数理解析研究所講究録
第 783 巻 1992 年 122-142

パラメータを持つマルチンゲールの一様可積分性

九州大・理　佐藤　坦　(Hiroshi Sato)
九州大・理　玉城　政和　(Masakazu Tamashiro)

Introduction

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, (T, Σ, σ) を何れも確率空間とする.

[定義] Ω 上の 非負値 martingale の族 $\mathbf{P}(t) = \{ P_n(t,\omega), \mathcal{F}_n \}_{n\geq 1}$ $(t \in T)$ は次の可測性と可積分性を持つとき T に パラメータ を持つ非負値 martingale と呼ばれる.

(1.1) 任意の $n\,(\in \mathbf{N})$ について $P_n(\cdot,\cdot)$ は $(\Sigma \otimes \mathcal{F}_n)$-可測である.

(1.2) $\displaystyle\int_T \mathbf{E}[\, P_1(t,\omega)\,]\, \sigma(dt) \ < \ +\infty.$

[問題] $\mathbf{P}(t) = \{ P_n(t,\omega), \mathcal{F}_n \}_{n\geq 1}$ $(t \in T)$ は T に パラメータ を持つ 非負値 martingale とする.

$$M_n(\omega) \ = \ \int_T P_n(t,\omega)\, \sigma(dt)$$

とおく. Fubini の定理によって, $\{ M_n(\omega), \mathcal{F}_n \}_{n\geq 1}$ は 非負値 martingale になる（これを average martingale と呼ぶことにする）. それでは「どのような条件の下に $\{ M_n(\omega) \}_{n\geq 1}$ は一様可積分になるか？」というのが問題である.

次の補題で示すように, ほとんどすべての $t \in T$ について $\{ P_n(t,\omega) \}_{n\geq 1}$ が一様可積分であれば問題は自明である.

補題 0.1 ほとんどすべての $t \in T$ について $\{ P_n(t,\omega) \}_{n\geq 1}$ が一様可積分であれば $\{ M_n(\omega) \}_{n\geq 1}$ は一様可積分である.

{証明} 仮定よりほとんどすべての $t \in T$ について,

$$\mathbf{E}[\, P_1(t,\omega)\,] = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}[\, P_n(t,\omega)\,] = \mathbf{E}[\, \lim_{n\to+\infty} P_n(t,\omega)\,]$$

が成り立つ. Martingale 性と Fubini の定理, Fatou の補題から,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\, M_1(\omega)\,] &= \int_T \mathbf{E}[\, P_1(t,\omega)\,]\sigma(dt) = \int_T \mathbf{E}[\, \lim_{n\to+\infty} P_n(t,\omega)\,]\sigma(dt) \\
&\leq \ \mathbf{E}[\, \lim_{n\to+\infty} \int_T P_n(t,\omega)\, \sigma(dt)\,] = \mathbf{E}[\, \lim_{n\to+\infty} M_n(\omega)\,] \leq \lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}[\, M_n(\omega)\,] = \mathbf{E}[\, M_1(\omega)\,]
\end{aligned}$$

となり, これより

$$\mathbf{E}[\, M_1(\omega)\,] = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}[\, M_n(\omega)\,] = \mathbf{E}[\, \lim_{n\to+\infty} M_n(\omega)\,]$$

が示され $\{M_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ は一様可積分であることがわかる. □

ところが興味深いことに, すべての $t\in T$ について $\{P_n(t,\omega)\}_{n\geq 1}$ が一様可積分でない場合でも average martingale $\{M_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ は一様可積分になり得ることが知られており, これについては多くの研究がある. この報告の **PART I** では average martingale の一様可積分性に関するこれまでの研究を簡単に紹介する.

Kitada-Sato [6] は独立な二つの確率変数列 $\mathbf{X}=\{X_k\}_{k\geq 1}$ と $\mathbf{Y}=\{Y_k\}_{k\geq 1}$ が数列空間上に導く確率測度 $\mu_{\mathbf{X}}$ と $\mu_{\mathbf{X+Y}}$ との間の絶対連続性について研究した. これもまた average martingale の一様可積分性の問題と考えられる. 特に $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ が共に非負値の場合 $\mu_{\mathbf{X}}$ と $\mu_{\mathbf{X+Y}}$ との絶対連続性を特徴付けることは, average martingale の一様可積分性の問題の最も典型的な例となる. **PART II** ではこの問題について最近得た結果を報告する.

PART I

1 Random Covering

[問題] 非負実数列 $\frac{1}{2}>l_1\geq l_2\geq l_3\geq\cdots$ と $T=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上の独立同分布な (分布が一様分布に従う) 確率変数列 $\{X_k(\omega)\}_{k\geq 1}$ が与えられたとする.

$$I_k(\omega)=X_k(\omega)+[0,l_k]$$

とおく. どのような条件の下に $P(\cup_{k=1}^{+\infty}I_k(\omega)=T)=1$ となるかが問題である.

$$P_n(t,\omega)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-l_k}1_{(l_k,1]}(t-X_k(\omega)) \qquad t\in T,$$

$$M_n(\omega)=\int_T P_n(t,\omega)dt$$

とおく.

定理 1.1 { Kahane[2] } 次の (A), (B), (C), (D) は同値になる.

(A) $\{M_n(\omega)\}$ は L^2 で収束する.

(B) $\int_T \exp[\sum_{n\geq 1}\Delta_n(t)]\,dt<+\infty$. ここに $\Delta_n(t)=\int_T 1_{[0,l_n]}(t+u)1_{[0,l_n]}(u)\,du$.

(C) $\sum_{n\geq 1}n^{-2}\exp[\sum_{j=1}^{n}l_j]<+\infty$.

(D) $P(\cup_{k\geq 1}I_k(\omega)=T)<1$.

2 Mandelbrot の Martingale

{**記号と定義**} $c\ (\geq 2)$ を自然数. $T=\{0,1,2,\cdots,c-1\}$ とする.

さらに, $T^{\infty}=\{\,(s_n)_{n\geq 1}\,;\,s_n\in T\ (n\geq 1)\,\}$, $T^n=\{\,(s_n)_{n\geq 1}\in T^{\infty}\,;\,s_{n+k}=0\ \ \forall k\geq 1\,\}$ とおく. $s=(s_n)_{n\geq 1}$, $t=(t_n)_{n\geq 1}\in T^{\infty}$ に対して s,t の距離 $d(s,t)$ を次で定義する.

$$
(2.1)\qquad d(s,t)=\begin{cases}(\dfrac{1}{c})^n & \text{if}\quad s_k=t_k\quad \forall k\leq \exists n\quad \text{and}\quad s_{n+1}\neq t_{n+1}\\ 1 & \text{if}\quad s_1\neq t_1\,.\end{cases}
$$

また σ を T^{∞} 上の Haar 測度で $\sigma(T^{\infty})=1$ をみたすとする.

確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の平均1の確率変数 W に対して,

$$
\{\,W(j_1,j_2,\cdots,j_n)\,;\,n\geq 1\,,\,\{j_1,j_2,\cdots,j_n\}\in T^n\,\}
$$

をその independent copy とする. $s=(s_n)_{n\geq 1}\in T^{\infty}$ に対して,

$$
P_n(s)=W(s_1)W(s_1,s_2)\cdots W(s_1,s_2,\cdots,s_n)
$$

とおき, さらに,

$$
M_n=\int_{T^{\infty}}P_n(s)\,\sigma(ds)\quad\left(=(\frac{1}{c})^n\sum_{s\in T^n}P_n(s)\right)
$$

とする. $\{\,M_n\,\}_{n\geq 1}$ は非負値 martingale で, 任意の n について $\mathbf{E}[\,M_n\,]=1$ だから Fatou の補題に注意すると,

$$
\exists M_{\infty}\quad \text{such that}\quad M_n\longrightarrow M_{\infty}\quad \text{a.s.}\quad \text{and}\quad \mathbf{E}[\,M_{\infty}\,]\leq 1\,.
$$

定理 2.1 { Kahane and Peyriére[4] } (A) $\{\,M_n\,\}_{n\geq 1}$ が一様可積分であるための必要十分条件は $\mathbf{E}[W\log W]<\log c$ となることである.

(B) $M_{\infty}=0$ *a.s.* と $\mathbf{E}[W\log W]\geq\log c$ は同値になる.

{**注意**} 初めの W を平均0分散 u の Gauss 分布に従う確率変数 X に対して $W=\exp[X-\frac{1}{2}u]$ で定義する ($\mathbf{E}[W]=1$, $\mathbf{E}[W\log W]=\frac{1}{2}u$ に注意する). X の independent copy $\{\,X(i_1,i_2,\cdots,i_n)\,;\,n\geq 1,\ \{i_1,i_2,\cdots,i_n\}\in T^n\,\}$ について,

$$
W(i_1,i_2,\cdots,i_n)=\exp[\,X(i_1,i_2,\cdots,i_n)-\frac{1}{2}u\,]
$$

としてよい. このとき,

$$
\begin{aligned}
c_n(s,t)\ &\stackrel{def}{=}\ \mathbf{E}[X(s_1,s_2,\cdots,s_n)X(t_1,t_2,\cdots,t_n)]\\
&=\begin{cases}\mathbf{E}[X^2]=u & \text{if}\quad d(s,t)\leq c^{-n}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

となり，これと (2.1) に注意すると，

$$C(s,t) \stackrel{def}{=} \sum_{n\geq 1} c_n(s,t) = u \log_c \frac{1}{d(s,t)}.$$

が得られる．

3 Multiplicative Chaos

ν を自然数． $\mathbf{u} > 0$ とする．

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率場 $\{ X_n(t,\omega) \ ; \ t \in [0,1]^\nu, \ n \in \mathbf{N} \}$ は次の (3.1) から (3.4) をみたすとき， $\mathbf{u}$ を parameter とする ν 次元の **multiplicative chaos の基本モデル** とよばれる．

(3.1) 各 $n \in \mathbf{N}$ について $X_n(\cdot,\cdot)$ は $(\mathcal{B}[0,1]^\nu \otimes \Sigma)$-可測．

(3.2) 各 $t \in [0,1]^\nu$ について $\{ X_n(t,\omega) \}_{n\geq 1}$ は独立な平均 0 の Gauss 型確率変数列で，任意の $n \in \mathbf{N}$, $s,t \in [0,1]^\nu \times [0,1]^\nu$ について $c_n(s,t) \stackrel{def}{=} \mathbf{E}[X_n(s,\omega) X_n(t,\omega)] \geq 0$．

(3.3)
$$c_n \ ; \ [0,1]^\nu \times [0,1]^\nu \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

は連続関数．

(3.4) $[0,1]^\nu \times [0,1]^\nu$ 上の有界関数 $O(s,t)$ が存在して，

$$\sum_{n\geq 1} c_n(s,t) \ = \ \mathbf{u} \log^+ \frac{1}{\|s-t\|} \ + \ O(s,t)$$

が成り立つ．

$\mathbf{u}$ を parameter とする ν 次元の multiplicative chaos の基本モデル $\{ X_n(t,\omega) \ ; \ t \in [0,1]^\nu, \ n \geq 1 \}$ について，

$$P_n(t,\omega) = \exp[\sum_{k=1}^{n} \{ X_k(t,\omega) \ - \ \frac{1}{2} \mathbf{E}[X_k(t,\omega)^2] \}],$$

$$M_n(\omega) \ = \ \int_{[0,1]^\nu} P_n(t,\omega) dt$$

とおく． 定理 2.1 の応用として次の定理が成り立つ．

定理 3.1 (Kahane [3]) (A) $u < 2\nu$ であれば $\{ M_n(\omega) \}_{n\geq 1}$ は一様可積分．

(B) $u \geq 2\nu$ であれば $\lim_{n\to+\infty} M_n(\omega) = 0 \quad a.s.$

4 Høegh-Krohn モデル ー Kusuoka の定式化ー

ここでは，Kusuoka [7] の定式化した二次元の Høegh-Krohn モデルについて少し説明する．

$\mathbf{R}^2$ 上の急減少関数の全体（Schwartz 空間）を $\mathcal{S}$ で表す．$\mathcal{S}^*$（$\mathcal{S}$の topological dual）上の確率測度 λ は，

$$(5.1) \qquad \int_{\mathcal{S}^*} \exp[\,\sqrt{-1}u(h)\,]\,\lambda(du) = \exp[\,-\frac{1}{2}(\,(1-\Delta)^{-1}h, h\,)_{L^2}\,] \qquad \forall h \in \mathcal{S}$$

で定まるとする．ここに，$\Delta = \sum_{n=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}$ (Laplacian)．

さて $\mathcal{S}^*$ 上の確率測度 λ_t^α ($t \in \mathbf{R}^2$, $\alpha \geq 0$) を，

$$\lambda_t^\alpha(A) = \lambda(A - \alpha \cdot g_t) \qquad A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^*)$$

と定義する．ここに，

$$g_t(\cdot) = \int_0^{+\infty} \exp[-x]\,p(x, \cdot - t)\,dx \quad \left(\in L^2(\mathbf{R}^2, dx)\right).$$

ただし $p(x,t) = \frac{1}{4\pi x}\exp[-\frac{|t|^2}{4x}]$ (heat kernel). Cameron-Martin の定理の帰結として，

$$\begin{aligned} \lambda_t^\alpha \ll \lambda \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha(1-\Delta)^{\frac{1}{2}} g_t \ \in L^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha \int_0^{+\infty} p(x,0)\,dx < +\infty \Longleftrightarrow \alpha = 0 \end{aligned}$$

となる．従って $\alpha > 0$ であれば任意の $t \in [0,1]^2$ について $\lambda_t^\alpha \perp \lambda$. そこで $\alpha > 0$ のとき $\mathcal{S}^*$ 上の確率測度 μ^α を，

$$\mu^\alpha(A) = \int_{[0,1]^2} \lambda_t^\alpha(A)\,dt \qquad A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}^*)$$

で定める時 $\mu^\alpha \ll \lambda$ であるかどうかが問題になる．

{**注意**}　形式的には μ^α の λ に対する Radon-Nikodym derivative は

$$\frac{d\mu^\alpha}{d\lambda}(u) = \int_{[0,1]^2} \exp[\,u[\,\alpha(1-\Delta)g_t\,] - \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^{+\infty} p(x,0)\,dx\ \,]\,dt$$

で与えられることに注意する．

さて，$t \in [0,1]^2$ について，

$$g_{1,t}(\cdot) = \int_1^{+\infty} \exp[-x]\,p(x, \cdot - t)\,dx \ \ (\in \mathcal{S}),$$

$$g_{n,t}(\cdot) = \int_{2^{-2(n-1)}}^{2^{-2(n-2)}} \exp[-x]\, p(x, \cdot - t)\, dx \quad (\in \mathcal{S}) \qquad (n \geq 2).$$

とおく． さらに $\mathcal{S}^*$ 上の平均 0 の Gauss 場 $\{ X_n(t,u)\,;\, n \geq 1,\, t \in [0,1]^2 \}$ を,

$$X_n^\alpha(t,u) \;=\; u\{ \alpha(1-\Delta) g_{n,t} \} \qquad t \in [0,1]^2,\ u \in \mathcal{S}^*$$

で定め,

$$P_n^\alpha(t,u) \;=\; \exp[\sum_{k=1}^n X_k^\alpha(t,u) \;-\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}^*} X_n^\alpha(t,u)^2\, \lambda(du) \,],$$

$$M_n^\alpha(u) \;=\; \int_{[0,1]^2} P_n^\alpha(t,u)\, dt$$

とおく． このとき $\{ M_n^\alpha(u) \}_{n\geq 1}$ が一様可積分になることと $\mu^\alpha \ll \lambda$ とは同値である．

ところが $[0,1]^2 \times [0,1]^2$ 上の有界関数 $O(s,t)$ によって,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \int_{\mathcal{S}^*} X_n^\alpha(t,u) X_n^\alpha(s,u)\, \lambda(du) \;&=\; \alpha^2 \int_0^{+\infty} p(x, s-t)\, dx \\ &=\; \frac{\alpha^2}{2\pi} \log^+ \frac{1}{\|s-t\|} + O(s,t)\end{aligned}$$

とかけるのでこの問題は 3 章 Multiplicative Chaos の特別な場合として定理 3.1 から次が導かれる．

定理 4.1 (A) $\alpha^2 < 8\pi$であれば, $\{ M_n(u) \}_{n\geq 1}$ は一様可積分になる．

(B) $\alpha^2 \geq 8\pi$ であれば, $\lim_{n\to+\infty} M_n(u) = 0\ a.s.$

PART II

5 Admissible Translation ー Kitada-Sato の結果ー

[問題] $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と (T, Σ, σ) は何れも確率空間とする（以下では Ω 上の積分を $\mathbf{E_P}$ で, T 上の積分を $\mathbf{E}_\sigma$ で表す）． また Ω 上で独立同分布な実数値確率変数列 $\mathbf{X} = \{ X_k(\omega) \}_{k\geq 1}$ と, T 上の独立な実数値確率変数列 $\mathbf{Y} = \{ Y_k(t) \}_{k\geq 1}$ が与えられたとする． $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \{ X_k(\omega) + Y_k(t) \}_{k\geq 1}$ を直積確率空間 $(\Omega \times T, \mathcal{F} \otimes \Sigma, P \otimes \sigma)$ 上に定義する（このとき$\mathbf{X}$と$\mathbf{Y}$とは$\Omega \times T$上で独立である）． $\mathbf{X}$ と $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$ はそれぞれ数列空間上に確率測度 $\mu_{\mathbf{X}}$, $\mu_{\mathbf{X+Y}}$ を導く． その間の絶対連続性を特徴付ける事が問題である．

初めに次の Shepp [10] の定理に注意する．

定理 5.1（Shepp）　$X_1(\omega)$ の分布は *Lebesgue* 測度と互いに絶対連続で，さらにその *desity* を f（$f(x)>0$ $a.e$（dx））とするとき f は絶対連続関数とする（f の *density* を f' とおく）．　$\mathbf{Y}=\{y_k\}_{k\geq 1}$ は実数列とする．次のことが成り立つ．

$I(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'(x)^2}{f(x)}dx$（**Fisher's information**）とおく．

(A)　$I<+\infty$ とする．

(i)　$\sum_{k\geq 1}y_k^2<+\infty$　であれば $\mu_{\mathbf{X}}\sim\mu_{\mathbf{X+Y}}$（$\mu_{\mathbf{X}}$ と $\mu_{\mathbf{X+Y}}$ は互いに絶対連続）．

(ii)　$\sum_{k\geq 1}y_k^2=+\infty$　であれば $\mu_{\mathbf{X}}\perp\mu_{\mathbf{X+Y}}$（$\mu_{\mathbf{X}}$ と $\mu_{\mathbf{X+Y}}$ は特異）．

(B)　すべての　$\mathbf{Y}\in l_2$ について $\mu_{\mathbf{X}}\sim\mu_{\mathbf{X+Y}}$ ならば $I<+\infty$．

さて $\mathbf{Y}=\{Y_k(t)\}_{k\geq 1}$ が random sequence のとき補題 0.1 から，

$$\text{(II.1)}\qquad \sum_{k\geq 1}Y_k(t)^2\ <\ +\infty\quad \sigma\ a.s.$$

であれば $\mu_{\mathbf{X}}\sim\mu_{\mathbf{X+Y}}$ が示せる．しかし，逆は一般に成り立たない．実際，$\mathbf{X},\mathbf{Y}$ を共に平均 0 の Gauss 分布に従う確率変数列とすれば，

$$\text{(II.2)}\qquad \sum_{k\geq 1}Y_k(t)^4\ <\ +\infty\quad \sigma\ a.s.$$

が $\mu_{\mathbf{X}}\sim\mu_{\mathbf{X+Y}}$　であるための必要十分条件であることが知られている ([8])．

次に Kitada-Sato [6] による一つの結果を紹介しよう．X_1 は平均 0 分散 1 の Gauss 型確率変数で Y_k $(k\geq 1)$ の分布は対称とする．$t\in T$ を固定したとき，μ_{X_k}，$\mu_{X_k+Y_k(t)}$ をそれぞれΩ上の確率変数 X_k, $X_k+Y_k(t)$ の分布とし，さらに$\Omega\times T$上の確率変数 X_k+Y_k の分布を $\mu_{X_k+Y_k}$ で表すことにする．

$$\text{(II.3)}\quad P_n(t,\omega)\ =\ \exp\Big[\sum_{k=1}^{n}\{X_k(\omega)Y_k(t)\ -\ \frac{1}{2}Y_k(t)^2\}\Big]\left(=\prod_{k=1}^{n}\frac{d\mu_{X_k+Y_k(t)}}{d\mu_{X_k}}(X_k(\omega))\right)$$

$$\text{(II.4)}\qquad M_n(\omega)\ =\ \int_T P_n(t,\omega)\,\sigma(dt)\left(=\prod_{k=1}^{n}\frac{d\mu_{X_k+Y_k}}{d\mu_{X_k}}(X_k(\omega))\right)$$

と定義すると良く知られているように $\mu_{\mathbf{X}}\sim\mu_{\mathbf{X+Y}}$　であるための必要十分条件は $\{M_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ が一様可積分になることである．従って次に述べる Kitada-Sato[6] の結果から導かれる定理は **PART I**. 3 章の Multiplicative Chaos においてパラメータの空間が一般の確率空間で Gauss 場が変数分離形になったものと理解でき，例えば $\{Y_k\}_{k\geq 1}$ が (II-1) をみたさなければ Shepp の定理から $\sum_{k\geq 1}Y_k(t)^2=+\infty$ である$t\in T$について $\{P_n(t,\omega)\}_{n\geq 1}$ は一様可積分でないが，(II-2) が成り立てば average martingale $\{M_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ は一様可積分であることを示している．

定理 5.2 { Kitada-Sato[6] } (A) ある $\varepsilon > 0$ について,

$$\sum_{k\geq 1} \mathbf{E}_\sigma[\, Y_k(t)^2\, ;\, |\, Y_k\,| \leq \varepsilon\,] \;<\; +\infty, \tag{II.5}$$

$$\sum_{k\geq 1} \sigma(\,|Y_k| > \varepsilon\,) \;<\; +\infty \tag{II.6}$$

が成り立てば $\{\, M_n(\omega)\,\}_{n\geq 1}$ は一様可積分になる.

(B) $\{\, M_n(\omega)\,\}_{n\geq 1}$ が一様可積分であればすべての $\varepsilon > 0$ について (II.5) と

$$\sum_{k\geq 1} \sigma(\,|Y_k| > \varepsilon\,)^2 \;<\; +\infty \tag{II.7}$$

が成り立つ.

[6] では $\{\, M_n(\omega)\,\}_{n\geq 1}$ が一様可積分であるために (II.6) が必要でない例, (II.7) が十分でない例を示している.

6 One-sided Admissible Translation

[問題] PART II. 5 章で $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ が何れも $S\,(=\mathbf{N}_0 \overset{def}{=} \{0,1,2,\cdots\}$ または $\mathbf{R}_+ = [0,+\infty)\,)$ に値をとる確率変数列のときに「 $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ 」となるための条件を求めることが問題である.

パラメータを持つマルチンゲールの一様可積分性との関係について考える. $\mathbf{X}$ の分布に次の仮定をおく.

(i) $S = \mathbf{N}_0$ のとき $P(\,X_1 = n\,) > 0\ \ (\forall n \in \mathbf{N}_0\,)$

(ii) $S = \mathbf{R}_+$ のとき X_1 の分布は Lebesgue 測度と互いに絶対連続.

このとき任意の $k(\in \mathbf{N})$ と $t \in T$ を固定すると, $\mu_{X_k+Y_k(t)}$ は μ_{X_k} に絶対連続である. しかし数列空間上で確率測度 $\prod_{k=1}^{+\infty} \mu_{X_k+Y_k(t)}$ と $\prod_{k=1}^{+\infty} \mu_{X_k}$ とが互いに絶対連続であるための必要十分条件は, あきらかに, 任意の $k \in \mathbf{N}$ について $Y_k(t) = 0$ となることである. しかし $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ であるかどうかはあきらかなことではない. 任意の $k(\in \mathbf{N})$ について $\mu_{X_k} \sim \mu_{X_k+Y_k}$ を仮定すると $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ であるための必要十分条件は (II.4) で与えられる average martingale $\{M_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ が一様可積分になることである.

さてここで **PART II.** 5 章と同様に

$$M_n(\omega) \;=\; \prod_{k=1}^{n} \frac{d\mu_{X_k+Y_k}}{d\mu_{X_k}}(\,X_k(\omega)\,)$$

$$Z_k(x) \;=\; \frac{d\mu_{X_k+Y_k}}{d\mu_{X_k}}(x) - 1$$

とおく．任意の $k(\in \mathbf{N})$ について $\mu_{X_k} \sim \mu_{X_k+Y_k}$ を仮定する．つぎの定理が知られている．

定理 6.1 { Kitada-Sato [6] }　次の (A),(B),(C),(D) は同値になる．

(A)　$\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$

(B)　$\{M_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ は一様可積分である．

(C)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} Z_k(X_k)$ は概収束する．

(D)　実数 M (≥ 1) が存在して

(D-1)　$\displaystyle\sum_{k\geq 1} \mathbf{E_P}[\, Z_k(X_k)\,;\, Z_k(X_k) > M\,] \;<\; +\infty$

(D-2)　$\displaystyle\sum_{k\geq 1} \mathbf{E_P}[\, Z_k(X_k)^2\,;\, Z_k(X_k) \leq M\,] \;<\; +\infty$

6.1　$S = \mathbf{N}_0$ の場合

$$f(n) = \begin{cases} P(X_k = n) > 0, & \text{if} \quad n \in \mathbf{N}_0, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$g_k(l) = \sigma(Y_k = l), \qquad l \in \mathbf{N}_0,\; k \in \mathbf{N}$$

とおく．任意の $k \in \mathbf{N}$ について $g_k(0) > 0$ とする（このとき $\mu_{X_k} \sim \mu_{X_k+Y_k}$ ）．さらに

$$Z_k(n) = \frac{\sum_{l=0}^{+\infty} f(n-l) g_k(l)}{f(n)} - 1 \qquad \left(= \frac{d_{\mu_{X_k+Y_k}}}{d_{\mu_{X_k}}}(n) - 1 \right)$$

とおく．必要条件としてつぎが得られる．

定理 6.2　　$\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ であれば，

$$(A.1) \qquad \sum_{k\geq 1} \sigma(Y_k > 0)^2 \;=\; \sum_{k\geq 1} (1 - g_k(0)\,)^2 \;<\; +\infty.$$

{**証明**}　　$\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ とする．定理 6.1 (D-2) と，$Z_k(0) = g_k(0) - 1 \leq 0$ $(\forall k \geq 1)$ から，

$$\begin{aligned} +\infty \;&>\; \sum_{k\geq 1} \mathbf{E_P}[\, Z_k(X_k)^2\,;\, Z_k(X_k) \leq 1\,] \\ &\geq\; \sum_{k\geq 1} \mathbf{E_P}[\, Z_k(0)^2\,;\, X_k = 0\,] \\ &=\; \sum_{k\geq 1} \{\, g_k(0) - 1\,\}^2 f(0). \end{aligned}$$

仮定から $f(0)>0$ なので $(A.1)$ が得られる. □

次に Fisher の information に対応するものとして,

$$I(l)=\sum_{n\geq 0}\frac{\{f(n-l)-f(n)\}^2}{f(n)}\quad\left(=\sum_{n\geq 0}\frac{f(n-l)^2}{f(n)}-1\right)\qquad l\in\mathbf{N}_0,$$

を考える.

定理 6.3 {十分条件} $L\in\mathbf{N}_0$ が存在して,

$$(A.2)\qquad I(l)<+\infty\qquad l=0,1,2,\cdots,L$$

$$(A.3)\qquad \sum_{k\geq 1}\sigma(Y_k>L)<+\infty$$

が成り立つと仮定する. $(A.1)$ が成り立てば $\mu_{\mathbf{X}}\sim\mu_{\mathbf{X+Y}}$ となる.

{証明} 定理 6.1 の命題 (C) を示す. $L\in\mathbf{N}_0$ を仮定のものとし,

$$\begin{aligned}
Z_k(X_k) &= \frac{\sum_{l=0}^{+\infty}f(X_k-l)g_k(l)}{f(X_k)}-1\\
&= \frac{\sum_{l=1}^{+\infty}\{f(X_k-l)-f(X_k)\}g_k(l)}{f(X_k)}\\
&= \frac{\sum_{l=1}^{L}\{f(X_k-l)-f(X_k)\}g_k(l)}{f(X_k)}+\frac{\sum_{l=L+1}^{+\infty}\{f(X_k-l)-f(X_k)\}g_k(l)}{f(X_k)}\\
&= W_k+V_k
\end{aligned}$$

とおく. $(A.3)$ から,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1}\mathbf{E_p}[|V_k|] &\leq \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 0}\sum_{l>L}\{f(n-l)+f(n)\}g_k(l)\\
&= 2\sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 0}\sum_{l>L}f(n)\,g_k(l)\\
&= 2\sum_{k\geq 1}\sigma(Y_k>L)<+\infty.
\end{aligned}$$

従って $\sum_{k=1}^{+\infty}|V_k|<+\infty$ a.s. となり $\sum_{k=1}^{+\infty}V_k$ は概収束する.

次に $\sum_{k=1}^{+\infty} W_k$ が概収束することを示せば証明は終わる．これには $\{W_k\}_{k\geq 1}$ が独立かつ平均 0 の確率変数列なので，$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{E_p}[W_k^2] < +\infty$ を示せば十分．実際 Schwarz の不等式と仮定 $(A.1)$, $(A.2)$ から，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1} \mathbf{E_p}[W_k^2] &= \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 0} \frac{1}{f(n)} [\sum_{l=1}^{L} \{ f(n-l) - f(n) \} g_k(l)]^2 \\
&\leq \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 0} \frac{1}{f(n)} [\sum_{l=1}^{L} \{ f(n-l) - f(n) \}^2 g_k(l) \sum_{l'=1}^{L} g_k(l')] \\
&\leq \sum_{k\geq 1} \sup_{1\leq l\leq L} I(l) [\sum_{l\geq 1} g_k(l)]^2 = \sup_{1\leq l\leq L} I(l) \sum_{k\geq 1} [1 - g_k(0)]^2 < +\infty \qquad \square
\end{aligned}
$$

定理 6.4 $f(n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda}$ $(\lambda > 0, n \in \mathbf{N}_0)$ とする．$L \in \mathbf{N}_0$ が存在して $(A.3)$ が成り立つと仮定する．$\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ であるための必要十分条件は $(A.1)$ が成り立つことである．

{証明} 以下で $f(n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda}$ $(\lambda > 0, n \geq 0)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
I(l) &= \sum_{n\geq 0} \frac{f(n-l)^2}{f(n)} - 1 \\
&= \sum_{l\leq n<2l} \frac{f(n-l)^2}{f(n)} + \sum_{m\geq l} \frac{f(m)^2}{f(m+l)} - 1 \leq \sum_{l\leq n<2l} \frac{f(n-l)^2}{f(n)} + (1+l)^l - 1
\end{aligned}
$$

が成り立つことを示す（従って，定理 6.2, 定理 6.3からこの定理がわかる）．実際，

$$
\begin{aligned}
\sum_{m\geq l} \frac{f(m)^2}{f(m+l)} &= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{m\geq l} \frac{(m+l)!\lambda^{m-l}}{(m!)^2} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{m\geq l} \frac{\lambda^{m-l}}{m!}(m+l)(m+l-1)\cdots(m+1) \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{m\geq l} \frac{\lambda^{m-l}}{(m-l)!}(1+\frac{l}{m})(1+\frac{l}{m-1})\cdots(1+\frac{l}{m-l+1}) \\
&\leq \mathrm{e}^{-\lambda}(1+l)^l \sum_{m\geq l} \frac{\lambda^{m-l}}{(m-l)!} = (1+l)^l \qquad \square
\end{aligned}
$$

6.2 $S = \mathbf{R}_+$ の場合

この節では $\mathbf{X} = \{ X_k \}_{k\geq 1}$ は非負値確率変数列で，X_1の分布は密度関数 f,

$$
f(x) = \begin{cases} > 0 \quad a.e. & \text{if} \quad x \geq 0, \\ = 0, & \text{if} \quad x < 0, \end{cases}
$$

を持つとする. 以下の議論では f は $\mathbf{R}_+$ 上の絶対連続関数でその density を f' とするとき,

$$(A.4) \qquad I(f) \overset{def}{=} \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)^2}{f(x)}\,dx < +\infty$$

を仮定する (このとき f' は $\mathbf{R}_+$ 上可積分になる). $\{Y_k\}_{k\geq 1}$ も非負値確率変数列で, 任意の $k\,(\in \mathbf{N})$ と $x > 0$ について,

$$(A.5) \qquad \sigma(\,0 \leq Y_k \leq x\,) > 0$$

が成り立つと仮定する. このとき $\mu_{X_k} \sim \mu_{X_k+Y_k}$ であって $\mu_{X_k+Y_k}$ の μ_{X_k} に対する Radon-Nikodym derivative は,

$$\frac{d\mu_{X_k+Y_k}}{d\mu_{X_k}}(x) = \frac{\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-Y_k)\,]}{f(x)} \qquad x \geq 0$$

で与えられる.

$$\begin{aligned}
Z_k(X_k) &\overset{def}{=} \frac{\mathbf{E}_\sigma[\,f(X_k-Y_k)\,]}{f(X_k)} - 1 \\
&= \Big\{\frac{\mathbf{E}_\sigma[\,f(X_k-Y_k)\,;\,Y_k > \varepsilon\,]}{f(X_k)} - \sigma(Y_k > \varepsilon)\Big\} \\
&\qquad + \Big\{-\sigma(\,X_k < Y_k \leq \varepsilon\,) + \frac{\mathbf{E}_\sigma[\,f(X_k-Y_k) - f(X_k)\,;\,Y_k \leq X_k,\ Y_k \leq \varepsilon\,]}{f(X_k)}\Big\} \\
&= V_\varepsilon(X_k) + W_\varepsilon(X_k) \qquad \cdots\cdots(\mathrm{II}.8)
\end{aligned}$$

とおく.

補題 6.1 (Kitada-Sato [6] Lemma 1) ある $\varepsilon > 0$ について,

$$(A.6) \qquad \sum_{k\geq 1} \sigma(Y_k > \varepsilon) < +\infty$$

であれば,

$$\sum_{k\geq 1} |V_\varepsilon(X_k)| < +\infty \quad a.s.$$

さらに次のことが示せる.

定理 6.5　ある $\varepsilon > 0$ について $\mathbf{R}_+$ 上の可積分関数 φ で

$$(A.7) \qquad \sup_{0\le t\le \varepsilon} \frac{f'(x-t)^2}{f(x)} 1_{\{t<x\}} \le \varphi(x) \qquad a.e\ (dx)$$

をみたすものが存在するとする．さらにこの $\varepsilon > 0$ について $(A.6)$ と

$$(A.8) \qquad \sum_{k\ge 1} \int_0^{+\infty} \sigma(Y_k > x)^2 f(x)\,dx < +\infty,$$

$$(A.9)_\varepsilon \qquad \sum_{k\ge 1} \mathbf{E}_\sigma[Y_k\,;\,Y_k \le \varepsilon]^2 < +\infty$$

が成り立てば $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$．

{**証明**}　$\varepsilon > 0$ を仮定のものとする．補題 6.1, 定理 6.1 から $\sum_{k=1}^{+\infty} W_\varepsilon(X_k)$ が概収束する事を示せばよい．これには $\{W_\varepsilon(X_k)\}_{k\ge 1}$ が独立な平均 0 の確率変数列であることから，$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{E}_\mathbf{P}[W_\varepsilon(X_k)^2] < +\infty$ を示せば十分であることがわかる．実際，Taylor 展開と仮定から

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\ge 1} \mathbf{E}_\mathbf{P}[W_\varepsilon(X_k)^2] \\
=\ & \sum_{k\ge 1} \int_0^{+\infty} \{-\sigma(x < Y_k \le \varepsilon) + \frac{\mathbf{E}_\sigma[f(x-Y_k) - f(x)\,;\,Y_k \le x,\ Y_k \le \varepsilon]}{f(x)}\}^2 f(x)dx \\
\le\ & 2\sum_{k\ge 1} \Big\{ \int_0^{+\infty} \sigma(x < Y_k \le \varepsilon)^2 f(x)dx \\
&\qquad + \int_0^{+\infty} \{\frac{\mathbf{E}_\sigma[f(x-Y_k) - f(x)\,;\,Y_k \le x,\ Y_k \le \varepsilon]}{f(x)}\}^2 f(x)dx \Big\} \\
\le\ & 2\sum_{k\ge 1} \Big\{ \int_0^{+\infty} \sigma(x < Y_k)^2 f(x)dx \\
&\qquad + \int_0^{+\infty} \mathbf{E}_\sigma[\int_0^1 \frac{|f'(x-sY_k)|}{\sqrt{f(x)}}\,ds\,Y_k\,;\,Y_k \le x,\ Y_k \le \varepsilon]^2\,dx \Big\} \\
\le\ & 2\sum_{k\ge 1} \Big\{ \int_0^{+\infty} \sigma(x < Y_k)^2 f(x)dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx\,\mathbf{E}_\sigma[Y_k\,;\,Y_k \le \varepsilon]^2 \Big\} < +\infty \qquad \square
\end{aligned}$$

さて，必要条件について考えよう．

補題 6.2　任意の $\varepsilon > 0$ について

$$(A.10) \qquad \sum_{k\ge 1} \sigma(Y_k > \varepsilon)^2 < +\infty$$

が成り立つとする．また f' は連続関数とする．$\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ であれば $(A.9)_1$ が成り立つ．

{証明} ある $\delta > 0$ が存在して $(A.9)_\delta$ が成り立つことを示せば任意の $\varepsilon > 0$ について $(A.10)$ が成り立つことから $(A.9)_1$ が示せる．

$\varepsilon > 0$ を $L \overset{def}{=} f(\varepsilon) > 0$ と取る．仮定からこの $\varepsilon > 0$ について $(A.10)$ が成り立つ．

$$\alpha = \inf\{\, x \geq 0\,;\, |f(\varepsilon + x) - f(\varepsilon)| \geq \frac{L}{2}\,\}$$

とおく（f の連続性と可積分性から $0 < \alpha < +\infty$）． $[x_1, x_2] \subseteq [\varepsilon, \varepsilon + \alpha]$ を，

$$l \overset{def}{=} \inf_{x \in [x_1, x_2]} |\, f'(x)\,| > 0$$

ととれる（$f' \not\equiv 0$ on $[\varepsilon, \varepsilon + \alpha]$ であることと f' の連続性から）．

$K = \sup_{0 \leq x \leq \varepsilon + \alpha} f(x)$（$0 < K < +\infty$），また $M = 2\dfrac{K}{L}$ とおく． $\varepsilon \leq x \leq \varepsilon + \alpha$ のとき，

$$\chi_k(x) \overset{def}{=} \frac{\mathbf{E}_\sigma[f(x - Y_k)]}{f(x)} \quad (\, = Z_k(x) + 1\,) \leq M$$

いま $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ を仮定すると定理 6.1 (D-2) から，

$$+\infty > \sum_{k \geq 1} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\, Z_k(X_k)^2\,;\, Z_k(X_k) \leq M\,] \geq \sum_{k \geq 1} \int_\varepsilon^{\varepsilon + \alpha} \{\,\chi_k(x) - 1\,\}^2 f(x)\, dx.$$

従って，$\delta < \varepsilon$ であれば，

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \geq 1} \int_\varepsilon^{\varepsilon + \alpha} \mathbf{E}_\sigma[\, f(x - Y_k) - f(x)\,;\, Y_k \leq \delta\,]^2 \frac{dx}{f(x)} \\
= \; & \sum_{k \geq 1} \int_\varepsilon^{\varepsilon + \alpha} \{\, \mathbf{E}_\sigma[\, f(x - Y_k) - f(x)\,;\, Y_k \leq x\,] \\
& \qquad\qquad - \mathbf{E}_\sigma[\, f(x - Y_k) - f(x)\,;\, \delta < Y_k \leq x\,]\}^2 \frac{dx}{f(x)} \\
\leq \; & 2\sum_{k \geq 1} \int_\varepsilon^{\varepsilon + \alpha} \mathbf{E}_\sigma[\, f(x - Y_k) - f(x)\,;\, Y_k \leq x\,]^2 \frac{dx}{f(x)} + [8MK\alpha] \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > \delta)^2 \\
= \; & 2\sum_{k \geq 1} \int_\varepsilon^{\varepsilon + \alpha} \{\, \mathbf{E}_\sigma[\, f(x - Y_k)\,] - f(x) + f(x)\sigma(\, Y_k > x\,)\,\}^2 \frac{dx}{f(x)} \\
& \qquad\qquad + [8MK\alpha] \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > \delta)^2 \\
\leq \; & 4\sum_{k \geq 1} \left\{\, \int_\varepsilon^{\varepsilon + \alpha} [\,\chi_k(x) - 1\,]^2 f(x)\, dx + \int_\varepsilon^{\varepsilon + \alpha} \sigma(\, Y_k > x\,)^2 f(x)\, dx \,\right\} \\
& \qquad\qquad + [8MK\alpha] \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > \delta)^2 \\
\leq \; & 4\sum_{k \geq 1} \int_\varepsilon^{\varepsilon + \alpha} \{\,\chi_k(x) - 1\,\}^2 f(x)\, dx + 4K\alpha[2M + 1] \sum_{k \geq 1} \sigma(Y_k > \delta)^2 \; < \; +\infty
\end{aligned}$$

以上から $\delta < \min\{\varepsilon, \frac{x_2-x_1}{2}\}$ のとき,

$$\begin{aligned}
+\infty &> \sum_{k\geq 1}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\alpha} \mathbf{E}_\sigma[\, f(x-Y_k)-f(x)\,;\, Y_k\leq\delta\,]^2\frac{dx}{f(x)} \\
&\geq \sum_{k\geq 1}\int_{x_1+\delta}^{x_2} \mathbf{E}_\sigma[\int_0^1 |\, f'(x-sY_k)ds\,|Y_k\,;\, Y_k\leq\delta\,]^2\frac{dx}{f(x)} \\
&\geq \frac{\delta l}{K}\sum_{k\geq 1}\mathbf{E}_\sigma[\, Y_k\,;\, Y_k\leq\delta\,]^2.
\end{aligned}$$

$\delta > 0, l > 0, 0 < K < +\infty$ だから,

$$\sum_{k\geq 1}\mathbf{E}_\sigma[\, Y_k\,;\, Y_k\leq\delta\,]^2 < +\infty \qquad \square$$

補題 6.3 任意の$\varepsilon > 0$ について $(A.10)$ が成り立つとする. $f(0) > 0$ で, さらに f'は連続関数. また$\delta > 0$が存在して,

$$\sup_{0<t\leq\delta} |\, f'(t)\,| \leq 1$$

が成り立つとする. $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ であれば $(A.8)$ が成り立つ.

{**証明**} 補題 6.2 から, $(A.9)_1$ が成り立っていることに注意する. $M = f(0)$ とする ($M > 0$) .

$$\gamma = \inf\{\, x\geq 0\,;\, |\, f(x)-f(0)\,| \geq \frac{M}{4}\,\}$$

とおく (f の連続性と可積分性から$0 < \gamma < +\infty$ に注意する) . $0\leq x\leq\gamma$ のとき,

$$\chi_k(x) \overset{def}{=} \frac{\mathbf{E}_\sigma[\, f(x-Y_k)\,]}{f(x)} \quad (= Z_k(x)+1) \leq 2.$$

いま $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ を仮定すると定理 6.1 (D-2) から,

$$\begin{aligned}
+\infty &> \sum_{k\geq 1}\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\, Z_k(X_k)^2\,;\, Z_k(X_k)\leq 1\,] \\
&\geq \sum_{k\geq 1}\int_0^\gamma \{\,\chi_k(x)-1\,\}^2 f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 1}\int_0^\gamma \sigma(Y_k > x)^2 f(x)\,dx \\
=\ &\sum_{k\geq 1}\int_0^\gamma \left\{\left[\mathbf{E}_\sigma[\frac{f(x-Y_k)}{f(x)}]-1\right] f(x) - \mathbf{E}_\sigma[\, f(x-Y_k)-f(x)\,;\, x\geq Y_k\,]\right\}^2\frac{dx}{f(x)} \\
\leq\ &2\sum_{k\geq 1}\left\{\int_0^\gamma [\,\chi_k(x)-1\,]^2 f(x)\,dx + \int_0^\gamma \mathbf{E}_\sigma[\, f(x-Y_k)-f(x)\,;\, x\geq Y_k\,]^2\frac{dx}{f(x)}\right\}.
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 1}\int_0^{\gamma}\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-Y_k)-f(x)\,;\,x\geq Y_k\,]^2\,\frac{dx}{f(x)}\\
\leq\ &\frac{4}{3M}\int_0^{\gamma}\mathbf{E}_\sigma[\,\int_0^1|f'(x-sY_k)|dsY_k\,;\,x\geq Y_k\,]^2\,dx\\
\leq\ &\frac{4}{3M}\gamma\{\sup_{0<x\leq\gamma}|f'(x)|\}^2\,\mathbf{E}_\sigma[\,Y_k\,;\,Y_k\leq\gamma]^2\ <\ +\infty.
\end{aligned}$$

以上から,

$$\sum_{k\geq 1}\int_0^{\gamma}\sigma(Y_k>x)^2 f(x)\,dx\ <\ +\infty.$$

これと仮定 $(A.10)$ によって $(A.8)$ が導かれる. □

定理 6.5, 補題 6.2, 補題 6.3から次が示せる.

定理 6.6 $\lim_{k\to+\infty}Y_k=0$ σ $a.s.$ また密度関数 f は $f(0)>0$ と, ある $\varepsilon>0$ と $\mathbf{R}_+$ 上の可積分関数 φ について $(A.7)$ をみたすとする. さらに f' が連続関数で, 実数 $M\geq 0$ が存在して $|f'(x)|\leq M$ $(0<\forall x\leq 1)$ が成り立つとする. 次の (A), (B) は同値になる.

(A) $\mu_{\mathbf{X}}\sim\mu_{\mathbf{X+Y}}$.

(B) $(A.8)$, $(A.9)_1$ が成り立つ.

最後に Kakutani の定理から得られる結果を示す.

定理 6.7

$$\sum_{k\geq 1}Y_k^2\ <\ +\infty\quad \sigma\ a.s.$$

とする. $(A.8)$ が成り立てば, $\mu_{\mathbf{X}}\sim\mu_{\mathbf{X+Y}}$.

{証明} $\sum_{k\geq 1}Y_k^2<+\infty$ σ $a.s.$ を仮定すると Kolmogolov の三級数定理によって,

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{k\geq 1}\sigma(\,Y_k>1\,)\ <\ +\infty\\ \displaystyle\sum_{k\geq 1}\mathbf{E}_\sigma[\,Y_k^2\,;\,Y_k\leq 1\,]\ <\ +\infty\end{cases}$$

が成り立っている. さらに $(A.5)$ を考慮すると,

$$a=\inf_{k\geq 1}\sigma(Y_k\leq 1)>0 \tag{II.9}$$

としてよい. さて Kakutani の定理から, $\mu_{\mathbf{X}}\sim\mu_{\mathbf{X+Y}}$ が成り立つことと

$$\sum_{k\geq 1}\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-Y_k)\,]}-\sqrt{f(x)}\right)^2dx\ <\ +\infty \tag{II.10}$$

が成り立つことが同値であることに注意する．

$k\in\mathbf{N}$ を固定する．非負実数 $a, b, c, d,$ が与えられたとき $(\sqrt{a+b}-\sqrt{c+d}\,)^2\leq(\sqrt{a}-\sqrt{c}\,)^2+(\sqrt{b}-\sqrt{d}\,)^2$ が成り立つことに注意すると，

$$
\begin{aligned}
& \left(\sqrt{\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-Y_k)\,]}-\sqrt{f(x)}\right)^2 \\
= & \left(\sqrt{\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-Y_k)\,;\,Y_k>1\,]+\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-Y_k)\,;\,Y_k\leq 1\,]}\right. \\
& \qquad\qquad \left.-\sqrt{f(x)\sigma(Y_k>1)+f(x)\sigma(Y_k\leq 1)}\right)^2 \\
\leq & \left(\sqrt{\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-Y_k)\,;\,Y_k>1\,]}-\sqrt{f(x)\sigma(Y_k>1)}\right)^2 \\
& \qquad\qquad +\left(\sqrt{\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-Y_k)\,;\,Y_k\leq 1\,]}-\sqrt{f(x)\sigma(Y_k\leq 1)}\right)^2 \\
\leq & \;2\left\{\,\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-Y_k)\,;\,Y_k>1\,]+f(x)\sigma(Y_k>1)\,\right\} \\
& \qquad +2\left(\sqrt{\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-Y_k)\,;\,Y_k\leq 1\,]}-\sqrt{f(x)\sigma(Y_k\leq 1,\,Y_k\leq x)}\right)^2 \\
& \qquad\qquad +2\left(\sqrt{\sigma(Y_k\leq 1)}-\sqrt{\sigma(Y_k\leq 1,\,Y_k\leq x)}\right)^2 f(x)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで Fubini の定理に注意すると，

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k\geq 1}\int_0^{+\infty}\left\{\,\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-Y_k)\,;\,Y_k>1\,]+f(x)\sigma(Y_k>1)\,\right\}dx \\
= & \;2\sum_{k\geq 1}\sigma(Y_k>1)\;<\;+\infty
\end{aligned}
$$

また Taylor 展開，Schwarz の不等式から，

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k\geq 1}\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-Y_k)\,;\,Y_k\leq 1\,]}-\sqrt{f(x)\sigma(Y_k\leq 1,\,Y_k\leq x)}\right)^2 dx \\
= & \sum_{k\geq 1}\int_0^{+\infty}dx\left\{\int_0^1\frac{\mathbf{E}_\sigma[\,f'(x-tY_k)(-Y_k)\,;\,Y_k\leq 1,\,Y_k\leq x\,]}{2\sqrt{\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-tY_k)\,;\,Y_k\leq 1,\,Y_k\leq x\,]}}\,dt\right\}^2 \\
\leq & \sum_{k\geq 1}\int_0^{+\infty}dx\int_0^1\frac{1}{4}\frac{1}{\mathbf{E}_\sigma[\,f(x-tY_k)\,;\,Y_k\leq 1,\,Y_k\leq x\,]} \\
& \qquad\qquad \times\mathbf{E}_\sigma[\,\frac{f'(x-tY_k)Y_k}{\sqrt{f(x-tY_k)}}\sqrt{f(x-tY_k)}\,;\,Y_k\leq 1,\,Y_k\leq x\,]^2\,dt \\
\leq & \;\frac{1}{4}\sum_{k\geq 1}\int_0^{+\infty}dx\int_0^1\mathbf{E}_\sigma[\,\frac{f'(x-tY_k)^2}{f(x-tY_k)}Y_k^2\,;\,Y_k\leq 1,\,Y_k\leq x\,]\,dt \\
\leq & \;\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{f'(x)^2}{f(x)}\,dx\sum_{k\geq 1}\mathbf{E}_\sigma[\,Y_k^2\,;\,Y_k\leq 1\,]\;<\;+\infty
\end{aligned}
$$

さらに (II.9) と $(A.8)$ から，

$$\sum_{k\geq1}\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\sigma(Y_k\leq1)}-\sqrt{\sigma(Y_k\leq1,\,Y_k\leq x)}\right)^2 f(x)dx$$
$$=\sum_{k\geq1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sigma(Y_k\leq1)-\sigma(Y_k\leq1,\,Y_k\leq x)}{\sqrt{\sigma(Y_k\leq1)}+\sqrt{\sigma(Y_k\leq1,\,Y_k\leq x)}}\right)^2 f(x)dx$$
$$\leq \frac{1}{a}\sum_{k\geq1}\int_0^{+\infty}\sigma(x<Y_k)^2 f(x)dx < +\infty$$

以上から (II.10) が示され $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ がわかった． □

6.3 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}1_{\{x\geq0\}}$ のとき

最後に $f(x)=\mathrm{e}^{-x}1_{\{x\geq0\}}$ のときについて考えよう．

補題 6.4 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}1_{\{x\geq0\}}$ とする． $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ であれば任意の $\varepsilon>0$ について，

$$\sum_{k\geq1}\{\,\mathbf{E}_\sigma[\mathrm{e}^{Y_k}-1\,;\,Y_k\leq x\,]-\sigma(\,Y_k>x\,)\,\}^2 < +\infty. \qquad a.e\ \ x\in[0,\varepsilon]$$

{**証明**} 任意の $\varepsilon>0$ を固定し $M=\mathrm{e}^{\varepsilon}$ とおく． $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ であれば定理 6.1 (D-2) から

$$\begin{aligned}
+\infty &> \sum_{k\geq1}\mathbf{E}_{\mathbf{p}}[\,Z_k(X_k)^2\,;\,Z_k(X_k)\leq M\,]\\
&= \sum_{k\geq1}\mathbf{E}_{\mathbf{p}}\left[\{\,\mathbf{E}_\sigma[\,\mathrm{e}^{Y_k}\,;\,x\geq Y_k\,]-1\,\}^2\,;\,\mathbf{E}_\sigma[\mathrm{e}^{Y_k}\,;\,X_k\geq Y_k]\leq M+1\right]\\
&\geq \sum_{k\geq1}\int_0^{\varepsilon}\{\,\mathbf{E}_\sigma[\,\mathrm{e}^{Y_k}\,;\,x\geq Y_k\,]-1\,\}^2\mathrm{e}^{-x}\,dx\\
&= \int_0^{\varepsilon}\sum_{k\geq1}\left\{\,\mathbf{E}_\sigma[\,\mathrm{e}^{Y_k}-1\,;\,Y_k\leq x\,]-\sigma(Y_k>x)\,\right\}^2\mathrm{e}^{-x}\,dx
\end{aligned}$$

これより結論が得られる． □

定理 6.8 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}1_{\{x\geq0\}}$ とする． またある $\varepsilon>0$ について $(A.6)$ が成り立つとする． このとき次の (A), (B) は同値である．

(A) $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ ．

(B) $(A.8)$, $(A.9)_\varepsilon$ が成り立つ．

{**証明**} (B)$\Longrightarrow$(A) は 定理 6.5 より.
(A)$\Longrightarrow$(B). $\varepsilon > 0$ を仮定のものとする. 補題 6.4 と $(A.6)$ より $(A.9)_\varepsilon$が成り立つことに注意すれば $(A.8)$ を示せばよいことがわかる. $M = \mathrm{e}^\varepsilon$ とおく. $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ であれば定理 6.1 (D-2) から

$$\begin{aligned} +\infty &> \sum_{k\geq 1} \mathbf{E_p}[\, Z_k(X_k)^2\,;\, Z_k(X_k) \leq M\,] \\ &\geq \sum_{k\geq 1} \int_0^\varepsilon \{\, \mathbf{E}_\sigma[\, \mathrm{e}^{Y_k} - 1;\, Y_k \leq x\,] - \sigma(\, Y_k > x\,)\,\}^2\, \mathrm{e}^{-x}\, dx. \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned} &\sum_{k\geq 1} \int_0^\varepsilon \sigma(\, Y_k > x\,)^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx \\ \leq\ & 2\sum_{k\geq 1} \int_0^\varepsilon \{\, \mathbf{E}_\sigma[\, \mathrm{e}^{Y_k} - 1;\, Y_k \leq x\,] - \sigma(\, Y_k > x\,)\,\}^2\, \mathrm{e}^{-x}\, dx \\ &\qquad\qquad + 2\sum_{k\geq 1} \mathbf{E}_\sigma[\, \mathrm{e}^{Y_k} - 1;\, Y_k \leq \varepsilon\,]^2 \\ <\ & +\infty \end{aligned}$$

このことと $(A.6)$ から $(A.8)$ が導かれる. □

さて, 上の定理では最初にある$\varepsilon > 0$ について $(A.6)$ が成り立つと仮定して議論を進めた. しかし次に示すように $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ であっても任意の$\varepsilon > 0$ について $(A.6)$ が成り立たない例が存在することに注意する.

例 6.1 $f(x) = \mathrm{e}^{-x} 1_{\{x\geq 0\}}$ とする.
$\alpha > 0$ を固定し, $a_k = \log(k^{\frac{\alpha}{2}} + 1)\ (k \geq 1)$ とする. $\mathbf{Y} = \{\, Y_k\,\}_{k\geq 1}$ を,

$$\sigma(Y_k = a_k) = k^{-\alpha},\ \ \sigma(Y_k = 0) = 1 - k^{-\alpha}$$

で与える.

$$Z_k(X_k) \stackrel{def}{=} \mathbf{E}_\sigma[\, \mathrm{e}^{Y_k};\, X_k \geq Y_k\,] - 1 = \begin{cases} -k^{-\alpha} & \text{if } X_k < a_k \\ k^{-\alpha}(\mathrm{e}^{a_k} - 1) = k^{-\frac{\alpha}{2}} & \text{if } X_k \geq a_k \end{cases}$$

となる. $-1 < Z_k(X_k) \leq 1\ a.s.\ (\forall k \in \mathbf{N})$, また $\{\, Z_k(X_k)\,\}_{k\geq 1}$ が独立な平均 0 の確率変数列であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}} \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \sum_{k\geq 1} Z_k(X_k)\ \text{は概収束} \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \sum_{k\geq 1} \mathbf{E_p}[\, Z_k(X_k)^2\,] < +\infty \\ \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \sum_{k\geq 1} k^{-\frac{3}{2}\alpha} < +\infty \end{aligned}$$

である．ところで $\varepsilon > 0$ について $k_\varepsilon = \inf\{\, k\,;\, a_k > \varepsilon \,\}$ とおけば

$$\sum_{k\geq 1} \sigma(Y_k > \varepsilon) = \sum_{k \geq k_\varepsilon} k^{-\alpha}$$

だから，任意の $\varepsilon > 0$ について，

$$\alpha > 1 \text{ のとき} \begin{cases} \sum_{k\geq 1} \sigma(Y_k > \varepsilon) \;<\; +\infty \\ \mu_{\mathbf{X}} \;\sim\; \mu_{\mathbf{X+Y}} \end{cases}$$

$$1 \geq \alpha > \frac{2}{3} \text{ のとき} \begin{cases} \sum_{k\geq 1} \sigma(Y_k > \varepsilon) \;=\; +\infty \\ \mu_{\mathbf{X}} \;\sim\; \mu_{\mathbf{X+Y}} \;. \end{cases}$$

ちなみにこの場合は，

$$\sum_{k\geq 1} \int_\varepsilon^{+\infty} \mathbf{E}_\sigma[\mathrm{e}^{Y_k} - 1\,;\, \varepsilon < Y_k \leq x\,]^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx = \sum_{k\geq k_\varepsilon} k^{-\alpha} \frac{1}{k^{\frac{\alpha}{2}+1}}$$

となり，

$$\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}} \;\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}\; \sum_{k\geq 1} \int_\varepsilon^{+\infty} \mathbf{E}_\sigma[\mathrm{e}^{Y_k} - 1\,;\, \varepsilon < Y_k \leq x\,]^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx < +\infty \qquad \square$$

定理 6.9　$f(x) = \mathrm{e}^{-x} 1_{\{x\geq 0\}}$ とする．ある $\varepsilon > 0$ について $(A.10)$ が成り立つとする．この $\varepsilon > 0$ について，

$$(A.11) \qquad \sum_{k\geq 1} \int_\varepsilon^{+\infty} \mathbf{E}_\sigma[\mathrm{e}^{Y_k} - 1\,;\, \varepsilon < Y_k \leq x\,]^2 \mathrm{e}^{-x} dx < +\infty,$$

と，さらに $(A.8), (A.9)_\varepsilon$ が成り立てば，$\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ ．

{**証明**}　(II.8) (p.12 参照) において $(A.10), (A.11)$ に注意すると，

$$\begin{aligned} \sum_{k\geq 1} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}[\,V_\varepsilon(X_k)^2\,] &= \sum_{k\geq 1} \int_0^{+\infty} \Big\{ \mathbf{E}_\sigma[\,\mathrm{e}^{Y_k} - 1\,;\, \varepsilon < Y_k \leq x\,] - \sigma(Y_k > x,\, Y_k > \varepsilon) \Big\}^2 \mathrm{e}^{-x} dx \\ &\leq 2 \sum_{k\geq 1} \left\{ \int_\varepsilon^{+\infty} \mathbf{E}_\sigma[\,\mathrm{e}^{Y_k} - 1\,;\, \varepsilon < Y_k \leq x\,]^2\, \mathrm{e}^{-x} dx + \sigma(Y_k > \varepsilon)^2 \right\} < +\infty \end{aligned}$$

$\{\,V_\varepsilon(X_k)\,\}_{k\geq 1}$ は独立で平均 0 の確率変数列だから $\sum_{k=1}^{+\infty} V_\varepsilon(X_k)$ は概収束する．他方 $(A, 8)$ と $(A.9)_\varepsilon$ を考慮すると定理 6.5 の証明から $\sum_{k=1}^{+\infty} W_\varepsilon(X_k)$ も概収束していることがわかり定理 6.1 の命題 (C) が示せた．従って $\mu_{\mathbf{X}} \sim \mu_{\mathbf{X+Y}}$ ．

参考文献

[1] X.Fernique. Ecole d'Ete de Probabilities de Saint-Flour IV. *Lect. Note Math*, **480**, 1974.

[2] J.P.Kahane. *Some random series of functions 1'st ed.* Heath, **1968**. *2'nd ed.* Cambridge Univ. **1985**

[3] J.P.Kahane. Sur le chaos multiplicatif. *Ann. Sci. Math. Québec*, **9**(2):105–150, 1985.

[4] J.P.Kahane. and J.Peyriére. Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot. *Adv. in Math*, **22**:131–145, 1976.

[5] S.Kakutani. On equivalence of infinite product measures. *Ann. Math* , **49**:214–224, 1948.

[6] K.Kitada. and H.Sato. On the absolute continuity of infinite product measure and its convolution. *Probab.Th. Rel.Fields*, **81**:609–627, 1989.

[7] S.Kusuoka. Høegh-Krohn's model of quantum fields and the absolute continuity of measures. *Res. Inst. Math. Sci.* (*Preprint*) , 1988.

[8] Yu. A. Rozanov. On the density of one Gaussian measure with respect to another. *Th. Probab. Appl*, **7**:82–87, 1962.

[9] H. Sato. On the convergence of the product of independent random variables. *J. Math. Kyoto. Univ*, **27**:381–385, 1987.

[10] L.A.Shepp. Distinguishing a sequence of random variables from a translate of itself. *Ann.Math.Stat*, **36**:1107–1112, 1965.