

Title	ある移流拡散方程式系の解の爆発(変分問題と非線型楕円型方程式)
Author(s)	永井, 敏隆
Citation	数理解析研究所講究録 (1992), 780: 91-99
Issue Date	1992-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/82491
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

ある移流拡散方程式系の解の爆発

九州工業大学工学部 永井 敏隆 (Toshitaka Nagai)

1. 序論

細胞性粘菌の集合体形成の数学モデル (Keller and Segel [5]) である非線形偏微分方程式系を考える。

$$(1.1) \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \nabla \cdot (D_1 \nabla a - \chi a \nabla \phi(b)) \quad (x \in \Omega, t > 0)$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial b}{\partial t} = D_2 \Delta b + g(a, b),$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial a}{\partial n} = \frac{\partial b}{\partial n} = 0 \quad (x \in \partial\Omega, t > 0),$$

$$(1.4) \quad a(x, 0) = a_0(x), \quad b(x, 0) = b_0(x) \quad (x \in \Omega).$$

ここで D_1, D_2, χ は正定数、 Ω は R^N の有界領域で、境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。 $a(x, t)$ は場所 x 、時刻 t での細胞性粘菌の個体数、 $b(x, t)$ は誘引物質の濃度を表す。(1.1)において、 $-\nabla \cdot (\chi a \nabla \phi(b))$ は、誘引物質の濃度勾配による粘菌の移動を引き起こす項である。 $\phi(b)$ は $\phi'(b) > 0$ ($b > 0$) を満たす関数であり、sensitivity function と呼ばれている。(1.2)において、 $g(a, b)$ は、誘引物質の生成と消費を引き起こす項である。

定常問題については、次のことが研究されている。Schaaf [10] は分岐理論による取扱いを行い、定数定常解から分岐した空間非一様な定常解が安定 (不安定) となるための条件を与えた。Lin, Ni and Takagi [6] は、Schaaf の論文で取り扱われてない $\phi(b) = \log b$ の場合を扱い、Mountain Pass Lemma を用いて次の興味ある結果を得た。ただし、 $g(a, b)$ は $g(a, b) = -\gamma b + ka$ ($\gamma, k > 0$) と与える。

$N = 1, 2$ の場合 $\chi > D_1$ で、 $N \geq 3$ の場合 $1 < \chi/D_1 < (N+2)/(N-2)$ とする。このとき、 D_2/γ が十分小さいならば振幅の大きい非定数定常解が存在する。

更に、Ni and Takagi [8] は最小エネルギー解 (Mountain Pass Lemma を用いて得られた解) の形状について次の結果を得た。

D_2/γ が十分小さいとき、最小エネルギー解が最大値を取る点 P は唯一つで境界上にあり、 $D_2/\gamma \rightarrow 0$ のときこの解は Ω 内で 0 に収束する。

これらの結果は、一点に凝集する空間非一様な定常解の存在を示したものである。

$N \geq 3$ で $\chi/D_1 = (N+2)/(N-2)$ の場合、Adimurthi and Yadava [1], Budd, Knaap and Peletier [3] は、 Ω を球とし、球対称な定常解の存在について考察している。一般の領域では、Pan, Ni and Takagi [9] が最小エネルギー解について $\chi/D_1 < (N+2)/(N-2)$ の場合と同様のことを示した。

発展方程式の初期値問題 (1.1) - (1.4) の解の挙動については、 $\phi(b) = b$, $g(a, b) = -\gamma b + ka$ の場合に、解の爆発が起こりえることが Nanjundiah [7], Childress and Percus [4] により予想されている。以下では、無次元化した次の系

$$(1.1)' \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla a - a \nabla b) \quad (x \in \Omega, t > 0)$$

$$(1.2)' \quad \varepsilon \frac{\partial b}{\partial t} = \Delta b - \gamma b + a.$$

を考える。ただし、 ε と γ は正定数。

Nanjundiah は、空間次元と関係なく爆発は起こりえると予想したが、その後、Childress and Percus により次の予想がなされた。

- (i) $N = 1$ のとき、爆発は起こらない。
- (ii) $N = 2$ のとき、次を満たす正定数 c が存在する。

$\int_{\Omega} a_0(x) dx / 2\pi < c$ の場合は、爆発は起こらない。 $\int_{\Omega} a_0(x) dx / 2\pi > c$ の場合は、有限時間 T で爆発が起こりえる。 $t \rightarrow T$ のとき、 $a(\cdot, t)$ はデルタ関数に近づく。 Ω が球の場合、 $c = 4$ で与えられる。

- (iii) $N \geq 3$ のとき、 $\int_{\Omega} a_0(x) dx$ の大きさにかかわらず有限時間で爆発が起こりえ、 $a(\cdot, t)$ はデルタ関数に近づく。

本稿では、方程式 (1.2)' において $\varepsilon \rightarrow 0$ とした系

$$(1.5) \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla a - a \nabla b) \quad (x \in \Omega, t > 0)$$

$$(1.6) \quad 0 = \Delta b - \gamma b + a$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial a}{\partial n} = \frac{\partial b}{\partial n} = 0 \quad (x \in \partial\Omega, t > 0)$$

$$(1.8) \quad a(x, 0) = a_0(x) \quad (x \in \Omega).$$

を考え、領域 Ω と非自明な初期関数 $a_0(x)$ に次の条件 (A1), (A2) を課して上の予想を考察する。

$$(A1) \quad \Omega = \{x \in R^N; |x| < L\}.$$

$$(A2) \quad a_0 \text{ は } \bar{\Omega} \text{ 上の滑らかな非負関数で、} N \geq 2 \text{ のときは、} a_0(x) = a_0(|x|) \text{ (球対称)}.$$

2. 主な結果

条件 (A1), (A2) の下で、問題 (1.5) - (1.8) の解 $(a(x, t), b(x, t))$ は滑らかな非負関数で、 x について球対称と成る。解 $(a(x, t), b(x, t))$ の maximal existence time を T_{\max} とする。

$$a(\cdot, t), b(\cdot, t) \in L^\infty(\Omega) \quad (0 < t < T_{\max})$$

を満たし、 $T_{\max} < \infty$ ならば

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}} (\|a(\cdot, t)\|_{L^\infty} + \|b(\cdot, t)\|_{L^\infty}) = \infty$$

となる。また

$$\int_{\Omega} a(x, t) dx = \int_{\Omega} a_0(x) dx, \quad \int_{\Omega} b(x, t) dx = \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} a_0(x) dx \quad (0 < t < T_{\max})$$

を満たす。 θ と $M_k(t) (k = 0, 1, 2, \dots)$ を

$$\theta = \frac{1}{\omega_N} \int_{\Omega} a_0(x) dx, \quad M_k(t) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\Omega} a(x, t) |x|^k dx$$

で定める。ただし、 ω_N は $N-1$ 次元球面の面積。 $E_\theta(s) (s \geq 0)$ を

$$(2.1) \quad E_\theta(s) = 2N(N-1)\theta^{2/N} s^{(N-2)/N} - \frac{N}{2}\theta^2 + NL^{-N}\theta s + C_\alpha \theta^{(2N-2+\alpha)/N} s^{(2-\alpha)/N}$$

で定める。ただし、

$$(2.2) \quad N = 2 \text{ の時は、 } 0 < \alpha < 2 \text{ で } C_\alpha = \frac{\gamma L^\alpha}{\alpha e},$$

$$N \geq 3 \text{ の時は、 } \alpha = 0 \text{ で } C_\alpha = \frac{\gamma N}{2(N-2)}.$$

定理 1 (解の爆発)。 $N \geq 2$, $E_\theta(M_N(0)) < 0$ とする。このとき、 $T_{\max} < \infty$ となり、 $t \rightarrow T_{\max}$ とすると

$$(i) \quad \|a(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rightarrow \infty, \quad \|b(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rightarrow \infty,$$

$$(ii) \quad a(\cdot, t) \rightarrow \int_{\Omega} a_0(x) dx \delta, \quad b(\cdot, t) \rightarrow \int_{\Omega} a_0(x) dx N(\cdot, 0) \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

となる。ただし、 δ は原点におかれた Dirac の δ -関数で、 $N(x, y)$ は $\gamma u - \Delta u = f$ in Ω , $\partial u / \partial n = 0$ on $\partial\Omega$ のグリーン関数、 $\mathcal{D}'(\Omega)$ は Ω 上の超関数の空間。

$N = 2$ のとき $\theta > 4$ ならば $E_\theta(0) = \theta(4 - \theta) < 0$ 、 $N \geq 3$ のとき $E_\theta(0) = -N\theta^2/2 < 0$ より、次の定理 1 の系を得る。

系。 $N \geq 2$ で、 $N = 2$ のときは $\theta > 4$ とする。このとき、 $M_N(0)$ が十分小さいならば定理 1 の結果が成り立つ。

定理 2 (解の有界性)。 $N = 1$, または $N = 2$ で $\theta < 4$ とする。このとき、問題 (1.5) - (1.8) の解は大域的に存在し、

$$\sup_{t \geq 0} \{\|a(\cdot, t)\|_{L^\infty} + \|b(\cdot, t)\|_{L^\infty}\} < \infty$$

を満たす。

3. 定理1の証明

補題1. 次の不等式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}M_N(t) \leq 2N(N-1)\theta^{2/N}\{M_N(t)\}^{(N-2)/N} - \frac{N}{2}\theta^2 + R(t) \quad (0 < t < T_{\max}).$$

ただし,

$$(3.1) \quad R(t) = \gamma N \int_0^L a(r,t)B(r,t)r^{N-1}dr.$$

証明. (1.5) に $|x|^N$ を掛け Ω 上で積分し、Green の公式を用いると次を得る。

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} a|x|^N dx \\ &= 2N(N-1) \int_{\Omega} a|x|^{N-2} dx - N \int_{\partial\Omega} a|x|^{N-2}(x \cdot \vec{n})d\sigma + N \int_{\Omega} a(\nabla b \cdot x)|x|^{N-2} dx. \end{aligned}$$

ただし、 \vec{n} は $\partial\Omega$ での外向き単位法線ベクトルで、 \cdot は R^N での通常の内積を表す。Hölder の不等式より、

$$(3.3) \quad \int_{\Omega} a|x|^{N-2} dx \leq \omega_N \{M_0(t)\}^{2/N} \{M_N(t)\}^{(N-2)/N} = \omega_N \theta^{2/N} \{M_N(t)\}^{(N-2)/N}$$

を得る。 $A(r,t)$ と $B(r,t)$ を

$$A(r,t) = \int_0^r a(\rho,t)\rho^{N-1}d\rho, \quad B(r,t) = \int_0^r b(\rho,t)\rho^{N-1}d\rho$$

で定める。 $A(L,t) = \theta$, $B(L,t) = \theta/\gamma$ を満たす。 $\nabla b \cdot x = r\partial b/\partial r$ と

$$0 = r^{N-1} \frac{\partial b}{\partial r} - \gamma B + A$$

より

$$(3.4) \quad \int_{\Omega} a(\nabla b \cdot x)|x|^{N-2} dx = -\omega_N \int_0^L aAr^{N-1}dr + \gamma\omega_N \int_0^L aBr^{N-1}dr$$

を得る。次に、 $ar^{N-1} = \partial A/\partial r$ と $A(L,t) = \theta$ より

$$\int_0^L aAr^{N-1}dr = \frac{1}{2}\theta^2$$

が得られ、この関係式と (3.4) より

$$(3.5) \quad N \int_{\Omega} a(\nabla b \cdot x)|x|^{N-2} dx = \omega_N \left\{ -\frac{N}{2}\theta^2 + R(t) \right\}$$

を得る。従って、(3.2), (3.3) そして (3.5) より補題の証明を得る。

補題 2。 $R(t)$ は次のように評価される。

$$R(t) \leq NL^{-N}\theta M_N(t) + C_\alpha \theta^{(2N-2+\alpha)/N} \{M_N(t)\}^{(2-\alpha)/N} \quad (0 < t < T_{\max}).$$

ただし、 α と C_α は (2.2) で与えられたもの。

証明。まず $B(r, t)$ は

$$(3.6) \quad B(r, t) \leq \frac{\theta}{\gamma} \left(\frac{r}{L}\right)^N + w(r) \quad (0 < r < L)$$

と評価されることを示す。ただし、 $w(r)$ は次で与えられる。

$$w(r) = -\frac{\theta}{2} r^2 \log \frac{r}{L} \quad \text{if } N = 2,$$

$$w(r) = \frac{\theta L^{-N}}{2(N-2)} (L^N r^2 - L^2 r^N) \quad \text{if } N \geq 3.$$

(3.6) を示すために、次で定められた $\Phi(r, t)$ を考える。

$$\Phi(r, t) = B(r, t) - \frac{\theta}{\gamma} \left(\frac{r}{L}\right)^N$$

各 $t > 0$ にたいして Φ は

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{N-1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \gamma \Phi = -A + \theta \left(\frac{r}{L}\right)^N > -\theta \quad (0 < r < L),$$

$$\Phi(0, t) = \Phi(L, t) = 0$$

を満たす。一方、 $w(r)$ は

$$\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{N-1}{r} \frac{dw}{dr} - \gamma w = -\theta - \gamma w < -\theta \quad (0 < r < L),$$

$$w(+0) = w(L) = 0, \quad w(r) > 0 \quad (0 < r < L)$$

を満たす。従って、比較定理より、 $\Phi(r, t) \leq w(r)$ ($0 < r < L$)、すなわち (3.6) を得る。

次に、 $w(r)$ は

$$w(r) \leq \frac{\theta L^\alpha}{2\alpha e} r^{2-\alpha} \quad \text{if } N = 2 \text{ and } 0 < \alpha < 2,$$

$$w(r) \leq \frac{\theta}{2(N-2)} r^2 \quad \text{if } N \geq 3$$

と評価される。(3.6) とこの評価式より

$$R(t) \leq NL^{-N}\theta M_N(t) + C_\alpha \theta M_{2-\alpha}(t)$$

を得る。ただし、 α と C_α は (2.2) で与えられたもの。Hölder の不等式を用いると

$$M_{2-\alpha}(t) \leq \theta^{(N-2+\alpha)/N} \{M_N(t)\}^{(2-\alpha)/N}$$

と評価され、補題の証明を得る。

補題1と補題2より、次の補題を得る。

補題3. 微分不等式

$$\frac{d}{dt}M_N(t) \leq E_\theta(M_N(t)) \quad (0 < t < T_{\max})$$

が成り立つ。ただし、 E_θ は (2.1) で定められたもの。

定理1の証明。 $E_\theta(M_N(0)) < 0$ とせよ。 $E_\theta(s)$ は s について増加なので、補題3を用いると

$$T_{\max} < \infty, \quad M_N(t) > 0 \quad (0 \leq t < T_{\max}), \quad M_N(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow T_{\max})$$

が得られる。 $M_1(t) > 0$ ($0 \leq t < T_{\max}$) で、 $M_1(t) \leq \theta^{(N-1)/N} \{M_N(t)\}^{1/N}$ より

$$(3.7) \quad M_1(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow T_{\max})$$

が示される。

$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ とせよ。 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = \phi(0) + \sum_{i=1}^N x_i \psi_i(x) \quad (x \in \Omega)$$

と表す。ただし、 $\psi_i \in C_0^\infty(\Omega)$ 。この式に $a(x, t)$ を掛け Ω 上積分して

$$\int_{\Omega} a(x, t) \phi(x) dx = \int_{\Omega} a(x, t) dx \phi(0) + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} a(x, t) x_i \psi_i(x) dx$$

を得る。この関係式において、 $\int_{\Omega} a(x, t) dx = \int_{\Omega} a_0(x) dx$ と (3.7) を用いることより

$$\int_{\Omega} a(x, t) \phi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} a_0(x) dx \phi(0) \quad (t \rightarrow T_{\max})$$

が得られる。従って、次が得られる。

$$(3.8) \quad a(\cdot, t) \rightarrow \int_{\Omega} a_0(x) dx \delta \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (t \rightarrow T_{\max}).$$

各 $t > 0$ に対して、 $b(\cdot, t)$ が Neumann 問題 (1.6) の解であることと (3.8) より

$$(3.9) \quad b(\cdot, t) \rightarrow \int_{\Omega} a_0(y) dy N(\cdot, 0) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (t \rightarrow T_{\max})$$

を得る。ただし、 $N(x, y)$ は $\gamma u - \Delta u = f$ in Ω , $\partial u / \partial n = 0$ on $\partial \Omega$ のグリーン関数。最後に、(3.8) と (3.9) より $t \rightarrow T_{\max}$ とすると

$$\|a(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rightarrow \infty, \quad \|b(\cdot, t)\|_{L^\infty} \rightarrow \infty$$

が得られる。

4. 定理2の証明

解 $(a(x, t), b(x, t))$ の有界性を証明するのに、次の補題を用いる。補題は、Alikakos [2] による方法で証明される。以下、 C は T_{\max} に依存しない正定数を表す。

補題4。 $\|\nabla b(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C$ ($0 < t < T_{\max}$) ならば

$$\|a(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C \max\{1, \|a_0\|_{L^1}, \|a_0\|_{L^\infty}\} \quad (0 < t < T_{\max}).$$

定理2の証明。 次の評価式

$$(4.1) \quad \|b(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C, \quad \|\nabla b(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C \quad (0 < t < T_{\max})$$

が示されれば、補題4を用いると $T_{\max} = \infty$ となり定理の証明を得る。

まず $N = 1$ の場合に (4.1) を示す。(1.6) を $(-L, x)$ 上積分することにより

$$(4.2) \quad |b_x(x, t)| \leq \int_{\Omega} a_0(x) dx \quad (x \in \Omega, 0 < t < T_{\max})$$

が得られる。次に、関係式

$$2Lb(x, t) = \int_{-L}^L b(y, t) dy + \int_{-L}^L \int_y^x b_x(z, t) dz dy, \quad x \in (-L, L)$$

に (4.2) を用いると

$$b(x, t) \leq \frac{1}{2L} \left(\frac{1}{\gamma} + 4L^2 \right) \int_{\Omega} a_0(x) dx$$

が示される。以上で、 $N = 1$ の場合に (4.1) を得る。

$N = 2$ と $\theta < 4$ の場合に (4.1) を示す。 $u(\sigma, t)$ と $v(\sigma, t)$ を

$$\sigma = r^2, \quad u(\sigma, t) = \int_0^r a(\rho, t) \rho d\rho, \quad v(\sigma, t) = \int_0^r b(\rho, t) \rho d\rho$$

で定める。 u と v は次を満たす。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + 2(u - \gamma v) \frac{\partial u}{\partial \sigma}, \quad (0 < \sigma < L^2, \quad 0 < t < T_{\max})$$

$$0 = 4\sigma \frac{\partial^2 v}{\partial \sigma^2} - \gamma v + u$$

$$u(0, t) = v(0, t) = 0, \quad u(L^2, t) = \theta, \quad v(L^2, t) = \frac{\theta}{\gamma}.$$

$w(\sigma)$ を $w(\sigma) = 4k\sigma/(1+k\sigma)$ と定める。 $u(L^2, 0) = \theta < 4$ より、 k を十分大きく取り

$$\theta < w(L^2), \quad u(\sigma, 0) \leq w(\sigma) \quad (0 \leq \sigma \leq L^2)$$

を満たすように出来る。このとき、 $w(\sigma)$ は

$$4\sigma \frac{d^2 w}{d\sigma^2} + 2(w - \gamma v) \frac{dw}{d\sigma} \leq 0 \quad (0 < \sigma < L^2),$$

$$w(0) = 0, \quad w(L^2) > \theta$$

を満たす。比較定理より、 $u(\sigma, t) \leq w(\sigma)$ ($0 \leq \sigma \leq L^2$, $0 \leq t < T_{\max}$) を得る。従って、

$$(4.3) \quad 0 \leq \frac{u(\sigma, t)}{\sigma} \leq \frac{w(\sigma)}{\sigma} \leq 4k \quad (0 < \sigma \leq L^2)$$

を得る。

次に、 $z(\sigma)$ を $z(\sigma) = \ell\sigma$ で定める。 ℓ は

$$z(L^2) = \ell L^2 > \frac{\theta}{\gamma}, \quad \ell\gamma \geq 4k$$

を満たすように定める。ただし、 k は (4.3) におけるもの。このとき、 $z(\sigma)$ は

$$4\sigma \frac{d^2 z}{d\sigma^2} - \gamma z + u \leq 0 \quad (0 < \sigma < L^2),$$

$$z(0) = 0, \quad z(L^2) > v(L^2, t)$$

を満たす。比較定理より、 $v(\sigma, t) \leq z(\sigma)$ ($0 \leq \sigma \leq L^2$) を得る。従って、

$$(4.4) \quad 0 \leq \frac{v(\sigma, t)}{\sigma} \leq \ell \quad (0 < \sigma < L^2)$$

を得る。関係式

$$4 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right) = 4 \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \gamma v - u$$

を積分し、(4.4) と $v(\sigma, t) \leq v(L^2, t) = \theta/\gamma$ を用いると

$$b(r, t) = 2 \frac{\partial v}{\partial \sigma}(\sigma, t) \leq 2 \frac{v(\sigma, t)}{\sigma} + \frac{\gamma}{2\sigma} \int_0^\sigma v(\xi, t) d\xi \leq \frac{1}{2}(4\ell + \theta)$$

が得られる。次に、関係式

$$r \frac{\partial b}{\partial r}(r, t) = \gamma v(\sigma, t) - u(\sigma, t)$$

に (4.3) と (4.4) を用いると

$$|\nabla b(x, t)| = \left| \frac{\partial b}{\partial r}(r, t) \right| = \sqrt{\sigma} \left| \frac{\gamma v(\sigma, t) - u(\sigma, t)}{\sigma} \right| \leq L(\ell\gamma + 4k) \quad (x \in \Omega, 0 < t < T_{\max})$$

となり、(4.1) を得る。

参考文献

- [1] Adimurthi and S. L. Yadava, Existence and nonexistence of positive radial solutions of Neumann problems with critical Sobolev exponents, *Arch. Rational Mech. Anal.* **115** (1991), 275–296.
- [2] N. D. Alikakos, L^p bounds of solutions of reaction–diffusion equations, *Comm. Partial Differential Equations* **4** (1979), 827–868.
- [3] C. Budd, M. C. Knaap and L. A. Peletier, Asymptotic behaviour of solutions of elliptic equations with critical exponents and Neumann boundary conditions, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **117** (1991), 225–250.
- [4] S. Childress and J. K. Percus, Nonlinear aspects of chemotaxis, *Math. Biosci.* **56** (1981), 217–237.
- [5] E. F. Keller and L. A. Segel, Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, *J. Theor. Biol.* **26** (1970), 399–415.
- [6] C.-S. Lin, W.-M. Ni and I. Takagi, Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system, *J. Differential Equations* **72** (1988), 1–27.
- [7] V. Nanjundiah, Chemotaxis, signal relaying, and aggregation morphology, *J. Theor. Biol.* **42** (1973), 63–105.
- [8] W. -M. Ni and I. Takagi, On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), 819–851.
- [9] X.-B. Pan, W. -M. Ni and I. Takagi, Singular behavior of least-energy solutions of a semilinear Neumann problem involving critical Sobolev exponents, in preparation.
- [10] R. Schaaf, Stationary solutions of chemotaxis systems, *Trans. Amer. Math. Soc.* **292** (1985), 531–556.