の $\eta_i \leq 2$ は偏微分特有の仮定であり、常微分の場合には不要である。

注 2.4 定理の主張の中には $i=1$ しか現れていないことに注意しよう。σ_1 を固定すると η_1 が小さく取れれば取れるほど良い定理と言うことになる。他方、η_2 しか現れない仮定 (A.7) は η_2 が大きければ大きいほど満たしやすい仮定である。そこで $i=1,2$ と分けることとした。

3 例

$$q_1(x) = -r^{\alpha} + V_1(x) - \lambda, \quad q_2(x) = V_2(x) + r^{-1}Q'(r)$$

なる場合を考えよう。ここで

$\alpha > 0,\ -\infty < \lambda < \infty$ は定数

$V_1(x),\ Q(r)$ は実数値関数

$$\partial_r V_1 = o(r^{\alpha-1}\theta(r)),\ V_1 = o(r^{\alpha}\theta(r)),\ V_2 = o(r^{(\alpha/2)-1}\theta(r)),\ Q(r) = o(\theta(r))$$

とし $\theta(r)$ は

$$\theta(r) = 1,\ \log r,\ (\log r)^{-1-\varepsilon_0} \qquad (\varepsilon_0 > 0)$$

のどれかとしよう。

このとき、次が成り立つ。

命題 3.1

1） $\theta(r) \equiv 1$ のときは

$$\begin{cases} \int_{R<|x|<R+1} |u|^2 dx \geq C_\varepsilon R^{-(\alpha/2)-\varepsilon} & \text{for any } \varepsilon > 0, \\ u \notin L^2(|x| > R_0), & \text{if } 0 < \alpha < 2. \end{cases}$$

2）$\theta(r) = \log r$ のときは

$$\begin{cases} \int_{R<|x|<R+1} |u|^2 dx \geq C_\varepsilon R^{-(\alpha/2)} (\log R)^{-\varepsilon} & \text{for any } \varepsilon > 0, \\ u \notin L^2(|x| > R_0), & \text{if } 0 < \alpha \leq 2. \end{cases}$$

3）$\theta(r) = (\log r)^{-1-\varepsilon_0}$ のときは

$$\begin{cases} \int_{R<|x|<R+1} |u|^2 dx \geq C R^{-(\alpha/2)} \\ u \notin L^2(|x| > R_0), & \text{if } 0 < \alpha \leq 2. \end{cases}$$

この証明に先立って、$Q(r)$ の例をあげておく。$Q(r) = -\int_r^\infty t^{-\varepsilon_1} e^t \sin e^t dt$ は $Q(r) = O(r^{-\varepsilon_1})$ なので上の仮定を満たすが、$r^{-1}Q'(r) = r^{-1-\varepsilon_1} e^r \sin e^r$ なので q_2 自身は非常に大きくなり得ることに注意しておこう。

証明 $\beta_2 < \beta_1 = \alpha$, $0 < \varepsilon < 2^{-1}(2+\alpha)$ に対して

$$\sigma(r) = \sigma_i(r) = \varepsilon\theta(r) - 2Q(r), \quad \eta_i(r) = \varepsilon\theta(r) + 2Q(r) - \beta_i$$

とおくと (A.4) が満たされ

$$(\sigma_i - \eta_i)' = -4Q', \quad \sigma_i + \eta_i = 2\varepsilon\theta - \beta_i$$

である。$Q = o(1)\cdot\theta$ だから R_1 を十分大きく取ることにより $r > R_1$ に対して $|Q(r)| < (\varepsilon/4)\theta(r)$ とできる。よって

$$(3.1) \quad (\varepsilon/2)\theta(r) < \sigma(r) < (3\varepsilon/2)\theta(r) \leq (3\varepsilon/2),$$

$$(3.2) \quad (\varepsilon/2)\theta(r) - \beta_i < \eta_i(r) < (3\varepsilon/2) - \beta_i < 2 - (\varepsilon/2) \qquad \text{for} \quad r > R_1$$

となり、(A.2), (A.3) が満たされる。次に $\psi_i(r) = r^{-\alpha/2}$ $(i = 1, 2)$ とおくと (A.1),(A.6) は明かである。$rq_2 + 4^{-1}(\sigma - \eta_i)' = rV_2$ に注意すると

$$\limsup_{r\to\infty} \sigma^{-1}\psi_i^2 \left\{ r\partial_r q_1 + \eta_i q_1 + a_i\sigma^{-1}|rq_2 + 4^{-1}(\sigma - \eta_i)'|^2 \right\}$$

$$= \limsup_{r\to\infty} \sigma^{-1} r^{-\alpha} \left\{ -(\alpha + \eta_i) r^\alpha + (r\partial_r V_1 + \eta_i V_1) - \eta_i\lambda + a_i\sigma^{-1}|rV_2|^2 \right\}$$

$$\leq -\liminf_{r\to\infty}\ (\alpha+\eta_i)\sigma^{-1}+\limsup_{r\to\infty}\ \left\{o(1)\cdot\sigma^{-1}\theta(r)-\eta_i\lambda\sigma^{-1}r^{-\alpha}+o(1)\cdot\sigma^{-2}\theta(r)^2\right\}$$

を得るが、$\beta_2<\beta_1=\alpha$ と (3.1), (3.2) より第一項は負、第二項は零となり、(A.5) が満たされる。

さらに、τ を $0<\tau<\alpha-\beta_2$ となる定数に取ると (A.7) も満たされる。

このとき、

$$\Phi_1(R)=\exp\left(\int_{R_0}^{R}(2t)^{-1}\{\sigma(t)+\eta_1(t)\}dt\right)=\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-(\alpha/2)}\exp\left(\varepsilon\int_{R_0}^{R}\frac{\theta(t)}{t}\,dt\right),$$

$$\exp\left(\varepsilon\int_{R_0}^{R}\frac{\theta(t)}{t}\,dt\right)\begin{cases} = & \text{Const}\,R^{\varepsilon}, & \text{if}\quad \theta(r)\equiv 1\\ = & \text{Const}\,(\log R)^{\varepsilon}, & \text{if}\quad \theta(r)=(\log r)^{-1}\\ \leq & \text{Const}, & \text{if}\quad \theta(r)=(\log r)^{-1-\varepsilon_0}.\end{cases}$$

である。$\delta=\alpha$ として (Q.3) が満たされるから、定理 2.2 により命題 3.1 が示された。

4 証明の概要

STEP I $\gamma_i(r)$, $g_i(r)$, $\rho(r)$, $k_i(x)$ $(i=1,2)$ を後に定める実数値関数とする。$\Phi_i(r)=\int^r\gamma_i(t)\,dt$ と置く。$v(x)=e^{\rho(r)}u(x)$ と置き、(2.1) を v の方程式に書き換えると

$$-\Delta v+2\rho'\partial_r v+\left\{q_1+q_2+\rho''+(n-1)r^{-1}\rho'-\rho'^{\,2}\right\}v=0$$

となる。この両辺に $\Phi_i(r)\,(2\,\partial_r\bar{v}+g_i\bar{v})$ をかけ、$(R_0<)s<|x|<t$ で積分し、部分積分をして、実数部分を取る。それと (1.6) で u を v に置き換えた式とを辺々加えると

$$\left(\int_{|x|=t}-\int_{|x|=s}\right)\Phi_i\left\{2|\partial_r v|^2-|\nabla v|^2+g_i\mathrm{Re}\left[(\partial_r v)\overline{v}\right]+k_i(x)|v|^2\right\}dS$$

$$=\int_{s<|x|<t}\Phi_i\left[\left(4\rho'+\gamma_i-\frac{n-1}{r}+g_i\right)|\partial_r v|^2+\left(\frac{2}{r}-\gamma_i+g_i-\frac{n-1}{r}\right)\left(|\nabla v|^2-|\partial_r v|^2\right)\right.$$

$$+\mathrm{Re}\left[\left\{\gamma_i g_i+2q_1+2\overline{q_2}+g_i'+2\left(\rho''+\frac{n-1}{r}\rho'-\rho'^{\,2}+g_i\rho'\right)+2k_i\right\}(\partial_r v)\overline{v}\right]$$

$$\left.+\left\{g_i\left(q_1+\mathrm{Re}[q_2]\right)+g_i\left(\rho''+\frac{n-1}{r}\rho'-\rho'^{\,2}\right)+\partial_r k_i+\left(\gamma_i+\frac{n-1}{r}\right)k_i\right\}|v|^2\right]dx$$

を得る。

σ_i, η_i を仮定に現れる関数とし、$\phi(r)$ を後に定める関数として、

$$\gamma_i(r)=\{\sigma_i(r)+\eta_i(r)\}/(2r),\quad g_i(r)=\{\sigma_i(r)-\eta_i(r)\}/(2r)+(n-1)/r,$$

$$k_i(x) = -q_1(x) + \rho'(r)^2 + (g_i(r)^2/4) - \phi(r)$$

と置くと、上式は

$$(4.1) \qquad F_i(t;\rho,\phi) - F_i(s;\rho,\phi) = \int_{s<|x|<t} r^{-1}\Phi_i(r)\, G_i(x;\rho,\phi)\, dx \qquad (i=1,2)$$

と書ける。ここで F_i, G_i は次式で与えられる。

$$F_i(t;\rho,\phi) = \int_{|x|=t} \Phi_i(r)\{2|\partial_r v|^2 - |\nabla v|^2 + g_i(r)\mathrm{Re}\,[(\partial_r v)\overline{v}] + \left(-q_1(r) + \rho'(r)^2 + \frac{1}{4}g_i(r)^2 - \phi(r)\right)|v|^2\}dS$$

$$G_i(x;\rho,\phi) = \tilde{G}_i(x) + 4r\rho'(r)|\partial_r v|^2 + 2r\left(\rho'' + \frac{n-1}{r}\rho' + g_i\rho' - \phi\right)\mathrm{Re}\,[(\partial_r v)\overline{v}] + r\left\{2\rho'\rho'' + \frac{\eta_i(r)}{r}\rho'^{\,2} + g_i\left(\rho'' + \frac{n-1}{r}\rho'\right) - \phi' - \left(\gamma_i + \frac{n-1}{r}\right)\phi\right\}|v|^2$$

$$\tilde{G}_i(x) = \sigma_i(r)|\partial_r v|^2 + (2-\eta_i(r))\left(|\nabla v|^2 - |\partial_r v|^2\right) + 2\,\mathrm{Re}\left[\left\{rq_2 + \frac{1}{4}(\sigma_i(r)-\eta_i(r))'\right\}(\partial_r\overline{v})v\right] + rg_i\left(\gamma_i + \frac{g_i}{2} - \frac{1}{r}\right)\mathrm{Re}\,[(\partial_r v)\overline{v}] + \Big[-\{r\partial_r q_1 + \eta_i(r)q_1\} + g_i\left\{r\mathrm{Re}\,[q_2] + \frac{1}{4}(\sigma_i(r)-\eta_i(r))'\right\} + \frac{1}{4}g_i^2(r\gamma_i + n - 3)\Big]|v|^2.$$

なお、仮定 (Q.1), (Q.2) は部分積分の正当性のために使われている。

STEP II　仮定 (A.1)–(A.6) より

$$G_1(x;0,0) \geq 0 \qquad \text{for} \quad \forall|x| \geq \exists R_1 \geq R_0$$

を示すことができる。

STEP III

$$\exists R_* > R_1 \qquad \text{s.t.} \quad F_1(R_*;0,0) > 0$$

$\Longrightarrow$ 定理 2.1 が成り立つ。

実際、(4.1) と STEP II より $F_1(r;0,0)$ は非減少関数であり、$\rho\equiv 0$ の時は $v=u$ であることと、$|g_1(r)|\le \mathrm{Const}\, r^{-1}$ に注意すると

$$F_1(r;0,0)=\int_{|x|=r}\Phi_1(r)\left\{2|\partial_r u|^2-|\nabla u|^2+g_1\,\mathrm{Re}[(\partial_r u)\overline{u}]+(-q_1+g_1 2/4)\,|u|^2\right\}dS$$
$$\le \mathrm{Const}\int_{|x|=r}\Phi_1(r)\left\{|\partial_r u|^2+\left(\frac{1}{r^2}+(q_1)_-\right)|u|^2\right\}dS$$

を得るからである。

STEP IV

$$\rho_1(r)=\int_{R_0}^{r}\left\{\exp\left(\int_{R_0}^{s}\frac{\tau(t)-\eta_2(t)}{2t}dt\right)\right\}ds$$

とおく。$\phi(r)$ が

(4.2) $$\lim_{r\to\infty}\frac{\psi_2(r)^2}{\sigma_2(r)}r\left\{r\phi(r)^2+\left|\phi'(r)+\left(\gamma_2(r)+\frac{n-1}{r}\right)\phi(r)\right|\right\}=0$$

を満たすならば、

$$\exists R_2\ge R_1,\quad \exists M>0,\quad \text{s.t.}\quad G_2(x;m\rho_1,\phi)\ge 0\quad \text{for}\quad \forall|x|\ge R_2,\ \forall m\ge M.$$

この証明には、(A.7) を使う。

STEP V　ρ_1,ϕ を上の通りとすると

$$\exists R_3\ge R_2,\quad \exists m_0>M,\quad \text{s.t.}$$

$$F_2(r;m_0\rho_1,\phi)\ge F_2(R_3;m_0\rho_1,\phi)>0\qquad \text{for}\qquad \forall r\ge R_3.$$

実際、$v=e^{\rho}u$ により $F_2(r;m_0\rho_1,\phi)$ を u を使って表しておく。$e^{-2m\rho_1(r)}F_2(r;m\rho_1,\phi)$ は m の 2 次式であって

$$m^2 \text{ の係数}=2\int_{|x|=r}\Phi_2(r){\rho_1'}^2|u|^2dS$$

である。supp$[u]$ が compact ではないから上の量が正となる $r=R_3$ が存在し、m_0 を十分大きく取ると、求める式の第二の不等式を得る。第一の不等式は (4.1) と STEP IV より従う。

STEP VI　ϕ を (4.2) を満たす関数とする。r の関数 $\rho_2(r;R)$ を

$$\rho_2(r;R) = C(R)\log r$$

とおき、定数 $C(R)$ を

$$m_0\rho_1'(r) = \rho_2'(r;R) \quad \text{at} \quad r = R$$

を満たすように取る。このとき、

$$F_2(r;\rho_2(\cdot\,;R_4),\phi) \geq F_2(r;\rho_2(\cdot\,;R_4),\phi)|_{r=R_4} > 0 \quad \text{for} \quad \forall r \geq \exists R_4 \geq R_3$$

である。なぜなら、STEP IV と同様にして、

$$G_2(x;\rho_2(\cdot\,;R_4),\phi) \geq 0 \quad \text{for} \quad \forall|x| \geq \exists R_4$$

を得るから、(4.1) より $F_2(r;\rho_2(\cdot\,;R_4),\phi)$ は単調非減少関数である。また、v を u に戻すことにより

$$F_2(r;\rho_2(\cdot\,;R_4),\phi) = \exp[2\{\rho_2(r;R_4) - m_0\rho_1(r)\}]\cdot F_2(r;m_0\rho_1,\phi) \quad \text{at} \quad r = R_4$$

であることが分かるが、STEP V よりこれは正である。

STEP VII　次のいずれかが成り立つことは明らかである。

Case 1　:　$\forall R_5 \geq R_0, \quad \exists R_6 \geq R_5 \quad \text{s.t.}$

$$\frac{d}{dr}\int_{|x|=r}\frac{\Phi_1}{r}(2\rho_2' + g_2 - g_1)\,|u|^2 dS\bigg|_{r=R_6} \leq 0;$$

Case 2　:　$\exists R_7 \geq R_0, \quad \text{s.t.}$

$$\frac{d}{dr}\int_{|x|=r}\frac{\Phi_1}{r}(2\rho_2' + g_2 - g_1)\,|u|^2 dS > 0 \qquad \text{for} \qquad \forall r \geq R_7.$$

STEP VIII　$0 < 2\rho_2' + g_2 - g_1 \leq \mathrm{Const}\, r^{-1}$ に注意すれば、Case 2 が成り立つ場合には

$$\liminf_{R\to\infty}\int_{|x|=R}\frac{\Phi_1(r)}{r^2}|u|^2 dS > 0$$

を得るので、定理 2.1 が成り立つ。

STEP IX　$\phi(r)$ がさらに

$$(4.3) \quad \phi \geq \frac{1}{4}\left(g_2^2 - g_1^2\right) + 2{\rho_2'}^2 + g_2\rho_2'$$
$$-\frac{1}{4r}(\sigma_1 + \eta_1 + 2n - 4)(2\rho_2' + g_2 - g_1) - \rho_2'' - \frac{1}{2}(g_2 - g_1)'$$
$$\text{for} \quad \forall r \geq \exists R_8$$

を満たすならば、Case 1 が成り立っている場合には STEP III の仮定が導かれ、定理 2.1 が成り立つ。

STEP X　(A.6) より (4.2), (4.3) を満たす ϕ が存在する。

注　(4.2) と「(4.3) で ρ_2 を $m_0\rho_1$ で置き換えたもの」とを同時に満たす ϕ が存在するならば STEP VI は不要であるが、それは期待できない。

5　定理の拡張

1）方程式 (2.1) の代わりに

$$-\sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\,b_j(x)\right)a_{jk}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \sqrt{-1}\,b_k(x)\right)u + (q_1(x) + q_2(x))u = 0$$

を扱うことも可能である。

2）σ_i, η_i が必ずしも $r = |x|$ のみの関数ではない場合を許すように仮定を置くこともできる。

Reference :

M. Arai and J. Uchiyama, Growth order of eigenfunctions of Schrödinger operators with potentials admitting some integral conditions. (in preparation.)