数理解析研究所講究録
781巻 1992年 74-87

複素射影空間の安定ホモトピーについて

信州大学教養部　向井純夫 (Juno Mukai)

このテーマの主目的は、Mosher [Mo] が扱った無限次元複素射影空間 $\mathbb{C}P^{\infty} = \mathbb{C}P$ の安定ホモトピー群 $\pi_k^S(\mathbb{C}P)$ の 2-成分の群拡大の未決定部分、つまり $k = 13, 15, 16, 17$ の場合を決定することである。Mosher の結果は次のようになる。

Theorem A. $\pi_k^S(\mathbb{C}P)$ の 2-成分は、$9 \le k \le 18$ のとき、次の表のようになる；

k	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	$\mathbb{Z}_8$	0	$\mathbb{Z}_4$	0	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$	$(\mathbb{Z}_2)^3$	$\mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_8$	$\mathbb{Z}_4$
gen.			$i\zeta_2\sigma$		$i\widetilde{2\nu}^{!}$, $i\tilde{\sigma}'$	$i\tilde{\bar{\nu}}$	$i\tilde{\nu}''$, $i\tilde{\mu}$	$i\tilde{\nu}^2, i\sigma^2, i\kappa$	♤, ♧	$i\tilde{\sigma}^2$

なお、Mosher によれば、$k = 19$ のときは $Z_{64} \oplus Z_4$ である。

我々の方法は composition methods であり、$\pi_k^S(\mathbb{C}P^n)$ を $k \le 18$ のとき、すべて決定する。非安定な視点での考察と James splitting の使用及び四元数準射影空間 Q_n のホモトピー群において、より小さな不確定要素 (indeterminancy) をもつ Toda brackets の選択が key point である。

§1. まず記号と基本的な Lemma を用意する。$\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$; $d = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{F}$; $\gamma_n(\mathbb{F})$: $S^{d(n+1)-1} \to \mathbb{F}P^n$, $p_n(\mathbb{F})$: $\mathbb{F}P^n \to S^{dn}$, h_n: $\mathbb{C}P^{2n+1} \to \mathbb{H}P^n$, t_n: $Q_n \to \Sigma\mathbb{C}P^{2n-1}$ を自然な写像とする。$q_n = p_n(\mathbb{H})h_n$: $\mathbb{C}P^{2n+1} \to S^{4n}$; $Q_n = Q_{n-1} \cup_{\omega_{n-1}} e^{4n-1}$; $M^n = S^{n-1} \cup_2 e^n$. $\Sigma\mathbb{C}P^{n-1} \subset SU_n \subset SO_{2n} \subset$

$\Omega^{2n}S^{2n}$ の adjoint map $g_n: \Sigma^{2n+1}\mathbb{C}P^{n-1} \to S^{2n}$ が S^1-transfer map で、$g_2 = \nu_4$，$\Sigma(g_n \circ \Sigma^{2n+1}\gamma_{n-1}) = [\iota_k, \iota_k]$, $k = d(n+1) - 1$ となる。
S^3-transfer map $g_n(\mathbb{H}): \Sigma^{4n}Q_n \to S^{4n}$ も同様。$g_{2n}(\mathbb{C}) \circ \Sigma^{4n}t_n = g_n(\mathbb{H})$.

以下、記号 $\mathbb{F}$、特に、$\mathbb{C}$ は省略する。我々は次の２つの自然な cofibrations を用いる。

$$(1) \quad S^{2n-1} \xrightarrow{\gamma_{n-1}} P^{n-1} \xrightarrow{i} P^n \xrightarrow{p} S^{2n} \to \dots ;$$

$$(2) \quad \mathbb{C}P^{2n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} \mathbb{H}P^{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} Q_n \xrightarrow{t_n} \Sigma\mathbb{C}P^{2n-1} \to \dots .$$

定義より、次の等式が成り立つ。

$$(3) \quad \gamma_{2n} = (-1)^{n+1}t_n\omega_n; \quad q_n\gamma_{2n+1} = n\nu_{4n}.$$

Lemma 1([T1]) $\pi^S_{2n}(P^n) = \mathbb{Z}\{\zeta_n\} \oplus i_*\pi^S_{2n}(P^{n-1})$, $\pi^S_{2n}(P^{n-1})$ は有限。$\#(\Sigma^k\gamma_n) = (n+1)!$, $k \geq 1$.

Lemma 2. $n \geq 2$ とする。$12/(12, n+1)t_n\omega_n = \Sigma\gamma_{2n-1}\circ\eta^2_{4n} + i\alpha$ を満たす元 $\alpha \in \pi_{4n+2}(\Sigma P^{2n-2})$ が存在する。$(2n+1)!(12, n+1)/12 \mid \#\alpha$. 特に、$n = 2$ のときは、$\Sigma^2\alpha = i\sigma'''$.

Lemma 3. $\gamma_3\eta^2 = 4t_2\omega_2 + 8i\sigma$; $\tilde{\eta}'\eta^2 = 4\omega_2 + 8i\sigma$, $\tilde{\eta}' \in \langle i, 2\nu, \eta\rangle$; $t_2\tilde{\eta}' = \gamma_3 \pm i\tilde{\nu}$, $\tilde{\nu} \in \langle i, \eta, \nu\rangle$; $t_2\tilde{\eta}'\eta = \gamma_3\eta + i\nu^2$.

Remark(Morisugi). $\pi^S_{8k+1}(P^{4k})$ で、$(4k+1)!/2\gamma_{4k} = i\alpha_k$. $\alpha_k = pA^ki \in$

$\pi^S_{8k-1}(S^0)$, A: $M^{n+8} \longrightarrow M^n$ は Adams map. $\zeta_n \eta_{2n+1} = (n+1)!/2\Sigma\gamma_n$.

古典群と SU_{2m}/Sp_n の準安定ホモトピー群の結果 ([M], [M-T])に、James splitting を使えば、次が得られる。

Lemma 4. $t_n\omega_n\eta = (n, 24)\gamma_{2n-1}\nu$. $(24, n+2)\omega_n\nu = 0$.

Theorem A の generators の記号の説明 ; $\widetilde{2\nu}^! = t_3(\widetilde{2\nu}' - 2i\sigma)$, $\widetilde{2\nu}' \in \langle i, \overline{2\nu}, \widetilde{2\nu}\rangle \subset \pi^S_{14}(Q_3)$, $\overline{2\nu}$, $\widetilde{2\nu}$ は ν に関する (co-)extension; $\tilde{\sigma}' = t_2\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma} \in \langle i, 2\nu, \sigma\rangle$; $\tilde{\nu} = t_2\tilde{\bar{\nu}}'$, $\tilde{\bar{\nu}}' \in \langle i, 2\nu, \bar{\nu}\rangle$; $\tilde{\tilde{\nu}} \in \langle i, \gamma_5, \nu\rangle$; $\tilde{\mu} = t_2\tilde{\mu}'$, $\tilde{\mu}' \in \langle i, 2\nu, \mu\rangle$; 残りは後で、説明する。

§2. 主目的から得られる結果を、初めに紹介する。$M(X) = \{X, X\}$, $\varepsilon(X)$ を空間 X の安定自己ホモトピー同値類の群とする。

Theorem 1. $2 \leq n \leq 6$ のとき、$M(P^n) \cong \mathbb{Z}^n$; $\varepsilon(P^n) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. $M(P^7) \cong \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2$; $\varepsilon(P^7) \cong (\mathbb{Z}_2)^3$.

証明の概要。 n = 2 は、Oka、n = 3 は、Yamaguchi の結果である。$M(P^n)$ については省略。記号: ι_n' を P^n の identity map を表わす。

Barcus-Barratt(または Oka-Sawashita-Sugawara)の完全列を考える;

$$i_*\pi^S_{2n}(P^{n-1}) \xrightarrow{\lambda} \varepsilon(P^n) \xrightarrow{i^*} \varepsilon(P^{n-1}) \longrightarrow 0 .$$

ここで、$\lambda(i\alpha) = \iota_n' + i\alpha p$, $i^*(\beta) = \beta | P^{n-1}$ (restriction) である。

$\pi^S_8(P^3) = \mathbb{Z}_2\{i\nu^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\gamma_3\eta\}$; $\pi^S_{10}(P^4) = 0$; $\pi^S_{12}(P^5) = \mathbb{Z}_3\{i\beta_1\}$;

$\pi^S_{14}(P^6) = \mathbb{Z}_2\{i\tilde{\bar{\nu}}\}$ となるので、$i\nu^2 \in \Sigma\gamma^*_3\{\Sigma P^3, P^4\}$, $i\beta_1 \in \Sigma\gamma^*_5\{\Sigma P^5, P^6\}$ 及び $i\tilde{\bar{\nu}} \notin \Sigma\gamma^*_6\{\Sigma P^6, P^7\}$ を言えばよい。(3) より、$i\nu^2 = i\nu(q_1\gamma_3) \in \Sigma\gamma^*_3\{\Sigma P^3, P^4\}$ である。$\alpha_1 = 8\nu$ を $\pi^S_3(S^0)$ の 3-成分の生成元とする。$\alpha_1 q_1\gamma_3 = \alpha_1\nu = 0$ だから、$\alpha_1 q_1$ は P^4 へ拡張でき、$\pi^S_k(S^1)$ は、$k = 9, 10$ のとき、2-torsion だから、これは P^5 へ拡張できる。これらを $\delta \in \pi^1_S(P^4)$, $\delta' \in \pi^1_S(P^5)$ とおく。

$\#\Sigma^k(\gamma_3\nu_7) = 4$, $k \geq 0$; $\#j_{3*}(\Sigma\gamma_3\circ\nu_8) = 4$, $j_n: \Sigma P^n \subset SU_{n+1}$ であるから、$\{i, \Sigma\gamma_3, 4\nu_8\} \subset \pi_{12}(\Sigma P^4)$ が well-defined で、$\alpha \in \{i, \Sigma\gamma_3, 4\nu_8\}$ に対して，$\pi_{12}(SU_5) = Z_{360}\{j_4\alpha\}$. $\pi_{12}(SU_6) = Z_{6!}\{j_5\Sigma\gamma_5\}$, $2j_5\Sigma\gamma_5 = j_5 i\alpha$. 故に、James splitting より、stable で、$2\gamma_5 = i\alpha$.

さて、$\delta'\circ 4\gamma_5 = 2\delta\alpha \in 2\delta\langle i, \gamma_3, 4\nu\rangle \subset \langle\alpha_1 q_1, \gamma_3, 8\nu\rangle \subset \langle\alpha_1, \nu, \alpha_1\rangle \ni \beta_1$ mod 0. 以上で、前半が証明された。

$p^*_7: \pi^S_{15}(S^0) \longrightarrow \pi^{-1}_S(P^7)$ が monomorphism となることを認めることにする。$g_8 i\tilde{\bar{\nu}} = g_4 t_2\tilde{\bar{\nu}}' = g_2(\mathbb{H})\tilde{\bar{\nu}}' \in \langle\nu, 2\nu, \bar{\nu}\rangle \ni \eta\kappa$ mod 0. $\therefore$ $g_8 i\tilde{\bar{\nu}} p_7 = \eta\kappa p_7 \neq 0$, $i\tilde{\bar{\nu}} p_7 \neq 0$; $M(P^7) \cong \mathbb{Z}^7 \oplus \mathbb{Z}_2$.

$M(P^2) = \mathbb{Z}\{\iota'_2\} \oplus \mathbb{Z}\{\mu_1\}$, $\mu_1 = i\zeta_2 p)$; $\varepsilon(P^2) = \mathbb{Z}_2\{-\iota'_2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\iota'_2 - \mu_1\}$; $\varepsilon(P^6) = \mathbb{Z}_2\{-\iota'_6\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\iota'_6 - \mu''''_1\}$ ($\mu^{(n)}_1 \in M(P^n)$ は $i\mu^{(n-1)}_1$ の extension), $(\mu''''_1)^2 = 2\mu''''_1$ であることを使う。$\mu^{(4)}_1 = \chi$ とおく。$\chi = i\chi'$, $\chi' \in \{P^6, P^5\}$ は μ''''_1 の extension にとれ、$\chi^2 = 2\chi + ai\tilde{\bar{\nu}}p$, $a = 0$ or 1 となる。$g_7\mu''''_1 = 0$ を認めて、$g_8\chi = g_7\chi' \in g_7\langle\mu''''_1, \gamma_6, p_7\rangle = -\langle g_7, \mu''''_1, \gamma_6\rangle p_7$. 故に、$g_8\chi = \alpha p_7$, $\alpha \in \pi^S_{15}(S^0)$ となる。$\therefore$ $0 = \alpha p_7 i\chi' = g_8\chi^2 = (2\alpha + a\eta\kappa)p_7$; $2\alpha + a\eta\kappa = 0$.従って、$a = 0$ であり、$\varepsilon(P^7) = \mathbb{Z}_2\{-\iota'_7\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\iota'_7 - \chi\}$ となる。

§3. 以下、$\pi^S_k(P)$ の 2-torsion の決定を、$k = 16, 17$ の場合を例に挙げて、その概要を述べる。これからの議論はすべて、2-torsion で行うも

のとする。$k \leq 10$ での $\pi_k^S(P^n)$ の結果 [Mu] は、自由に使う。$\omega_1 = \nu' : S^6 \to S^3$ を出発する cofibe 列 を用いれば、次を得る。

Lemma 5. $\pi_{18}^S(Q_2) = \mathbb{Z}_8\{\tilde{\zeta}\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\rho\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\eta\kappa\}$, ただし、$\tilde{\zeta}$ は、$p_2\tilde{\zeta} = -\zeta$ かつ $\#\tilde{\zeta} = 8$ を満たす任意の元である。

Lemma 6. $\{2\iota_5, \eta_5, \nu_6\} = 0$; $\{2\iota_5, \eta_5, \zeta_6\} = 0$.

Proof. よく知られているように、$\pi_{10}(M^6)$ で $i\nu_5\eta_8^2 \neq 0$. 一方、

$i\{2\iota_5, \eta_5, \nu_6\} = -\{i, 2\iota_5, \eta_5\}\circ\nu_7 = -\{i, 2\iota_5, \eta_5\}_2\circ\nu_7 \subset -\{i, 2\iota_5, 0\}_2 \ni 0 \bmod i_*\Sigma^2\pi_8(S^3) = 0$.

これで、前半が証明された。後半は、前半と $\zeta_6 \in \{\nu_6, 8\iota_9, 2\sigma_9\}$ なることと及び Toda bracket の Jacobi identity より、証明される。

次に、$\Sigma\omega_2$ をある合成で表わそう。$\nu' \in \{\eta_3, 2\iota_4, \eta_4\}$ より、extension $\bar{\eta}_3 \in [M^5, S^3]$, coextension $\tilde{\eta}_4 \in \pi_6(M^5)$ が存在して、$\nu' = \bar{\eta}_3\tilde{\eta}_4$. $\therefore\ \omega_2 \in \{i, \nu', \nu_6\} = \{i, \bar{\eta}_3\tilde{\eta}_4, \nu_6\}$; $\Sigma\omega_2 \in \{i, \bar{\eta}_4\tilde{\eta}_5, \nu_7\}$. Lemma 6 から、$\tilde{\eta}_5\nu_7 \in \{i, 2\iota_5, \eta_5\}\circ\nu_7 = -i\{2\iota_5, \eta_5, \nu_6\} = 0$. 故に、$\Sigma\omega_2 \in \{i, \bar{\eta}_4\tilde{\eta}_5, \nu_7\} = \{i\bar{\eta}_4, \tilde{\eta}_5, \nu_7\} \bmod i_*\pi_{11}(S^4) + \pi_8(\Sigma Q_2)\circ\nu_8 = \pi_8(\Sigma Q_2)\circ\nu_8$. 結局、$\Sigma\omega_2 = \bar{\alpha}\tilde{\nu}_7$ と表わせる。ここで、$\alpha = i\bar{\eta}_4$ で、extension, coextension は、$\beta = \tilde{\eta}_5$ に関してとる。$X = M^6 \cup_\beta e^8$ とする。

Lemma 7. $\omega_2\eta_{10} = i\varepsilon_3$. $\omega_2\eta_{10}\sigma_{11} = 0$. $\omega_2\sigma = 0$. $\omega_2\varepsilon = i\eta\kappa$.

Proof. $\omega_2\eta_{10} \in -i\{\nu', \nu_6, \eta_9\} \ni i\varepsilon_3 \bmod 0$. $\omega_2\sigma = \bar{\alpha}\tilde{\nu}\sigma$. $\tilde{\nu}\sigma \in \langle i,$

$\tilde{\eta}, \nu\rangle\sigma = -i\langle\tilde{\eta}, \nu, \sigma\rangle \subset i_*\pi^S_{14}(M^2) = 0$. 残りは、省略。

さて、(1) を使って、$\pi^S_{16}(P)$ を決定しよう。$k = 12, 13$ のとき、$\pi^S_k(S^0) = 0$ より、$\pi^S_{16}(P^2) = Z_2\{i\sigma^2\} \oplus Z_2\{i\kappa\}$. $\gamma_2\zeta = 2i\nu\zeta = 0$, $p_3\gamma_3 = \eta$ より、$\pi^S_{16}(P^3) \cong \pi^S_{16}(P^2) \oplus Z_2\{\gamma_3\mu\}$.

Lemma 4, 7 より、$\gamma_3\eta^2\sigma = (4t_2\omega_2 + 8i\sigma)\sigma = 0$. $\gamma_3\nu^3 = i\tilde{\nu}\nu^3 = i\tilde{\nu}\eta\bar{\nu} \in i\langle\eta, \nu, \eta\rangle\bar{\nu} \ni i\nu^2\bar{\nu} = 0 \bmod 0$. $\therefore \pi^S_{16}(P^4) \cong \pi^S_{16}(P^2)$.

$\nu^2 \in \langle\eta, \nu, \eta\rangle \bmod 0$ であるから、ν に関する η の (co-)extension $\bar{\eta}'$, $\tilde{\eta}''$ をとって、$\nu^2 = \bar{\eta}'\tilde{\eta}''$. $\gamma_4\bar{\eta}' \in -\langle\gamma_4, \eta, \nu\rangle p$.

Lemma 8. $\langle\gamma_4, \eta, \nu\rangle \ni 0 \bmod 0$; $\gamma_5\nu = 0$.

Proof. $n = 4, 5$ のとき、$\pi^S_{14}(P^n) = i_*\pi^S_{14}(P^3) = \mathbb{Z}_2\{i\tilde{\nu}\}$ なる事実は認めることにする。前者を示す。$\langle\gamma_4, \eta, \nu\rangle \ni i\tilde{\nu}$ とする。$g_5\langle\gamma_4, \eta, \nu\rangle = -\langle g_5, \gamma_4, \eta\rangle\nu \subset \pi^S_{12}(S^0)\nu = 0$. $g_5(i\tilde{\nu}) = g_4\tilde{\nu} = \eta\kappa$. $g_3\pi^S_{14}(P^2) = 0$. 後者も同様。

Lemma 8 より、$\gamma_4\bar{\eta}' = 0$, $\gamma_4\nu^2 = 0$. ν^2 の coextension として $\tilde{\nu}^2 = \tilde{\delta}\tilde{\eta}''$, $\delta = \bar{\eta}'$ ととる。$2\tilde{\eta}'' \in -i\langle\nu, \eta, 2\iota\rangle = 0$ より、$\#\tilde{\nu}^2 = 2$. $\therefore$ $\pi^S_{16}(P^5) \cong \pi^S_{16}(P^2) \oplus \mathbb{Z}_2\{\tilde{\nu}^2\}$. $\pi^S_{16}(P^6) \cong \pi^S_{16}(P^5) \cong (\mathbb{Z}_2)^3$ は明らか。

Lemma 3 より、$\gamma_6\nu = it_3\omega_3\nu = 0$. $\therefore \pi^S_{16}(P^7) \cong \pi^S_{16}(P^5) \oplus \mathbb{Z}_2\{\gamma_7\eta\}$, $\pi^S_{16}(P^8) = \mathbb{Z}\{\zeta_8\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\tilde{\nu}^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\sigma^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\kappa\}$.

次に、$\pi^S_{17}(P)$ を決定しよう。

Lemma 9. Lemma 5 を満たすある $\tilde{\xi}$ があって、$\langle\omega_2, \sigma, 16\iota\rangle \ni \tilde{\xi} \bmod$

$\{16i\rho, i\eta\kappa\}$. $\langle\omega_2, 8\iota, 2\sigma\rangle$ も同様。

Proof. $\omega_2 = \bar{\alpha}\tilde{\nu}$, $\tilde{\nu}\sigma = 0$ であるから、$\langle\omega_2, \sigma, 16\iota\rangle \supset \bar{\alpha}\langle\tilde{\nu}, \sigma, 16\iota\rangle \subset \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, \langle\nu, \sigma, 16\iota\rangle\rangle = \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, \zeta\rangle \ni \phi \bmod \omega_2\pi_8^S(S^0) + 16\pi_{18}^S(Q_2) + i\bar{\eta}\circ\pi_{15}^S(M^2) + \pi_7^S(Q_2)\circ\zeta = H$. ここで、$\pi_7^S(Q_2) = \mathbb{Z}\{\widetilde{12\iota}\}$, $\widetilde{12\iota} \in \langle i, 2\nu, 12\iota\rangle$. $\widetilde{12\iota}\circ\zeta \in \langle i, 2\nu, 12\iota\rangle\circ\zeta \supset \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, 12\iota\rangle\circ\zeta \subset \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, 12\zeta\rangle \ni 12\phi \bmod 12\pi_7^S(Q_2)\circ\zeta + i\bar{\eta}\pi_{15}^S(M^2) = \{12\widetilde{12\iota}\circ\zeta, i\eta\kappa\}$. $p_*\phi = -\zeta$. $8\phi \in -i\bar{\eta}\langle\tilde{\eta}, \zeta, 8\iota\rangle = 0$. $\because$ $\bar{\eta}\langle\tilde{\eta}, \zeta, 8\iota\rangle \subset \langle 2\nu, \zeta, 8\iota\rangle \ni 0 \bmod 8\rho$. 故に、$\phi$ を Lemma 9 を満たす元 $\tilde{\zeta}$ としてよい。Lemma 7 より、$H = \{i\eta\kappa, 16i\rho, 12\tilde{\zeta}\}$.

この証明から分かるように、$\tilde{\zeta}$ として、$\langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, \zeta\rangle$ の元を選べばよい。

Lemmas 3, 9 より、$\tilde{\eta}'\eta\mu \in \tilde{\eta}'\eta\langle\eta, 2\iota, 8\sigma\rangle \subset \langle\tilde{\eta}'\eta^2, 2\iota, 8\sigma\rangle \subset \langle 4\omega_2, 2\iota, 8\sigma\rangle + \langle 8i\sigma, 2\iota, 8\sigma\rangle \subset \langle 4\omega_2, 8\iota, 2\sigma\rangle + \langle 8i\sigma, 2\iota, 8\sigma\rangle \supset 4\langle\omega_2, 8\iota, 2\sigma\rangle + i\langle 8\sigma, 2\iota, 8\sigma\rangle \ni 4\tilde{\zeta} + 16i\rho \bmod \pi_{11}^S(Q_2)\circ 2\sigma = 0$. $\therefore$

(4) $$\tilde{\eta}'\eta\mu = 4\tilde{\zeta} + 16i\rho.$$

さて、$\pi_{17}^S(P^2) = \mathbb{Z}_{32}\{i\rho\}$ は明らか。$t_2\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}'$ とおく。(4) と Lemma 3 より、

(4)' $$\gamma_3\eta\mu = 4\tilde{\zeta}' + 16i\rho; \qquad 4i\tilde{\zeta}' = 16i\rho.$$

(2) を用いれば、$f_1\sigma^2 = i\eta\sigma^2 = 0$, $f_1\kappa = i\eta\kappa$ より、$\pi_{17}^S(P^3) = \mathbb{Z}_8\{\tilde{\zeta}'\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\rho\}$.

完全列

$$\pi^S_{17}(S^7) \xrightarrow{\gamma_{3*}} \pi^S_{17}(P^3) \xrightarrow{i_*} \pi^S_{17}(P^4) \xrightarrow{p_*} \pi^S_{17}(S^8) \longrightarrow \ldots$$

において、$\gamma_3\mu \neq 0$, $\gamma_3\eta\mu = 4\tilde{\zeta}' + 16i\rho$, $\gamma_3\eta^2\sigma = \gamma_3\nu^3 = 0$.

Lemma 10. coextensions $\widetilde{\eta^2\sigma}$, $\tilde{\nu}^3$ をうまく選んで、$\#\tilde{\nu}^3 = 2$, $\#\widetilde{\eta^2\sigma} = 64$, $2\widetilde{\eta^2\sigma} = \pm i\tilde{\zeta}' \pm i\rho$.

Proof. $2\widetilde{\eta^2\sigma} \in -i\langle\gamma_3, \eta^2\sigma, 2\iota\rangle$. $p_3\langle\gamma_3, \eta^2\sigma, 2\iota\rangle \subset \langle\eta, \eta^2\sigma, 2\iota\rangle \ni \zeta$ より、$\langle\gamma_3, \eta^2\sigma, 2\iota\rangle \ni \tilde{\zeta}'$ mod $i\rho$. Lemma 9, (4)' より、$8\langle\gamma_3, \eta^2\sigma, 2\iota\rangle \subset \langle\gamma_3, \eta^2\sigma, 16\iota\rangle \supset \langle\gamma_3\eta^2, \sigma, 16\iota\rangle \subset \langle 4t_2\omega_2, \sigma, 16\iota\rangle + \langle 8i\sigma, \sigma, 16\iota\rangle \ni 4\tilde{\zeta}' + 8i\rho$ mod $\gamma_3\pi^S_{10}(S^0) + 16\pi^S_{17}(P^3) = \{4\tilde{\zeta}', 16i\rho\}$. $\therefore$ $16\widetilde{\eta^2\sigma} \equiv 4i\tilde{\zeta}' + 8i\rho = \pm 8i\rho$ mod $16i\rho$. 従って、$\widetilde{\eta^2\sigma}$ については証明された。

$2\tilde{\nu}^3 \in -i\langle\gamma_3, \nu^3, 2\iota\rangle$. $\langle\gamma_3, \nu^3, 2\iota\rangle \supset \langle\gamma_3\nu, \nu^2, 2\iota\rangle = \langle\pm i\tilde{\nu}\nu, \langle\eta, \nu, \eta\rangle, 2\iota\rangle$ で、Jacobi identity を使えばよい。

Lemma 10, (4)' より、$\pi^S_{17}(P^4) = Z_{64}\{\widetilde{\eta^2\sigma}\} \oplus Z_8\{\pm i\rho - 2\widetilde{\eta^2\sigma}\} \oplus Z_2\{\tilde{\nu}^3\}$.

ω_2 を出発する cofire 列から得られた次の完全列を考える；

$$\pi^S_{18}(S^{10}) \xrightarrow{\omega_{2*}} \pi^S_{18}(Q_2) \xrightarrow{i_*} \pi^S_{18}(Q_3) \xrightarrow{p_*} \pi^S_{18}(S^{11}) \longrightarrow \ldots .$$

$\tilde{\sigma} \in \langle i, \omega_2, \sigma\rangle$ とおく。Lemma 7, 9 より、$16\tilde{\sigma} \in -i\langle\omega_2, \sigma, 16\iota\rangle \ni -i\tilde{\zeta}$ mod $16i\rho$. 故に、$\tilde{\sigma}$ をうまく選べば、次が成り立つ。

Lemma 11. $16\tilde{\sigma} = -i\tilde{\zeta}$, $\pi^S_{18}(Q_3) = Z_{128}\{\tilde{\sigma}\} \oplus Z_{32}\{i\rho\}$.

$t_3\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}'$ とおく。Lemma 10, 11, (4)' より、$16\tilde{\sigma}' = -i\tilde{\zeta}'$, $64\tilde{\sigma}' = 4i\tilde{\zeta}' = 16i\rho = 32i\eta^2\sigma$. 故に、(1) より、$\pi_{17}^S(P^5) = \mathbf{Z}_{128}\{\tilde{\sigma}'\} \oplus \mathbf{Z}_{32}\{i\widetilde{\eta^2\sigma} - 2\tilde{\sigma}'\} \oplus \mathbf{Z}_2\{i\tilde{\nu}^3\}$.

Lemma 8 より、$\gamma_5\nu^2 = 0$. 故に、(1) より、$\pi_{17}^S(P^6) \cong \pi_{17}^S(P^5)$.

Lemma 12. $8i\tilde{\sigma} = 8a\omega_4 + 16bi\rho$, a: odd. $\pi_{18}^S(Q_4) = \mathbf{Z}_{128}\{\omega_4\} \oplus \mathbf{Z}_8\{i\tilde{\sigma} - a\omega_4 - 2bi\rho\} \oplus \mathbf{Z}_{32}\{i\rho\}$.

Proof. 次の可換図式を考える；

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_{19}(Q_3, Q_2) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_{18}(Q_2) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{18}(Q_3) & & & & \\
\downarrow p_* & & \downarrow j_{2*} & & \downarrow j_{3*} & & & & \\
\pi_{19}(S^{11}) & \xrightarrow{\Delta'} & \pi_{18}(Sp_2) & \xrightarrow{i'_*} & \pi_{18}(Sp_3) & \xrightarrow{p'_*} & \pi_{18}(S^{11}) & \longrightarrow & \dots .
\end{array}$$

Mimura-Toda より、$\pi_{18}(Sp_2) = \mathbf{Z}_8\{[\zeta_7]\} \oplus \mathbf{Z}_2\{i\bar{\varepsilon}_3\}$, $\pi_{18}(Sp_3) = \mathbf{Z}_{16}$. $\Delta'\sigma_{11} = j_2\omega_2\sigma_{10}$, $4p'j_2\omega_2\sigma_{10} = 4\nu_7\sigma_{10} \neq 0$. $\therefore\ \pi_{18}(Sp_3) = \mathbf{Z}_{16}\{[8\sigma_{11}]\}$, $2[8\sigma_{11}] = i[\zeta_7]$. Toda brackets $\{i, \nu', \zeta_6\}$, $\{i, \omega_2, 8\sigma_{10}\}$ は well-defined で、これらの元 $\tilde{\zeta}''_6$, θ は j_{2*}, j_{3*} によって、$[\zeta_7]$, $[8\sigma_{11}]$ を hit する。故に、James splitting により、stable で、$2\theta = i\tilde{\zeta}''$. $8\tilde{\zeta}''_6 \in -i\{\nu', \zeta_6, 8\iota_{17}\} \ni 0 \bmod 0$. $\because\ \langle 2\nu, \zeta, 8\iota\rangle \ni 0 \bmod 8\rho$, $\pi_{18}(S^3) = \mathbf{Z}_2\{\bar{\varepsilon}_3\}$, $\bar{\varepsilon} = \eta\kappa$. Lemma 6 より、$\tilde{\zeta}''_7 \in \{i, \bar{\eta}_4\tilde{\eta}_5, \zeta_7\} \supset \{i\bar{\eta}_4, \tilde{\eta}_5, \zeta_7\} \bmod \{i\bar{\varepsilon}_4\} + \pi_8(\Sigma Q_2)\circ\zeta_8$. 故に、Lemma 9 の証明より、stable で、$\tilde{\zeta}'' \in \langle i\bar{\eta}, \tilde{\eta}, \zeta\rangle \bmod \{i\eta\kappa, 12\tilde{\zeta}\}$. $\therefore\ \tilde{\zeta}'' \equiv \tilde{\zeta} \bmod \{i\eta\kappa\} + \{12\tilde{\zeta}\}$; $i\tilde{\zeta}'' = xi\tilde{\zeta}$, x: odd; $2\theta = -xi\tilde{\zeta}$.

(Q_4, Q_3), (Sp_4, Sp_3) の homotopy 完全列を含む可換図式を考え、

James splitting を使えば、$8\omega_4 = i\theta$. ∴ $16\omega_4 = 2i\theta = -xi\tilde{\zeta}$. $\theta \in \langle i, \omega, 8\sigma\rangle \supset \langle i, \omega_2, \sigma\rangle \circ 8\iota \ni 8\tilde{\sigma} \bmod i_*\pi^S_{18}(Q_2) = \{16\tilde{\sigma}, i\rho\}$. つまり、$\theta = 8c\tilde{\sigma} + di\rho$, c: odd; $16c\tilde{\sigma} + 2di\rho = 2\theta = xi\tilde{\zeta} = -16x\tilde{\sigma}$. 故に、Lemma 11 より、$d = 16e$ で、$8\omega_4 = 8ci\tilde{\sigma} + 16ei\rho$. $(c, 16) = 1$ より、a: odd, $ac + 16y = 1$ を満たす a, y が存在する。 $b = ae$ とすれば、関係式が得られる。これは次の短完全列が分裂することを意味する；

$$0 \longrightarrow \pi^S_{18}(Q_3) \xrightarrow{i_*} \pi^S_{18}(Q_4) \xrightarrow{p_*} \pi^S_{18}(S^{15}) \longrightarrow 0 .$$

証明終わり。

(1) と Lemma 12 より、$\pi^S_{17}(P^7) = \mathbb{Z}_{128}\{t_4\omega_4\} \oplus \mathbb{Z}_8\{i\tilde{\sigma}' - at_4\omega_4 - 2bi\rho\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\widetilde{\eta^2\sigma} - 2i\tilde{\sigma}'\} \oplus \mathbb{Z}_2\{i\tilde{\nu}^3\}$. これと Lemma 2 より、$\gamma_7\eta^2 = 4\alpha + wi\tilde{\nu}^3$, $\alpha = i\tilde{\sigma}' - at_4\omega_4 - 2bi\rho$ としてよい。

$\nu_4: S^7 \longrightarrow S^4$ を出発する cofibre 列を使って、次を得る。

Lemma 13. $\pi^S_{16}(\mathbb{H}P^2) = Z_2\{\tilde{\bar{\nu}}''\} \oplus Z_2\{\tilde{\eta}''\sigma\}$, $\tilde{\bar{\nu}}'' \in \langle i, \nu, \bar{\nu}\rangle$, $\tilde{\eta}'' \in \langle i, \nu, \eta\rangle$; $\pi^S_{17}(\mathbb{H}P^2) = Z_2\{\tilde{\nu}''^3\} \oplus Z_2\{\tilde{\eta}''\eta\sigma\} \oplus Z_2\{\tilde{\mu}''\}$, $\tilde{\nu}''^3 = \tilde{\bar{\nu}}''\eta$, $\tilde{\mu}'' \in \langle i, \nu, \mu\rangle$.

Lemma 13 より、$\gamma_3(\mathbb{H})\eta^2 = wi\tilde{\nu}''^3$. ∵ $h_3 i\tilde{\nu}^3 \in i\langle h_2 i', \gamma_3, \nu^3\rangle = i\langle i'' q_1, \gamma_3, \nu^3\rangle \subset i\langle i'', \nu, \nu^3\rangle \ni i\tilde{\nu}''^3 \bmod i_*\pi^S_8(\mathbb{H}P^2)\nu^3 = 0$. $\gamma_3(\mathbb{H})\eta^2 \in \langle i, \gamma_2(\mathbb{H}), \nu\rangle\eta^2 = -i\langle\gamma_2(\mathbb{H}), \nu, \eta\rangle\eta \ni i\tilde{\nu}''^3 \bmod i\tilde{\eta}''\eta\sigma$. ∵ $p_*\langle\gamma_2(\mathbb{H}), \nu, \eta\rangle \subset \langle 2\nu, \nu, \eta\rangle \ni \bar{\nu} \bmod \eta\sigma$, $\mathrm{Ker}\, p_* = i_*\pi^S_{16}(S^4) = 0$.
故に、w: odd で、$\gamma_7\eta^2 = i\tilde{\nu}^3 + 4\alpha$. (1) より、次の結果を得る。

Theorem 2. i) $\pi^S_{17}(P^8) = \mathbb{Z}_{128}\{\gamma_8\} \oplus \mathbb{Z}_8\{i\tilde{\sigma}' - a\gamma_8 - 2bi\rho\} \oplus$ $\mathbb{Z}_{32}\{i\widehat{\eta^2\tilde{\sigma}} - 2i\tilde{\sigma}'\}$.

ii) $\pi^S_{17}(P^9) = \mathbb{Z}_8\{i\tilde{\sigma}' - 2bi\rho\} \oplus \mathbb{Z}_{32}\{i\widehat{\eta^2\tilde{\sigma}} - 2i\tilde{\sigma}'\}$.

Theorem A の記号の説明の続き; $\tilde{\nu}^2 \in \langle i, \gamma_4, \nu^2\rangle$; ♤ $= i\tilde{\sigma}' - 2bi\rho$; ♧ $= i\widehat{\eta^2\tilde{\sigma}} - 2i\tilde{\sigma}'$.

§4. 最後に、S^1-transfer の image を決定しよう。

$B_k = \mathrm{Im}\,\{g_{n*}: \pi^S_{k-1}(P^{n-1}) \longrightarrow \pi^S_k(S^0),\ k \le 2n-1\}$ で、$B_1 = B_2 = 0$; $B_3 = \pi^S_3(S^0)$; $B_4 = B_5 = 0$; $B_6 = \pi^S_6(S^0)$; $B_7 = 2\pi^S_7(S^0)$; $B_8 = Z_2\{\bar{\nu}\}$; $B_9 = Z_2\{\eta^2\sigma\} \oplus Z_2\{\nu^3\}$; $B_{10} = Z_3\{\beta_1\}$; $B_{11} = \pi^S_{11}(S^0)$ であった。$B_{12} = 0$.

Theorem B. $B_{13} = \mathbb{Z}_3\{\alpha_1\beta_1\}$; $B_k = \pi^S_k(S^0)$, $k = 14, 19$; $B_{15} = \mathbb{Z}_{240}\{2\rho\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta\kappa\}$; $B_{16} = \mathbb{Z}_2\{\omega^*\}$; $B_{17} = \mathbb{Z}_2\{\eta\omega^*\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta^2\rho\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu\kappa\}$; $B_{18} = \mathbb{Z}_8\{\nu^*\}$, ここに、$\omega^* = \eta^* + a\eta\rho$, $a = 0$ または 1 である。

証明の概要。Theorem 1 の証明より、$g_4\tilde{\bar{\nu}} = \eta\kappa$ であった。$g_n\zeta_{n-1}$ は complex J-homomorphism の image の生成元であることを思い出せば、$g_8\zeta_7 = 2\rho$, $g_9\zeta_8 = \eta^2\rho$, $g_{10}\zeta_9 = \xi$. $\therefore$ $B_{15} = \mathbb{Z}_{240}\{2\rho\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta\kappa\}$.

Lemma 14. $g_4\tilde{\sigma}' = \sigma^2$; $g_6\widetilde{2\nu}^! \equiv \kappa \bmod \sigma^2$.

Proof. $g_4\tilde{\sigma}' = g_4 t_2\tilde{\sigma} = g_2(\mathbb{H})\tilde{\sigma} \in \langle\nu, 2\nu, \sigma\rangle \ni 0 \bmod \sigma^2$. 一方、$\langle i, 2\nu, \sigma\rangle = \Sigma^\infty\{i, 2\nu_{10}, \sigma_{13}\}$ より、$\tilde{\sigma} = \Sigma^\infty\tilde{\sigma}_{13}$, $\tilde{\sigma}_{13} \in \{i, 2\nu_{10}, \sigma_{13}\}$ としてよい。$H: \pi_{22}(S^8) \longrightarrow \pi_{22}(S^{15})$ を Hopf homomorphism とすれば、$H(g_2(\mathbb{H})\circ\Sigma\tilde{\sigma}_{13}) = H(g_2(\mathbb{H}))\circ\Sigma\tilde{\sigma}_{13} = \pm\ p\circ\Sigma\tilde{\sigma}_{13} = \pm\ \sigma_{15}$. $\therefore$ $g_2(\mathbb{H})\circ\Sigma\tilde{\sigma}_{13} \equiv$

$\pm\ \sigma_8\sigma_{15}$ mod $\Sigma\pi_{21}(S^7) = \{\Sigma\sigma'\circ\sigma_{15}, \kappa_8\}$. $\therefore\ g_4\tilde{\sigma}'' = \sigma^2$.

$g_6\widetilde{2\nu}^! = g_6 t_3(\widetilde{2\nu}' - 2i\sigma) = g_3(\mathbb{H})\widetilde{2\nu}' \in \langle\nu, \overline{2\nu}, \widetilde{2\nu}\rangle \equiv \langle\nu, 2\nu, \nu, 2\nu\rangle \ni_{\circ}\kappa$ mod σ^2. $\therefore\ g_6\widetilde{2\nu}^! \equiv \kappa$ mod σ^2.

Lemma 15. $g_4\tilde{\mu} = 0$; $g_7\tilde{\tilde{\nu}}'' = \omega^*$; $g_7\tilde{\tilde{\sigma}}' = \nu^*$; $g_3\tilde{\sigma}^2 = \bar{\sigma}$.

Proof. $g_4 = \pm\ \sigma p \pm \bar{\bar{\nu}}$, $\bar{\bar{\nu}}$: $g_2 = \nu$ の extension であり、$0 = g_4\gamma_3 = \sigma\eta + \bar{\bar{\nu}}\gamma_3$ より、$\bar{\bar{\nu}}\gamma_3 = \eta\sigma$. $\tilde{\mu} \in \langle\gamma_3, 8\sigma, 2\iota\rangle$ mod $\gamma_3\pi_8^S(S^0) + 2\pi_{16}^S(S^0) + i_*\pi_{15}^S(P^2) = \{\gamma_3\eta\sigma, \gamma_3\bar{\nu}\} + \{i\langle i', \eta, \zeta\rangle\}$ より、$g_4\tilde{\mu} = \sigma\mu + \bar{\bar{\nu}}\tilde{\mu}$, $\bar{\bar{\nu}}\tilde{\mu} \in \langle\eta\sigma, 8\sigma, 2\iota\rangle \ni \eta\rho = \sigma\mu$ mod $\langle\nu, \eta, \zeta\rangle = 0$. $\because\ \eta\langle\nu, \eta, \zeta\rangle = -\langle\eta, \nu, \eta\rangle\circ\zeta \ni \nu^2\zeta = 0$ mod 0. $\therefore\ g_4\tilde{\mu} = 0$.

$g_7\tilde{\tilde{\nu}}'' \in \langle g_6, \gamma_5, \nu\rangle = \Sigma^\infty\{\Sigma^2 g_6, \Sigma^{15}\gamma_5, \nu_{26}\}_1$. $H\{\Sigma^2 g_6, \Sigma^{15}\gamma_5, \nu_{26}\}_1 \ni \pm\ \nu_{27}$. [T2] の Lemma 12.15 より、$H(\omega_{14}) = \nu_{27}$ となる元 $\omega_{14} \in \pi_{30}(S^{14})$ が存在する。$\therefore\ \{\Sigma^2 g_6, \Sigma^{15}\gamma_5, \nu_{26}\}_1 \ni \pm\ \omega_{14}$ mod $\Sigma^2 g_6\circ\pi_{30}(\Sigma^{15}P^4) + \pi_{27}(S^{14})\circ\nu_{27} + \Sigma\pi_{29}(S^{13})$. $\therefore\ g_7\tilde{\tilde{\nu}}'' \equiv \omega$ mod $g_6\pi_{15}^S(P^4) + \{\eta\rho\} = \{\eta\rho\}$. $\because\ i_*\pi_{15}^S(P^4) = Z_2\{i\tilde{\mu}\}$, i: $P^4 \subset P^8$ は認めることにする。$\omega \equiv \eta^*$ mod $\eta\kappa$ より、第2の主張を得る。第3の主張の証明は略す。

$g_3\tilde{\sigma}^2 \in \langle\nu, \eta, \sigma^2\rangle \subset \langle\nu, \eta\sigma, \sigma\rangle \ni \bar{\sigma}$ mod 0. 証明終わり。

Remark. Knapp によれば、S^1-transfer の image に入らない元は、次の通りである：μ-series μ_r, ηm_r, $r \geq 0$; ρ_r, $\eta\rho_r$, $r \geq 1$, ρ_r は J-image $J\pi_{8r-1}^S(SO)$ の 2-成分の生成元である。

Conjecture. S^1-transfer の image に入らない元は、本質的に、上記の Knapp が指摘した元のみである。

References

[B-B] W. D. Barcus and M. G. Barratt, On the homotopy classification of the extension of a fixed map, Trans. Amer. Math. Soc., 88(1958), 57-74.

[J] I. M. James, The topology of Stiefel manifolds, London Math. Soc. Lecture Note, 24(1976), Cambridge.

[K] K. Knapp, Some applicatios of the K-theory to framed cobordism: e-invariant and transfer, Habilitationsschrift, Bonn, 1979.

[M] M. Mimura, Quelques groupes d'homotopie metastables des espaces symmetriques Sp(n) et U(2n)/Sp(n), C. R. Acad. Paris, 262(1966), 20-21.

[M-T] M. Mimura and H. Toda, Homotopy groups of symplectic groups, J. Math. Kyoto Univ., 3(1964), 217-50.

[Mo] R. E. Mosher, Some stable homotopy of complex projective space, Topology, 7(1968), 179-93.

[Mu] J. Mukai, The S^1-transfer map and homotopy groups of suspended complex projective spaces, Math. J. Okayama Univ., 24(1984), 179-200.

[T1] H. Toda, A topological proof of theorems of Bott and Borel-Hirzebruch for homotopy groups of unitary groups, mem. Coll. Sci. Kyoto Univ., 32(1959), 103-19.

[T2] H. Toda, Composition methods in homotopy groups of spheres, Ann. of Math. Studies, 49(1962), Princeton.

あとがき。

以上が、本研究集会当日に用意いていた原稿であるが、今読み返してみると、記述不足や誤りがある。ここでは、次の3点について、注意する。

1. p. 3. Theorem 1 の証明において、$i^*: \varepsilon(P^n) \longrightarrow \varepsilon(P^{n-1})$ は onto としたが、一般には、$n \geq 3$ のとき、$\mathrm{Im}\, i^* = \{ \alpha \in \varepsilon(P^{n-1}) \mid \alpha\gamma_{n-1} = \pm \gamma_{n-1} \}$ [B-B] である。これ以外の証明は通用するので、$3 \leq n \leq 6$ のとき、i^* は onto で、$\varepsilon(P^n) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ となる。Theorem 1 に変更はない。

2. p. 11. Theorem A の記号の説明；より正確には、♤ = $i\tilde{\sigma}'$, ♧ = $i'\widehat{\eta^2\tilde{\sigma}}$ としてよい。2♧ = $\pm\, i\rho$ となる。

3. p. 12. 講演の中で、教えていただいたことであるが、$\langle\sigma, 2\sigma, \sigma, 2\sigma\rangle$ という Kervaire invariant 1 の元は（証明は知らないが）S^1-transfer の image ではないとのことで、Conjectue には反例がある。

以上 (1992.1.8)