数理解析研究所講究録
780巻 1992年 100-110

非線型退化型粘性項をもつBurgers方程式の解の希薄波への漸近

金沢大理　松村　昭孝(Akitaka Matsumura)
早大政経　西原　健二(Kenji Nishihara)

1．序

非線型退化型粘性項をもつBurgers 方程式のCauchy問題

$$(1.1)\quad \begin{cases} u_t + uu_x = \mu(|u_x|^{p-1}u_x)_x, & x \in R,\ t \in R_+ = (0, \infty) \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

を考える。ここに，$\mu > 0$ と、$p > 1$ は定数である。初期データ $u_0(x)$ は、$x = \pm\infty$ で定数状態となることを仮定する：

$$(1.2)\quad u_0(x) \longrightarrow u_\pm \quad (x \longrightarrow \pm\infty).$$

そこで、我々は、次の3つの場合

Case (0) $u_- = u_+$　Case (i) $u_- > u_+$　Case (ii) $u_- < u_+$

を考えなければならない。

この分野での、もっとも先駆的な結果は、1960年に Il'in と Oleinik [1] によって得られている。彼らは、$p = 1$ のと

き、(1.1)−(1.2) の解の一意存在と、3つの場合、それぞれ、$t\to\infty$ のときの漸近挙動を得た。その漸近挙動は対応する Riemann 問題

$$
(1.3)\quad\begin{cases} u^R_t + u^R u^R_x = 0 \\ u^R\big|_{t=0} = u^R_0(x) = \begin{cases} u_- & x<0 \\ u_+ & x>0 \end{cases} \end{cases}
$$

と深く関連している。Cases (i) と (ii) についてその結果を思い起こしてみよう。

Case (i) では、進行波解 $U(x-st)\equiv U(\xi)$ が、

$$
-sU' + UU' = \mu U'',\ U(\pm\infty) = u_\pm\ \left(' = \frac{d}{d\xi}\right)
$$

によって、平行移動を除いて一意に決り、更に、初期条件 $u_0(x)$ から、$\int_{-\infty}^{\infty}\{u_0(x)-U(x)\}dx = 0$ によって完全に一意に決まる。そのとき、(1.1)−(1.2) の解 u は、$t\to\infty$ のとき、x に一様に、$U(x-st)$ に漸近する。

Case (ii) では、Riemann 問題 (1.3) の連続な一意的弱解 $u^R(x/t)$ が存在して、(1.1)−(1.2) の解 u は、$t\to\infty$ のとき x に一様に $u^R(x/t)$ に漸近する。$u^R(x/t)$ は希薄波と呼ばれ、具体的に、

$$
u^R(x/t) = u_-\ (x\leqq u_-t),\ x/t\ (u_-t\leqq x\leqq u_+t),\ u_+\ (x\geqq u_+t)
$$

とかける。

さて、方程式の粘性項をみてみると、それは一般に、$f(u_x)_x$ の形にかけるが、f が線型のときは、流れは Newton 流と呼ばれ、非線型のときは非 Newton 流と呼ばれる。我々の場合は、$f(\sigma)=\mu|\sigma|^{p-1}\sigma$ で、Ostwald-de Vaele モデルとして知られる。我々は、一次元非 Newton 流の漸近挙動を調べたい。ここでの我々の目的は、Case (ii) の場合に、(1.1)-(1.2) の解の漸近挙動を示すことにある。Case (i) の場合は、関連する結果が永井-三村両氏によって得られている [10]。

解の定義と結果を述べよう。

<u>定義</u> $u_x \in L^p_{loc}(R\times R_+)$ をみたす有界可測関数 u が、(1.1) の弱解であるとは、任意の $g\in C_0^1(R\times[0,\infty))$ に対し、

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \left\{u g_t + \left(\frac{1}{2}u^2 - \mu|u_x|^{p-1}u_x\right) g_x\right\} dx\,dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\, g(x,0)\, dx = 0$$

をみたすことである。

<u>定理</u> $p>1$, $u_- < u_+$ とする。$u_0 - u_0^R \in L^2(R)$ かつ $u_{0x}\in L^{p+1}(R)$ ならば、(1.1) の一意的弱解 u が存在して、次をみたす：

$$u - u^R \in C([0,\infty);L^2(R)) \cap L^\infty(R_+;L^2(R))$$

$$u_x \in L^\infty(R_+; L^{p+1}(R)) \cap L^{p+1}(R \times R_+)$$
$$(|u_x|^{p-1} u_x)_x \in L^2(R \times R_+)$$
$$\lim_{t \to \infty} \sup_{R} |u(x,t) - u^R(x/t)| = 0 .$$

$\varphi \in C^2(R)$ で、$\varphi'' > 0$ ならば、もう少し一般の Burgers 方程式

$$u_t + \varphi(u)_x = \mu(|u_x|^{p-1} u_x)_x$$

に対しても同じ結果が成立する。その証明には、エネルギー法に加えて、最大値原理を使う。しかし、上記の定理はエネルギー法のみによって証明される。このことは、退化型粘性項をもつ連立系に対しても同様の結果が得られるであろうことを示唆している。もちろん、流れの方程式は、質量、運動量、エネルギーの各保存則に拠っている。従って、我々は、連立系について考えるべきである。Newton 流に対しては幾つかの結果がある。例えば、Kanel' [2] (Case (o)), 松村－西原 [6], 川島－松村 [3], Liu [5] (Case (i)), 松村－西原 [7, 8], 川島－松村－西原 [4] (Case (ii)) を参照。しかし、非 Newton 流に対しては、我々の知るかぎり、この分野での結果はない。

以下の節では、証明の概要を述べる。詳細については、松村－西原［9］を参照。

2. 証明の概要

我々の証明は、いくつかの段階から成る。

最初の段階は、u^R がなめらかでないので、なめらかな近似 U を作ることである。それは、

$$(2.1)\quad \begin{cases} U_t + UU_x = 0 \\ U|_{t=0} = U_0(x) = \dfrac{u_+ + u_-}{2} + \dfrac{u_+ - u_-}{2}\tanh x \end{cases}$$

の解として与えられる。$L^q(R)$ におけるノルムを $\|\cdot\|_q$，また、単に、$\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|$ と表わすと、解 U は次の性質をみたす。

<u>補題 1</u>（松村－西原［7］）(2.1) のなめらかな一意的大域解 U は次の性質をみたす：

(i) 任意の $(x,t) \in R \times R_+$ に対し

$$u_- < U(x,t) < u_+ ,\quad U_x(x,t) > 0$$

(ii) 任意の $q\ (1 \leqq q \leqq \infty)$ に対し、定数 C_q があって

$$\|U(\cdot,t)\|_q \leqq C_q(1+t)^{-1+1/q},\quad t \in R_+$$

(iii) $\displaystyle \lim_{t\to\infty} \sup_{R} |U(x,t) - u^R(x/t)| = 0$

証明は、特性曲線の方法によってなされる。

次に、$u = U + \psi$ とおいて、(1.1) と (2.1) から、ψ についての Cauchy 問題

$$(2.2)\quad \begin{cases} \psi_t + \left(U\psi + \frac{1}{2}\psi^2\right)_x = \mu\left(\left|U_x + \psi_x\right|^{p-1}(U_x + \psi_x)\right)_x \\ \psi\big|_{t=0} = \psi_0(x) = u_0(x) - U_0(x) \end{cases}$$

に変換する。$\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$, $\psi_{0x} \in L^{p+1}(\mathbb{R})$ に注意する。(2.2) は、$u_x = U_x + \psi_x \longrightarrow 0$ $(x \longrightarrow \pm\infty)$ が期待されるので、退化型の放物型となる。そこで、(2.2) を非退化型の問題

$$(2.2)_\varepsilon\quad \begin{cases} \psi_t + \left(U\psi + \frac{1}{2}\psi^2\right)_x = \mu\left\{(u_x^2 + \varepsilon)^{\frac{p-1}{2}} u_x\right\}_x \\ \psi\big|_{t=0} = \psi_0^\varepsilon(x) \end{cases}$$

で近似する。ここに、$\varepsilon > 0$ で、$\psi_0^\varepsilon \in H^\infty(\mathbb{R})$ は、$\varepsilon \to 0$ のとき、ψ_0 に強収束するものである。

次の段階は、この $(2.2)_\varepsilon$ に対して、局所解 $\psi = \psi^\varepsilon$ の存在と、ε に無関係なアプリオリ評価をすることで、これが最も重要な部分である。更に、$\varepsilon \to 0$ として望む解を得て、それは一意的であること、最後に、漸近挙動 $\sup_{\mathbb{R}} |\psi(x,t)| \longrightarrow 0$ $(t \longrightarrow 0)$ を示して証明が終る。

次の節で、最も重要なアプリオリ評価と漸近挙動について簡潔に示そう。

3. アプリオリ評価

実際の証明では、$(2.2)_\varepsilon$ の解 $\psi=\psi^\varepsilon\in H^\infty(R)$ に対して ε に無関係な評価をしなければならないが、ここでは、複雑さを避けて、本質的な評価を観るために、$\psi\in H^\infty(R)$ が (2.2) をみたすと仮定して、ψ の評価をする（詳しい評価は [9] を参照）。

補題1から、$U_x>0$ かつ、$\|U_x(\cdot,t)\|_{p+1}^{p+1}$ は R_+ 上で可積分なので、$(2.2)_1$ 式に ψ をかけて、それを、$R\times[0,t)$ 上で積分すると、次の補題を得る。

<u>補題2</u>　ある定数 $C_1=C_1(\|\psi_0\|)$ が存在して

$$(3.1)\qquad \|\psi(t)\|^2+\int_0^t\|u_x(\tau)\|_{p+1}^{p+1}\,d\tau\leqq C_1$$

をみたす。

次に、$(1.1)_1$ 式に、$-(|u_x|^{p-1}u_x)_x$ をかけて、$R\times[0,t)$ 上で積分すると、

$$(3.2)\qquad \begin{aligned}&\frac{1}{p+1}\|u_x(t)\|_{p+1}^{p+1}+\mu p^2\int_0^t\int_R|u_x|^{2p-2}u_{xx}^2\,dx\,d\tau\\ &\leqq\frac{1}{p+1}\|u_{0x}\|_{p+1}^{p+1}+\frac{p}{p+1}\int_0^t\int_R|u_x|^{p+2}\,dx\,d\tau\end{aligned}$$

を得る。(3.2) の最後の項を評価するために、次の補題を準備する。

補題 3　$\varphi \in H^\infty(R)$ に対し、次の不等式が成立する。

$$\sup_R |\varphi(x)| \leq C\left(\int_R |\varphi(x)|^{p+2} dx \cdot \int_R |\varphi(x)|^{2p-2} \varphi_x^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{3p+2}}$$

$$\int_R |\varphi(x)|^{p+2} dx \leq C\left(\int_R |\varphi(x)|^{p+1} dx\right)^{\frac{3p+2}{3p+1}} \left(\int_R |\varphi(x)|^{2p-2} \varphi_x^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{3p+1}}$$

補題 3 より、$\delta > 0$ に対して、

$$\int_0^t \int_R |u_x|^{p+2} dx d\tau \leq \int_0^t \left\{ C_\delta \left(\int_R |u_x|^{p+1} dx\right)^{1+\frac{2}{3p}} + \delta \int_R |u_x|^{2p-2} u_{xx}^2\, dx \right\} d\tau$$

$$\leq \left(\sup_{0<\tau<t} \| u_x(\tau) \|_{p+1}^{p+1}\right)^{\frac{2}{3p}} \cdot C_\delta \int_0^t \| u_x(\tau) \|_{p+1}^{p+1} d\tau + \delta \int_0^t\!\!\int_R |u_x|^{2p-2} u_{xx}^2\, dx d\tau$$

が成立する。δ を充分小さくとって、(3.1) の評価も使うと、(3.2) から、

$$X(t) + \int_0^t \int_R |u_x|^{2p-2} u_{xx}^2\, dx d\tau \leq C \| u_{0x} \|_{p+1}^{p+1} + C C_1 X(t)^{\frac{2}{3p}}$$

を得る。ここに、$X(t) = \sup_{0<\tau<t} \| u_x(\tau) \|_{p+1}^{p+1}$ である。$p>1$ であったので、$2/3p < 1$ となって、次の主評価を得る。

補題 4　定数 $C_2 = C_2(\| \psi_0 \|, \| u_{0x} \|_{p+1})$ が存在して

$$\| u_x(t) \|_{p+1}^{p+1} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} | u_x |^{2p-2} u_{xx}^2 \, dx \leqq C_2$$

$$\int_0^t \int_R | u_x |^{p+2} dx \, d\tau \leqq C_2$$

が成立する。

補題4を使うと、$\frac{d}{dt} \| u_x(t) \|_{p+1}^{p+1}$ の R_+ 上での可積分性が容易にわかる。このことから、$\| u_x(t) \|_{p+1} \longrightarrow 0 \ (t \to \infty)$ がわかる。不等式

$$\sup_R | \psi(x,t) | \leqq C \| \psi(t) \|^{\frac{2p}{3p+1}} \| \psi_x(t) \|_{p+1}^{\frac{p+1}{3p+1}}$$

と、$\| \psi_x(t) \|_{p+1} \leqq \| u_x(t) \|_{p+1} + \| U_x(t) \|_{p+1}$ を使うと、

$$\sup_R | \psi(x,t) | = \sup_R | u(x,t) - U(x,t) | \longrightarrow 0 \ (t \to \infty)$$

を得る。従って、補題1 (iii) から、求める漸近挙動

$$\sup_R | u(x,t) - u^R(x/t) |$$

$$\leqq \sup_R | u(x,t) - U(x,t) | + \sup_R | U(x,t) - u^R(x/t) |$$

$$\longrightarrow 0 \quad (t \to \infty)$$

が得られた。

References

1. A. M. Il'in and O. A. Oleinik, Asymptotic behavior of the solutions of the Cauchy problem for certain quasilinear equations for large time, *Math. USSR Sb.* **51** (1960), 191-216.
2. Ya. Kanel', On a model system of equations of one-dimensional gas motion, *Differencial'nya Uravnenija* **4** (1968), 374-380.
3. S. Kawashima and A. Matsumura, Asymptotic stability of traveling wave solutions of systems for one-dimensional gas motion, *Comm. Math. Phys.* **101** (1985), 97-127.
4. S. Kawashima, A. Matsumura and K. Nishihara, Asymptotic behavior of the solutions for the equations of a viscous heat-conductive gas, *Proc. Japan Acad.* **62** (1986), 249-252.
5. T. P. Liu, Nonlinear stability of shock waves for viscous conservation laws, *Memoirs AMS* **328** (1985), 1-108.
6. A. Matsumura and K. Nishihara, On the stability of traveling wave solutions of a one-dimensional model system for compressible viscous gas, *Japan J. Appl. Math.* **2** (1985), 17-25.
7. A. Matsumura and K. Nishihara, Asymptotics toward the rarefaction waves of the solutions of a one-dimensional model system for compressible viscous gas, *Japan J. Appl. Math.* **3** (1986), 1-13.
8. A. Matsumura and K. Nishihara, Global stability of the rarefaction wave of a one-dimensional model system for compressible viscous gas, to appear in *Comm. Math. Phys.*
9. A. Matsumura and K. Nishihara, Asymptotics toward the

rarefaction wave of the solutions of the Burgers equation with nonlinear degenerate viscosity, to appear.

10. T. Nagai and M. Mimura, Some nonlinear degenerate diffusion equations related to population dynamics, *J. Math. Soc. Japan* **35** (1983), 539-562.