

可積分方程式の摂動

京大理学部 川原琢治 (Takuji Kawahara)

可積分なソリトン方程式は摂動展開の最低次近似であるが、高次項はどのような影響を及ぼすか、あるいは散逸性、不安定性、外力などの非保存項はどのような影響を及ぼすかについて総括的に報告するのが本講演の与えられた課題であった。可積分性が破れる場合として、(A) 摂動展開の高次近似 (保存的摂動)、(B) 可積分に近い場合のカオス (非保存的摂動)、(C) 空間高次元への拡張、などが考えられる。講演では時間的な制約から、主として (A) の問題について述べ、(B) については少しだけ、(C) については触れることができなかった。ここでは、(A) については KdV 方程式あるいは非線形 Schrödinger (NLS) 方程式の高次近似の問題と非線形変調における周波数低下の問題を、(B) については逆散乱法に基づく摂動展開の問題を取り上げて報告する。

§ 1. 減滅摂動の高次近似

ソリトン方程式 (KdV 方程式、NLS 方程式など) は摂動展開の最低次近似で得られる方程式であるが、無視された高次項はどのような影響を及ぼすか? 可積分性はどうなるか? などが問題となる。ソリトンに対する高次補正は次のような経過で取り上げられてきた。

(1) ソリトンに対する高次補正

Ichikawa et al. (1976, 1977)¹⁾ は減滅摂動法を高次まで進めソリトンに対する高次補正を取り入れた。補正項の加わったソリトンは "dressed soliton" と呼ばれ、その振舞いが調べられたが、補正項には長時間発散を示す永年項 (secular term) が含まれることが示された。

(2) 永年項の消去

Kodama-Taniuti(1978,1979)²⁾は、保存量の汎関数微分項を加えることにより、永年項のソリトン速度(周波数)への“繰り込み”(renormalization)が可能となることを示した。彼らは、① 高次近似は非一様(source)項を含む線形化KdV方程式で表され、自己共鳴により永年項を生じる。② 永年項は保存量の微分を加えることにより消去できる。1次の補正項を含むKdV方程式は可積分な一般化KdV方程式に書き直せる。③ 永年項はソリトンに繰り込むことが可能で、速度のシフトを与える。非線形補正はKdVソリトンのdressとなる。などの性質を明らかにした。その結果、補正項が加わったKdV方程式やNLS方程式が、厳密に解ける一般化KdV方程式またはNLS方程式に帰着できることを明らかにした。

(3) normal form analysis

高次補正項の繰り込みの手続きを一般化したものがKodama(1985,1988)³⁾によるnormal form analysisである。摂動を受けた可積分系を変換によって厳密に解ける方程式(normal form)に書き直す方法はnormal form analysisと呼ばれている。このアイデアは有限次元力学系におけるBirkhoffのノーマル・フォーム理論と同様である。すなわち、摂動ハミルトン系を逐次カノニカル変換によって可積分normal formに書き直すのと同じように可積分系+高次補正の方程式をLie変換によって高次可積分系(normal form)に書き直すのである。

KdV方程式の高次近似は次のような形で与えられる:

$$u_t + u_x + \varepsilon X_0^{(0)}(u) + \varepsilon^2 X^{(1)}(u) + \varepsilon^3 X^{(2)}(u) = O(\varepsilon^4) \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} X_0^{(0)}(u) = a_1^{(0)} u_{3x} + a_2^{(0)} u u_x \quad (a_1^{(0)} = 1, a_2^{(0)} = 6; \text{KdV eq.}) \\ X^{(1)}(u) = a_1^{(1)} u_{5x} + a_2^{(1)} u u_{3x} + a_3^{(1)} u_x u_{2x} + a_4^{(1)} u^2 u_x \\ X^{(2)}(u) = a_1^{(2)} u_{7x} + a_2^{(2)} u u_{5x} \dots \end{cases}$$

(添字 t , x は微分を表すものとする)

これを次のLie変換:

$$u = v + \varepsilon \phi^{(1)}(v) + \varepsilon^2 (\phi^{(2)} + \frac{1}{2} \phi^{(1)} \cdot \nabla \phi^{(1)})(v) + O(\varepsilon^3) \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} \phi^{(1)}(v) = \alpha_1^{(1)} v_{2x} + \alpha_2^{(1)} v^2 + \alpha_3^{(1)} v_x \int_{-\infty}^x v dx \\ \phi^{(2)}(v) = \alpha_1^{(2)} v_{4x} + \alpha_2^{(2)} v v_{2x} + \alpha_3^{(2)} v_x^2 + \alpha_4^{(2)} v^3 \\ \quad + \alpha_5^{(2)} v_x \int_{-\infty}^x v^2 dx + \alpha_6^{(2)} (v_{3x} + 6 v v_x) \int_{-\infty}^x v dx \end{cases}$$

によって下記の方程式に書き直す。 係数 α_j は a_j に依存して決まる。

normal form:

$$v_t + v_x + \varepsilon X_0^{(0)}(v) + \varepsilon^2 X_0^{(1)}(v) + \varepsilon^3 X_0^{(2)}(v) = O(\varepsilon^4) \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} X_0^{(1)}(v) = a_1^{(1)} \partial_x \nabla I_3^{(0)}(v) \\ X_0^{(2)}(v) = a_1^{(2)} \partial_x \nabla I_4^{(0)}(v) + \mu \partial_x R^{(2)}(v) \end{cases}$$

Kodama(1988)³⁾ は水面波に対し (1.3) の形の式を導いた。 適当な表面張力の

値に対して $\mu = 0$ となる。 $I_3^{(0)}$ 、 $I_4^{(0)}$ はKdVの保存量であり、例えば

$I_3^{(0)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (v_{2x}^2 - 10 v v_x + 5 v^4) dx$ である。 $R^{(2)}$ はKdVの保存量の汎関数微分で書き表せない部分を表し、 $R^{(2)}(v) = -(2 v v_{4x} + v_x v_{3x} - 3 v_{2x}^2 + 10 v^2 v_{2x} + 10 v v_x^2 + 5 v^4) / 100$ である。

(1.3) 式のように汎関数微分の項で表現された形はnormal formと呼ばれる。

(1.3) は、 $\mu \neq 0$ のとき ε の2次の近似まで可積分である。 $\mu = 0$ のときには ε の3次の近似まで可積分となる。 これらの方程式はLax hierarchyと呼ばれる高次の可積分方程式に他ならない。

$v_s(x, t) = 2 \kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - \lambda t)$ を (1.3) に代入すると $R^{(2)}(v_s) = 0$ となり、(1.3) はKdVソリトンの形の1-ソリトン解を許すことが分かる。

この v_s を変換 (1.2) の逆変換により u に戻すと

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^3 \sum_{j=1}^n \varepsilon^{n-1} \beta_j^{(n-1)} \kappa^{2n} \operatorname{sech}^{2j} \kappa(x - \lambda t) \quad (1.4)$$

となる。

この解はFentonの "ninth wave" と呼ばれる大振幅孤立波解の形と一致する。

Fenton(1972)⁴⁾は水面波に対して、無次元振幅 $\delta = a/h = \text{振幅}/\text{水深}$ による δ^9 までの展開 (κ^{18} までの展開) を計算機で実行し、(1.4) 式と同じ形の展開式を導いた。その解が最大波高の孤立波 ($\delta = 0.85$) の厳密数値解と一致することを示した。(1.4) は κ^6 までの展開であるが、形式的にはFentonの振幅展開による解と一致するので、これはnormal form analysisを用いて大振幅波の記述へ一歩進むことの可能性を示唆している。

Kodama(1988)³⁾は、さらに(1.3)に基づいて、ソリトンの相互作用を調べた。初期に κ_1, κ_2 ($\kappa_1 > \kappa_2$)、 $\kappa_3 = 0$ とし、normal formの保存則と逆散乱法による摂動計算によりソリトン・パラメーターのshift $\Delta \kappa_1, \Delta \kappa_2, \Delta \kappa_3$ を求めた。そして以下の結果を得た。① 非可積分項 $R^{(2)}(v)$ は相互作用において輻射 (radiation) を生じる。② ソリトン・パラメーターのshiftは $R^{(2)}$ 項に依存して与えられ、 $\Delta \kappa_1 > 0, \Delta \kappa_2 < 0$ ($\kappa_1 > \kappa_2$) となる。すなわち、衝突後、大きい孤立波の振幅は増大し、小さい孤立波の振幅は減少する。③ $\Delta \kappa_3 > 0$ となる。これは新しい孤立波が生成されることを意味する。

§ 2. NLS方程式の高次近似

NLS方程式の場合についても、KdV方程式の場合と同様な高次近似が考えられている。Kodama-Hasegawa(1987)⁵⁾は光ソリトン (optical soliton) の高次方程式として

$$i q_t + \frac{1}{2} q_{xx} + |q|^2 q + \varepsilon i \{ \beta_1 q_{xxx} + \beta_2 (|q|^2 q)_x + \beta_3 q (|q|^2)_x \} = 0 \quad (2.1)$$

を導いた。これは次の変換 (Lie変換と呼ばれる)

$$Q = q - \varepsilon i (3\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2) q_x - \varepsilon i (6\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3) q \int_{-\infty}^x |q(x')|^2 dx' + O(\varepsilon^2) \quad (2.2)$$

によつて

$$i Q_t + \frac{1}{2} Q_{xx} + |Q|^2 Q + \varepsilon i \beta_1 (Q_{xxx} + 6 |Q|^2 Q_x) = O(\varepsilon^2) \quad (2.3)$$

と書き換えることができる。この方程式 (2.3) は NLS 方程式と同じ形式の固有値問題の逆散乱法で解ける。

固有値問題:

$$\left. \begin{aligned} i \partial \psi_1 / \partial x + Q \psi_2 &= \zeta \psi_1 \\ -i \partial \psi_2 / \partial x - Q^* \psi_1 &= \zeta \psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

を考える。固有関数の時間発展が

$$\left. \begin{aligned} \partial \psi_1 / \partial t &= A \psi_1 + B \psi_2 \\ \partial \psi_2 / \partial t &= C \psi_1 - A \psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A &= -4 i \varepsilon \beta_1 \zeta^3 - i \zeta^2 + 2 i \varepsilon \beta_1 |Q|^2 \zeta + \frac{1}{2} |Q|^2 \\ &\quad + \varepsilon \beta_1 (Q Q^*_x - Q^* Q_x) \\ B &= 4 i \varepsilon \beta_1 Q \zeta^2 + i (Q + 2 i \varepsilon \beta_1 Q_x) \zeta \\ &\quad - i \varepsilon \beta_1 (Q_{xx} + 2 |Q|^2 Q) - \frac{1}{2} Q_x \\ C &= 4 i \varepsilon \beta_1 Q^* \zeta^2 + i (Q^* - 2 i \varepsilon \beta_1 Q^*_x) \zeta \\ &\quad - i \varepsilon \beta_1 (Q^*_{xx} + 2 |Q|^2 Q^*) + \frac{1}{2} Q^*_x \end{aligned} \right.$$

で与えられるとすると、整合条件または無矛盾条件 (compatibility condition)

$$\partial^2 \psi_n / \partial x \partial t = \partial^2 \psi_n / \partial t \partial x \quad (n=1, 2)$$

は、ちょうど (2.3) 式 + $\partial \zeta / \partial t = 0$ となる。これは、(2.3) 式を満たすとき固有値 ζ が一定となることを表す。

逆変換: $q = Q + \varepsilon i (3 \beta_1 - \frac{1}{2} \beta_2) Q_x + \varepsilon i (6 \beta_1$

$$-2\beta_2 - \beta_3) Q \int_{-\infty}^{\infty} |Q(x')|^2 dx' + O(\epsilon^2) \quad (2.6)$$

により、 Q から q に戻すことができる。以上より、高次NLS方程式(2.1)の初期条件 $q_0(x)$ に対する解 $q(x, t)$ は、変換 $q \rightarrow Q$ により $Q_0(x)$ を出し、ポテンシャル Q に対する固有値問題(2.4)を解いて $Q(x, t)$ を求め、逆変換 $Q \rightarrow q$ を用いることにより得られる。

周波数低下の問題: Kodama-Hasegawa(1987)⁵⁾は光ソリトンの方程式として次の形の高次NLS方程式を導いた。

$$i q_t + \frac{1}{2} q_{xx} + |q|^2 q = \epsilon h \quad (2.7)$$

$$h \equiv -i \{ \beta_1 q_{xxx} + \beta_2 (|q|^2 q)_x + (\beta_3 + i \sigma_3) q (|q|^2)_x \}$$

この方程式には遅延ラマン効果 (retarded Raman effect) と呼ばれ、高周波から低周波へのエネルギー移動を表す非線形散逸項 (σ_3 に比例する項) が加わっている点が(2.1)式と異なっている。そして、NLS方程式の保存量であるエネルギーとエネルギー流束の保存関係は次のように修正される。

$$i (\partial / \partial t) \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 dx = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} (h q^* - h^* q) dx = 0 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} i (\partial / \partial t) \int_{-\infty}^{\infty} (q q^*_x - q^* q_x) dx = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} (h q^*_x + h^* q_x) dx \\ & = \epsilon \sigma_3 \int_{-\infty}^{\infty} (|q|^2_x)^2 dx - i \epsilon (\beta_2 + \beta_3) \int_{-\infty}^{\infty} (q q^*_x - q^* q_x) |q|^2 dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

(2.8)は高次項 h が存在する場合でもエネルギーが保存されることを示す。

(2.9)は高次項がエネルギー流束 (energy flux) の変化に寄与することを示している。

NLS方程式の1-ソリトン解: $q(x, t) = \eta \operatorname{sech} \eta (x + \kappa t - \theta_0) \times \exp \{-i \kappa x + \frac{1}{2} i (\eta^2 - \kappa^2) t - i \sigma_0\}$ を(2.8)、(2.9)に代入し、準定常 (quasi-stationary) を仮定すると、ソリトンのパラメータ変化が次

のように与えられる:

$$d\eta/dt = 0, \quad d\kappa/dt = -(8/15) \varepsilon \sigma_3 \eta^4 \quad (2.10)$$

従って、ソリトンの振幅は変化しないが、 σ_3 の存在により κ が変化することが分かる。これは、搬送波の周波数が低下 (down-shift) することに対応する。

§ 3. 非線形変調における周波数低下の問題

水面波の非線形変調における周波数低下 (frequency down-shift) の詳細については、田中光宏氏の解説を参照して頂くことにして、ここでは、簡単に研究経過に触れ、最も簡単な3モード・モデルを用いて周波数低下を起こす機構の可能性の一つを指摘することにする。

(1) 周波数低下の観測

Lake et al.(1977)⁶⁾は連続な波列の変調不安定により低側帯波が高側帯波より速く成長し、搬送波のエネルギーが側帯波のエネルギーより小さくなることを観測した。変調不安定により低側帯波が支配的となり、初期条件への近似的回帰を示すこと、周波数低下は砕波 (breaking) を伴う場合があることを見いだした。Melville(1982)⁷⁾は変調が最大するとき (低側帯波がピークするとき) 砕波が起こりスペクトルの回帰を不可能にすることを観測した。

(2) 周波数低下の理論的説明の試み

NLS方程式は対称で両側帯波は同じ成長率をもつので、変調不安定で側帯波にエネルギーが移っても非対称にはならず、回帰して初期条件に戻るので、down-shiftは説明できない。(Su(1982)⁸⁾) 一方、弱非線形の近似をせずにLaplace方程式を数値的に解くと振幅 (steepness) に応じて、回帰する (down-shiftしても元に戻る) 場合と、砕波を起こしてdown-shiftする場合とがある。このことは、down-shiftには砕波のような何らかの非可逆効果が必要であることを示唆している。

(3) D y s t h e 方程式

Dysthe(1979)⁹⁾はNLS方程式の高次近似を行い次式を導いた。

$$\begin{aligned}
& 2i(A_t + \frac{1}{2}A_x) - \frac{1}{4}A_{xx} - |A|^2A - iA_{xxx}/8 - i\frac{1}{2}A^2A^*_x \\
& + 3i|A|^2A_x - 2A\phi_x|_{z=0} = 0 \\
& \left\{ \begin{array}{ll} \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 & (-h < z < 0) \\ \phi_z = \frac{1}{2}\omega|A|^2_x & (z = 0) \\ \phi_z = 0 & (z = -h) \end{array} \right. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

あるいは長波長成分 ϕ を消去し簡単化した式:

$$\begin{aligned}
iA_t - A_{xx} - |A|^2A + 8i\epsilon|A|^2A_x - 2\epsilon AH(|A|^2_x) = 0 \\
(H: \text{Hilbert変換}) \quad (3.2)
\end{aligned}$$

は、simplified Dysthe方程式と呼ばれる。

Dysthe方程式に含まれる高次項は非対称であり、初期の非対称成長を説明することができる。しかしそれは一時的なもので、この場合も保存系であるので回帰が起こり、スペクトルは周期的に変調を受ける。変調が最大のときに低側帯波にdown-shiftしたように見えるが、低周波数への一方的なエネルギーの移動は説明できない。(Janssen(1983)¹⁰⁾, Lo & Mei(1985)¹¹⁾)

Trulsen-Dysthe(1989)¹²⁾はDysthe方程式に砕波の効果を取り入れdown-shiftの説明を行った。彼らは風および砕波の効果を表す項を(3.2)式の右辺に

$$\text{右辺} = i(S_1 + S_2) \quad S_1 = \beta A \quad (\text{風の効果})$$

$$S_2 = -\tau^{-1}A \{ (|A|/A_c)^r - 1 \} h(|A| - A_c)$$

(breakingの効果、 h は階段関数、 r は適当な整数)

を付け加えることによりdown-shiftが起こり得ることを明らかにした。このように、down-shiftが起こるためには何らかの散逸機構を含む非線形相互作用が重要となる。

(4) 3モード・モデル

Kodama-Hasegawa(1987)が導いた方程式(2.7)において、 σ_3 の項の存在がdown-shiftに関連していたことから、simplified Dysthe方程式(3.2)に非線形減衰項を付加した

$$i A_t - A_{xx} - |A|^2 A + 8i |A|^2 A_x - (2\varepsilon + i\sigma) A H(|A|^2_x) = 0 \quad (3.3)$$

を考える。後述するようにFabrikant(1984)¹³⁾によれば、散逸系での波束の伝播においても同様な項が現れることが示されている。ここでは簡単なモデルとして(3.3)を採用し、さらに簡単化して3モード・モデルを取り扱う。

波数 k_0 、 k_1 、 k_2 ($k_1 = k_0 + \Delta k$ 、 $k_2 = k_0 - \Delta k$)をもつ3つの波を考える。

$$A = A_0 \exp(i k_0 x) + A_1 \exp(i k_1 x) + A_2 \exp(i k_2 x) + c.c.$$

を(3.3)に代入し、 $A_0 = a_0 \exp(i \phi_0)$ 、 $A_1 = a_1 \exp(i \phi_1)$ 、 $A_2 = a_2 \exp(i \phi_2)$ と置くと、3波非線形相互作用に対して

$$d a_0 / d t - 2 \alpha a_0 a_1 a_2 \sin \Phi - \gamma (a_1^2 - a_2^2) a_0 = 0 \quad (3.4)$$

$$d a_1 / d t + (\alpha - \beta) a_0^2 a_2 \sin \Phi + \gamma \{ (a_0^2 + 2 a_2^2) a_1 + a_0^2 a_2 \cos \Phi \} = 0 \quad (3.5)$$

$$d a_2 / d t + (\alpha + \beta) a_0^2 a_1 \sin \Phi - \gamma \{ (a_0^2 + 2 a_1^2) a_2 + a_0^2 a_1 \cos \Phi \} = 0 \quad (3.6)$$

$$d \Phi / d t - 2 (\Delta k)^2 + 2 \alpha a_0^2 - (\alpha + 4 \beta) a_1^2 - (\alpha - 4 \beta) a_2^2 + \{ (\alpha - \beta) a_0^2 a_2 / a_1 + (\alpha + \beta) a_0^2 a_1 / a_2 - 4 \alpha a_1 a_2 \} \cos \Phi + \gamma \{ a_0^2 (a_1^2 - a_2^2) / a_1 a_2 \} \sin \Phi = 0 \quad (3.7)$$

$$\{ \Phi = 2 \phi_0 - \phi_1 - \phi_2, \alpha \equiv 1 + 8 \varepsilon k_0, \beta \equiv 2 \varepsilon \Delta k, \gamma \equiv \sigma \Delta k \}$$

を得る。

適当な初期値を与え(3.4)~(3.7)をパソコンで解いた結果を図1に示す。

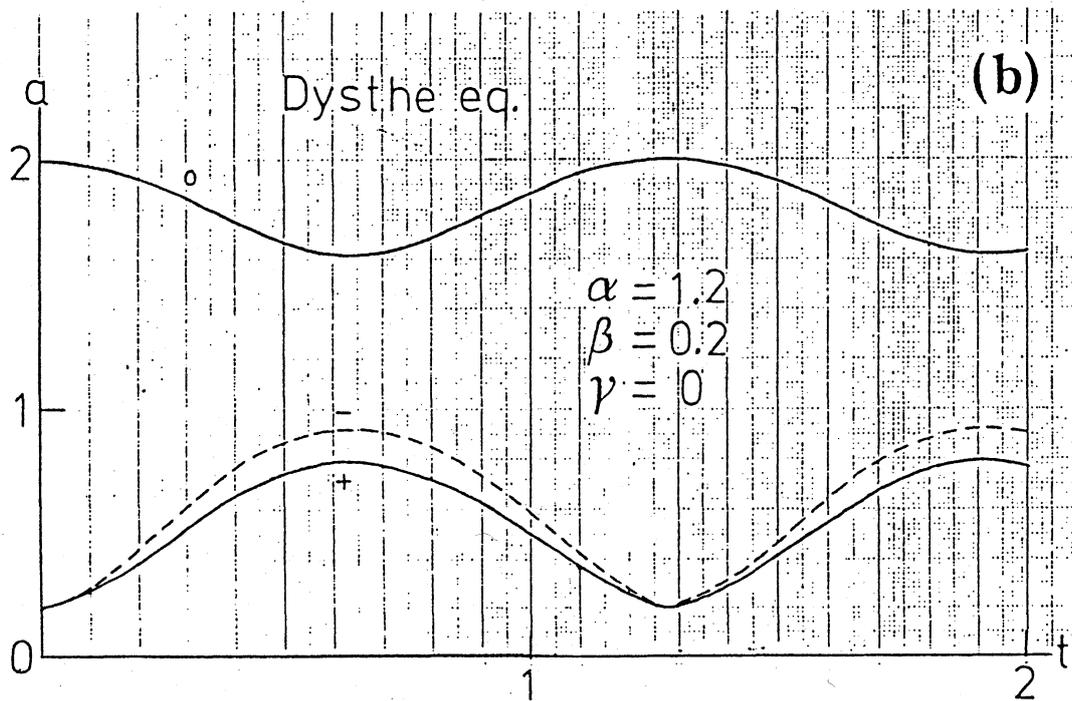
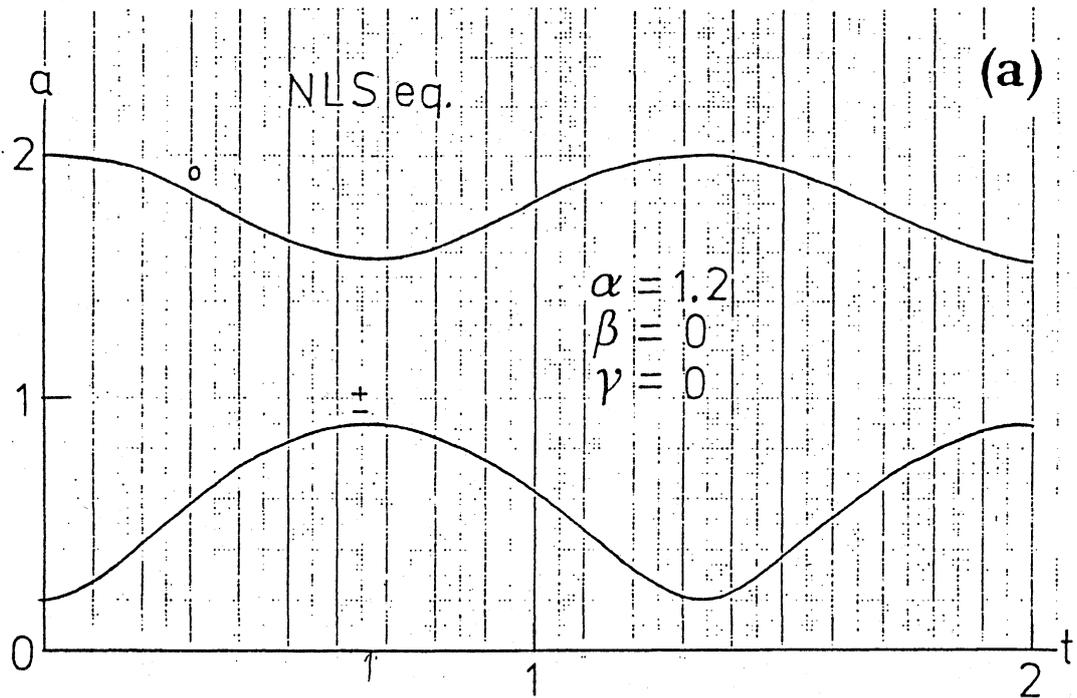


図1. (3.4)~(3.7)の数值解。(初期値: $a_0=2$, $a_1=a_2=0.2$)

(a) NLS方程式 ($\beta = \gamma = 0$): 対称、回帰

(b) Dysthe方程式 ($\gamma = 0$): 非対称、回帰

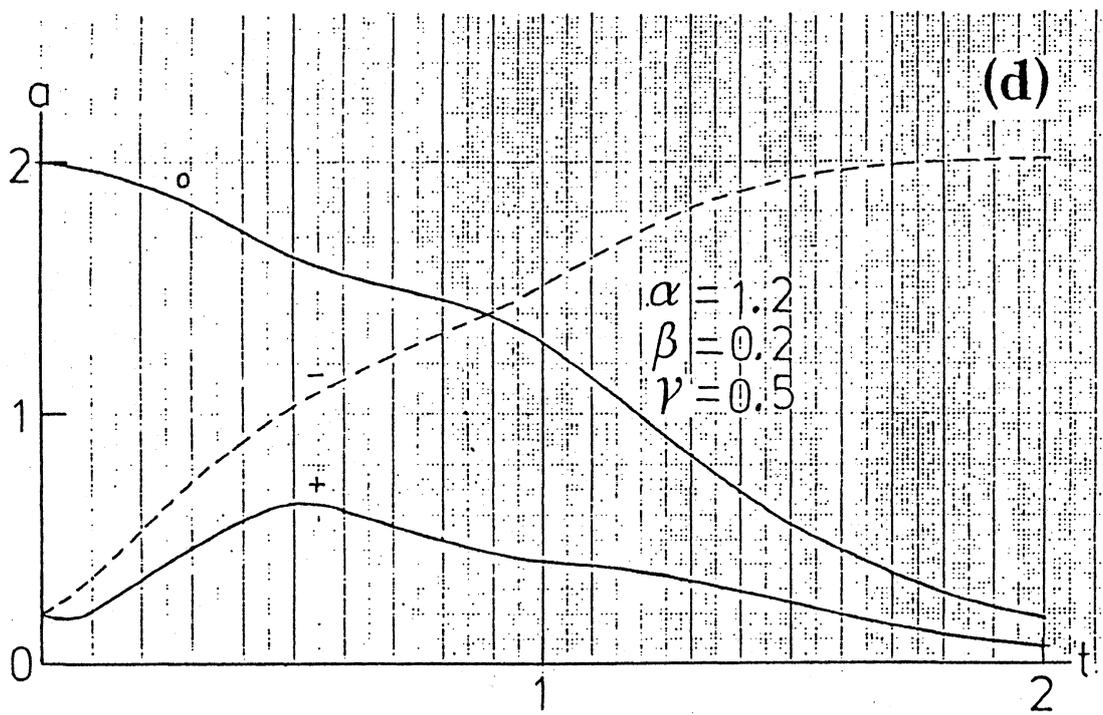
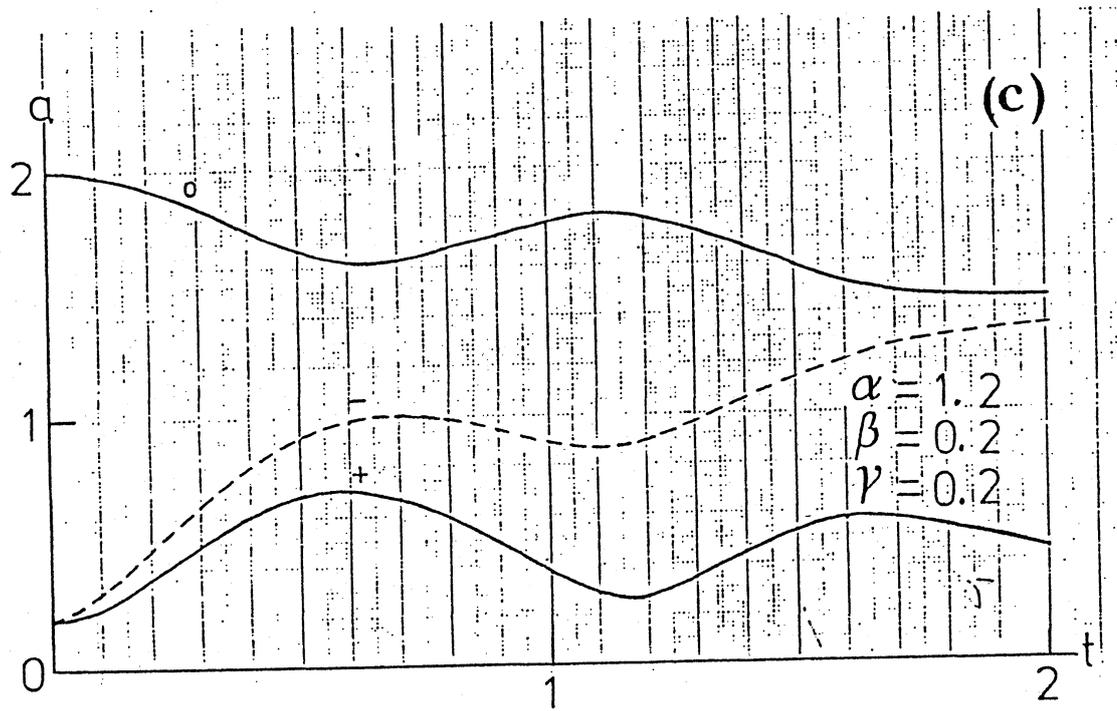


図1. 非線形散逸項を含む場合 ($\sigma \neq 0$) (+: 高側帯波、 -: 低側帯波)
 (c) $\gamma = 0.2$: 非対称、非回帰 (d) $\gamma = 0.5$: 非対称、非回帰

① $\beta = \gamma = 0$ の場合はNLS方程式に帰着する。このとき図1(a)の結果からも明らかのように低側帯波と高側帯波は対称に発展し、回帰する。

② $\gamma = 0$ の場合はDysthe方程式である。このとき時間発展は非対称（低側帯波 $>$ 高側帯波）であるが、やはり初期値に回帰する（図1(b)）。非対称性は(3.5)、(3.6)から $da_1/da_2 = (\alpha - \beta)a_2/(\alpha + \beta)a_1$ となり、これを積分して $a_1^2 = a_2^2(\alpha - \beta)/(\alpha + \beta)$ であり、 $a_2^2 > a_1^2$ となることから明らかである。

③ $\gamma \neq 0$ 、すなわち、非線形散逸効果が加わると時間発展は非対称、非回帰となり、down-shiftを起こし、低側帯波が卓越することになる（図1(c)(d)）。

以上、(3.3)式に付加されたような高次非線形散逸項の存在によりdown-shiftが起こり得る。この高次散逸項は(3.4)~(3.6)から示せるように $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = \text{const.}$ となるので、エネルギーを減衰させず、エネルギー流束に減衰効果を与える項となっていることに注意したい。

§ 4. 散逸媒質における波束

Fabrikant(1984)¹³⁾は散逸媒質における波束の振舞いを記述する方程式として以下のような方程式を提案した。

$$i q_t + \frac{1}{2} q_{xx} + |q|^2 q = n q + i D_H(q) + (N_R + i N_I)(q) \quad (4.1)$$

$$n_{tt} - c^2 n_{xx} = d(|q|^2)_{xx} + D_L(n_t) \quad (4.2)$$

ここに、 q は高周波数の波の複素振幅、 n は低周波数の波（平均流）の振幅を表す。 D_H は高周波数の波の散逸（減衰、不安定）を決める線形演算子、 D_L は低周波数の波の散逸を決める線形演算子、 N_R は非線形分散演算子（Dystheの高次非対称項に対応）、 N_I は非線形散逸演算子（高周波数の波の成長を制限する項）を表す。Fabrikantは、さらに低周波数成分 n を消去した式を次のように与えた。

$$i q_t + \frac{1}{2} q_{xx} + |q|^2 q = i \varepsilon R(q) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
R(q) &= \gamma_0 q - i \gamma_1 q_x - \gamma_2 q_{xx} && \{ \text{線形散逸項} \} \\
&- \{ \beta_1 q_{xxx} + \beta_2 (|q|^2 q)_x + \beta_3 q (|q|^2)_x \} && \{ \text{高次非線形分散項 (Dysthe項)} \} \\
&- \{ \rho_0 |q|^2 q - i \frac{1}{2} \rho_1 (|q|^2 q_x - q^2 q_x^*) \} && \{ \text{高次非線形散逸項 (Landau項)} \} \\
&- i q L (|q|^2_x) && \{ \text{非線形非局所機構 (平均流の散逸)} \}
\end{aligned}$$

Fabrikantは $L(|q|^2_x) = s(|q|^2)_x$ と取った。これは低周波数の波の散逸に起因するものであると述べている。

(4.3)式に基づき1-ソリトン解のソリトン・パラメーターの変化を摂動計算によって求めると

$$\left. \begin{aligned}
d\kappa/dt &= \frac{2}{3} \varepsilon \eta^2 \{ \gamma_1 - (4/5) s \eta^2 \} \\
d\eta/dt &= \varepsilon \eta \{ 2\gamma_0 + \frac{1}{3} \eta^2 \gamma_2 - (4/3) \rho_0 \eta^2 \}
\end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

となる。散逸項が平均流の散逸のみならば(4.4)の右辺にはsに比例する項のみが残り、これが周波数の低下を与えることになる。

§ 5. 可積分系に近い場合のカオス

可積分なソリトン系においては、ソリトン(非線形ノーマル・モード)と輻射(ソリトン以外)の自由度とは分離でき、系の時間発展がそれらの重ね合わせで記述できた。ところが、ソリトン系に外力や散逸項、減衰項などの攪乱が加わると、一般にソリトン相互作用の性格が変化し、ソリトン是非弾性的な相互作用を示し、系はカオス的挙動を示すこともある。また、ソリトンと輻射の自由度の分離は不可能となる。しかしソリトン系に近い場合には、ソリトンを基本とする近似が可能であり、ソリトン系からの摂動としての取り扱いができる。ここでは、このようなソリトン系の摂動の問題を考える。

無限次元系である摂動を受けたソリトン方程式を、ソリトンを基本とする摂動

近似によって有限次元系に帰着し、力学系の手法によりカオスの考察をするという研究は、摂動を受けたNLS方程式やsine-Gordon方程式について行われている。

摂動手法には以下のようなものがある。

(a) ISM (逆散乱法) に基づく摂動

逆散乱法を土台とする摂動展開により固有値 (離散スペクトル) と散乱データ (連続スペクトル) の摂動項による時間変化を考え、ソリトンあるいはNソリトンの振幅、周波数、速度、ソリトン間隔などあるいは輻射に対する方程式を導き有限次元系に遡減する。

(b) direct method

非線形局在モードあるいは非線形周期モードを求め、振幅、周波数などのパラメータに対する式を摂動で導く。摂動の段階で現れる永年項を消去する条件あるいは可解条件 (solvability condition) などがパラメータ変化を記述する式を与える。この方法は第0近似の非摂動方程式が可積分か非可積分かに拘らず適用できる。しかし、① 非ソリトン初期条件の取り扱いが難しい、② 高次近似に進むのが難しい、③ 多ソリトンの振舞いを調べるのが難しい、などの欠点がある。

(c) 保存則の利用

摂動による保存量の変化を記述するmodified conservation lawを利用して、パラメータの変化を決める。

(b)、(c)の方法は可積分系に近くなくても適用可能であるが、輻射やNソリトン相互作用の取り扱いが困難である。また、(b)では可解条件を出すのに同次方程式の解が必要である。

非摂動方程式に対し逆散乱法が定式化されているときには、摂動展開の最低次で多くの情報を得ることができる。ソリトンのみならず輻射やNソリトンに対する摂動の効果も取り扱うことができる。そのような研究の例を以下に示す。

(1) 逆散乱法に基づく摂動法 (Karpman(1979)など¹⁴⁾)

摂動項R(u)をもつ方程式:

$$u_t = S(u) + \varepsilon R(u) \quad (5.1)$$

を演算子形式で表し

$$i L_t + [L, A] = i \varepsilon R \quad ([\] : \text{Poisson括弧}) \quad (5.2)$$

とする。

固有値問題：

$$L\{u(x, t)\} \psi(x, t) = \lambda(t) \psi(x, t) \quad (5.3)$$

$$\text{を考え、固有値の時間発展を決める式を} \quad \psi_t + i A \psi = 0 \quad (5.4)$$

とする。このとき (5.2)、(5.3) より

$$(L - \lambda)(\psi_t + i A \psi) = \lambda_t \psi - \varepsilon R \psi \quad (5.5)$$

$\{\tilde{\psi} : \text{共役固有ベクトル } L^+ : \text{共役演算子とすると } L^+ \tilde{\psi} = \lambda \cdot \tilde{\psi}\}$

(5.5) の両辺に共役固有ベクトルを掛けて積分すると、固有値の時間変化

$$d\lambda/dt = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(x) R\{u(x)\} \psi(x) dx / \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(x) \psi(x) dx \quad (5.6)$$

を得る。(5.5) に (5.3) の固有関数を代入すると、同様に散乱データの時間変化を決める式を導くことができる。 $\varepsilon \neq 0$ でも固有値問題 (5.3) および固有関数の時間発展の式 (5.4) が $\varepsilon = 0$ の場合と同じ形式で与えられ、散乱パラメターの時間発展のみが異なり ε に依存して決まることに注意したい。このことは、後述の非線形スペクトル診断においても利用される。

(2) NLS方程式の摂動

減衰項と外力項の摂動を受けたNLS方程式：

$$i q_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = -i \left\{ \gamma_1 - \gamma_2 q_{xx} + \sum_n \varepsilon_n \exp(i \omega_n t) \right\} \\ (\gamma_1, \gamma_2, \omega_n > 0) \quad (5.7)$$

は Nozaki-Bekki (1984)¹⁵⁾ などにより取り扱われた。

1 ソリトン解は

$$q_s = 2\eta \operatorname{sech}(2\eta x) \exp(-2i\sigma - i\pi/2)$$

(η, σ : ソリトン・パラメター)

(5.8)

で与えられ、無摂動のとき: $\eta = \text{一定}$ 、 $d\sigma/dt = -2\eta^2$ となる。

1 次の摂動による変化は

$$\left. \begin{aligned} d\eta/dt &= -2\gamma_1\eta - 8\gamma_2\eta^3/3 + \sum_n \varepsilon_n s \sin(\omega_n t + 2\sigma) \\ d\sigma/dt &= -2\eta^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

で記述される。

単色外力 ($n=1$) の場合、(5.9) のアトラクターは固定点のみとなる。ソリトンの振幅は一定に近づき、位相は外力の位相と同期する "同期ソリトン" となる。

外力が複数の振動数成分を含む ($n \geq 2$) 場合にはアトラクターは周期軌道となる。外力の振幅 ε_n の増大により周期倍化分岐をを起しカオス的アトラクターを生じる。

摂動パラメターが増大するとソリトンと輻射の相互作用が無視できなくなり、2 次の摂動を考慮することが必要になる。Nozaki (1985)¹⁵⁾ は、有限波長の輻射は分散による位相混合で減衰し十分時間が経てば波数 0 に近い長波長輻射のみがソリトンと相互作用をすると考え、ソリトンと長波長輻射の 2 次の相互作用を表す低次元系を導いた。逆散乱法に基づく摂動展開によって、ソリトンと長波長輻射の 2 次の相互作用を表す式 (ソリトン振幅、ソリトン位相、長波長輻射に対する結合逓減方程式) を導き、単色外力の場合でも、ソリトンと輻射の 2 次の相互作用によってカオスを生じることを示した。また、この逓減系における解の振舞いが元の偏微分方程式 (5.7) の数値解と定性的に一致することを明らかにし、周期軌道の分岐からカオスに至る過程を低次元系で近似的に記述すること

の可能性を示した。

外力が強くなると元の系(5.7)は非常に強いカオスとなり、不規則に生成・消滅を繰り返すソリトンの孤立波の励起が見られる。さらに強くなるとソリトンの描像が全く成立しないほど空間的に乱れたカオスになる。このような場合には摂動展開は使えない。

(3) sine-Gordon方程式の摂動

Bishopら(1986)¹⁶⁾はsine-Gordon(SG)方程式について同様な研究を行った。

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi = \varepsilon (-\alpha \phi_t + \Gamma \sin \omega t) \phi \quad (0 < \varepsilon \ll 1) \quad (5.10)$$

(5.10)の数値解は $\varepsilon \Gamma$ の増大に伴い、周期解、準周期解、カオスへと遷移を示すが、空間的にはcoherentな構造が見られ、カオスのときでさえ空間構造は簡単で少数の非線形モードで近似可能であることを示した。Bishopらは、逆散乱法の摂動によって、ソリトン(kink, anti-kink, breather)と輻射(radiation)に対応する固有値の時間発展を調べ、(5.10)の解の振舞いが、カオスの場合でも少数の非線形モードに対する低次元系で記述できることを示した。

(4) 非線形スペクトル診断

逆散乱法の適用の例として、非線形スペクトル診断(nonlinear spectral diagnostics)を取り上げておく。ここでも、固有値問題の形式(演算子形式)が摂動項に依らないことが利用される。すなわち、逆散乱法で解析を行い固有値を求めることによりkink, breather, radiationを識別し、それらの時間変化を調べることにより系の変化(dynamics)の特徴を明らかにし、規則変化、不規則変化(カオス)の判定をするのである。

時刻 t の空間波形 $\phi(x, t)$ が与えられたとき、SG方程式に対する逆散乱法の固有値問題は

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\phi_t + \phi_x) + \frac{1}{16\lambda} \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \psi = 0$$

$\psi(x; \lambda)$: 固有関数 (5.11)

となる。(Forest-McLaughlin(1982)¹⁷⁾)

(5.11) は線形非自己共役固有値問題であり、これを解けば固有値 (スペクトル表示: $\phi(\lambda, t)$ 、 λ : 複素数) が得られる。固有値問題の形式 (演算子形式) (5.11) は摂動項に依らないことから、各時刻の波形 $\phi(x, t)$ を与えて、(5.11) を解けばスペクトル表示 $\phi(\lambda, t)$ が得られる。

実際には (5.10) 式の数値実験の解を $\phi(x, t)$ にとり、(5.11) のスペクトル変換を数値的に実行して $\phi(\lambda, t)$ を求め、複素固有値 λ の時間変化を調べ、その規則性、不規則性を見ることにより、ダイナミクスの特徴が判定された。Bishopらによって行われたそのような数値計算結果の例を図2、図3に示す。

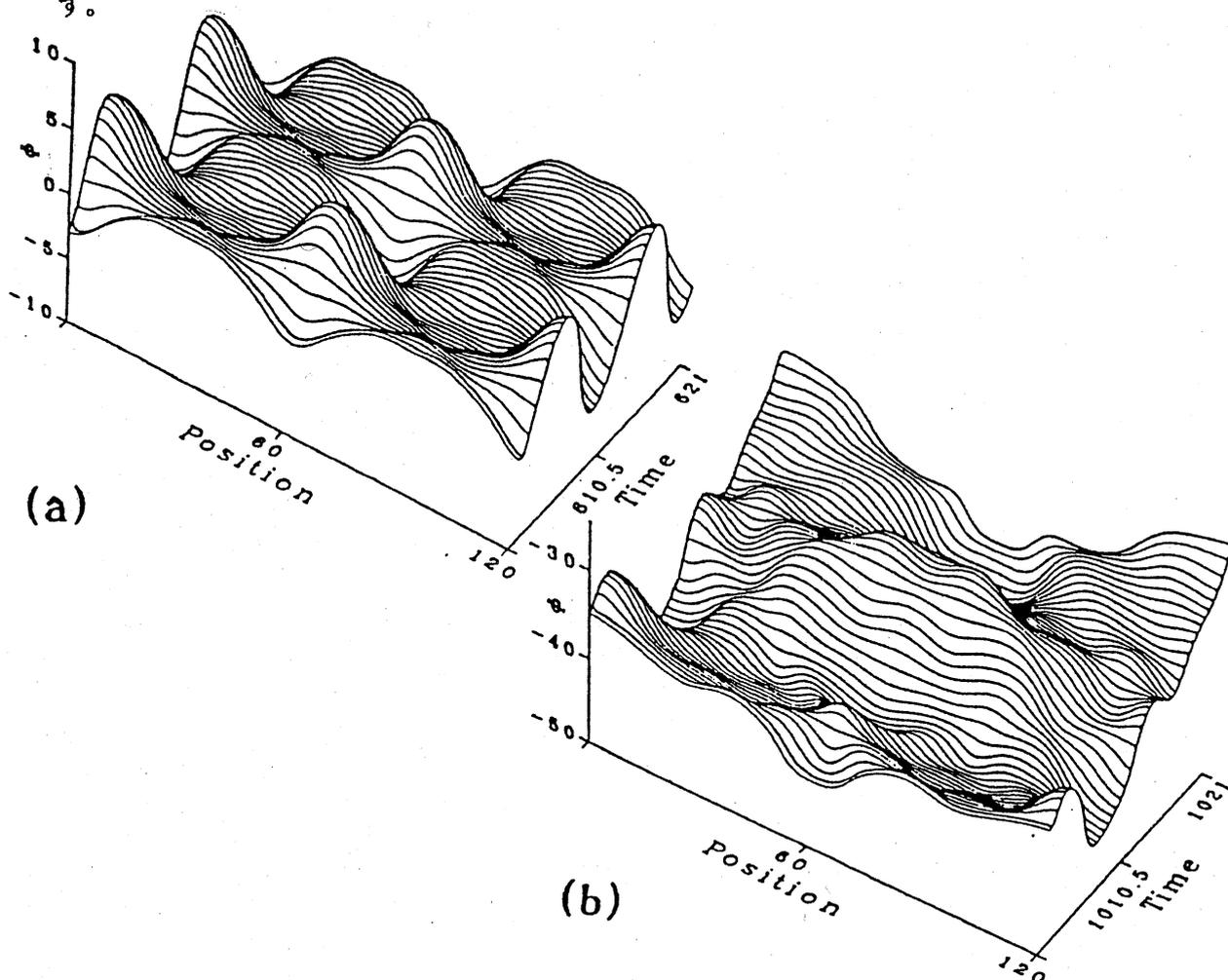


図2. SG方程式: $\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi = \gamma \sin \omega t - \epsilon \phi_t$ の数値解
 $(\epsilon = 0.2, \omega = 0.6)$ (a) 周期的発展 ($\gamma = 0.8$)
 (b) カオス的発展 ($\gamma = 1.0$)

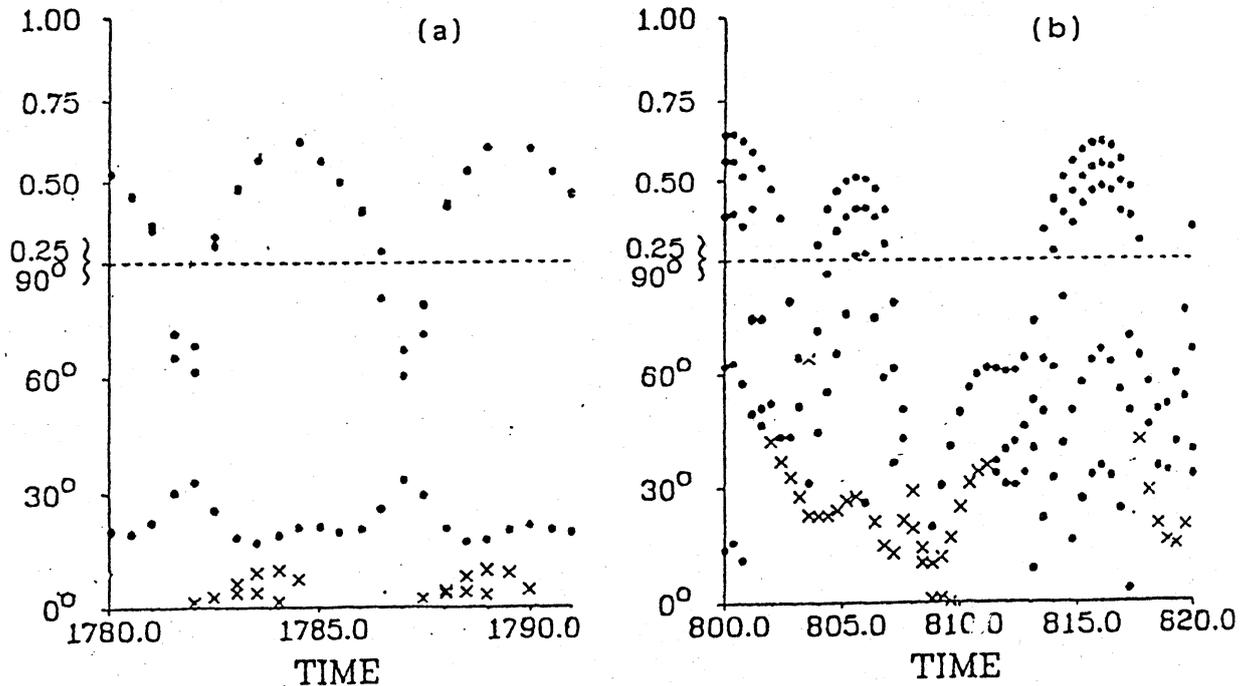


図3. 非線形スペクトル分解 (固有値の時間発展) (・: kink, breather
 ×: radiation) (a) 周期解 ($\gamma = 0.89$) (b) カオス解 ($\gamma = 1.0$)
 いずれの場合も少数のモードが卓越することに注意。

§ 6. おわりに

可積分方程式の高次近似および摂動の問題のいくつかについて述べてきた。そのような問題において逆散乱法は有効な解析手法であることが分かる。ソリトン方程式の高次近似のうちのあるもの (例えば、高次NLS方程式) は、逆散乱法によって解ける場合があるが、これは非線形波動における周波数低下の問題との関連からも重要と考えられるので、可積分性を利用する研究がなされる余地があると思われる。また、可積分に近い系の摂動の問題では逆散乱法に基づく摂動展開が有効であった。しかしながら、問題が空間高次元になると可積分性が失われるなど、現実問題として逆散乱法が使えない問題も多い。これらに対しては直接的な摂動法を適用せざるを得ないことになる。

以上、講演を振り返って、その概要をまとめた。周波数低下の問題は高次近似方程式との関連から取り上げたが、水面波の変調、風波の発達過程などにおける非線形波動の問題としても解決が待たれている。

参考文献

- 1) Y.H.Ichikawa, T.Mitsubishi & K.Konno:
J.Phys.Soc.Japan, 41(1976)1382; 43(1977)675.
K.Konno, T.Mitsubishi & Y.H.Ichikawa: J.Phys.Soc.Japan, 43(1977)669.
- 2) Y.Kodama & T.Taniuti: J.Phys.Soc.Japan, 45(1978)298; 47(1979)1706.
Physica Scripta, 20(1979)486.
Y.Kodama: J.Phys.Soc.Japan, 45(1978)311.
- 3) Y.Kodama: Physica, 16D(1985)14. Phys.Lett. 112A(1985)193.
Proc.IUTAM Symp. Nonlinear Water Waves (eds.K.Horikawa & H.Maruo), Springer(1988)pp.85-91.
- 4) J.Fenton: J.Fluid Mech. 53(1972)257.
- 5) Y.Kodama: J.Statist.Phys. 39(1985)597.
Y.Kodama & A.Hasegawa: IEEE J.Quantum Electronics, QE-23(1987)510.
- 6) B.M.Lake, H.C.Yuen, H.Rungardier & I.N.E.Ferguson: J.Fluid.Mech. 83
(1977)49.
- 7) W.K.Melville: J.Fluid.Mech. 115(1982)165.
- 8) M.Y.Su: J.Fluid.Mech. 25(1982)2167.
- 9) K.B.Dysthe: Proc.Roy.Soc.Lond. A369(1979)105.
- 10) P.A.E.M.Janssen: J.Fluid.Mech. 126(1983)1.
- 11) E.Lo & C.C.Mei: J.Fluid Mech. 150(1985)395.
- 12) K.Trulsen & K.B.Dysthe:
Water Wave Kinematics(A.Tørum & O.T.Gudmestad eds.) Kluwer(1990)561.
Proc.IUTAM Conf.on "breaking waves", Sydney(1991).
- 13) A.L.Fabrikant: Sov.Phys.JETP 59(1984)274.

- 14) V.I.Karpman: *Physica Scripta*, 20(1979)462.
V.I.Karpman & E.M.Maslov: *Sov.Phys.JETP*, 48(1978)252.
V.I.Karpman & V.V.Solov'ev: *Physica*, 3D(1981)142.
D.J.Kaup & A.C.Newell: *Proc.Roy.Soc.Lond.* A361(1978)413.
- 15) K.Nozaki & Bekki: *Phys.Lett.* 102A(1984)383.
J.Phys.Soc.Japan, 54(1985)2363.
N.Bekki & K.Nozaki: *Proc.7th KSI, Dynamical Problems in Soliton Systems*(ed.S.Takeno), Springer(1985)pp.268-271.
野崎一洋、戸次直明: 月刊フィジクス、6巻9号(1985)534。
K.Nozaki: *Physica*, 23D(1986)369.
- 16) A.R.Bishop: *Proc.7th KSI, Dynamical Problems in Soliton Systems*
(ed.S.Takeno), Springer(1985)pp.250-257.
E.A.Overman II, D.W.McLaughlin & A.R.Bishop: *Physica*, 19D(1986)1.
A.R.Bishop, M.G.Forest, D.W.McLaughlin & E.A.Overman II:
Physica, 23D(1986)293.
- 17) M.G.Forest & D.W.McLaughlin: *J.Math.Phys.* 23(1982)1248.