

## Average distance on snowflake fractal.

阪大理学部 村井 淨信 (Joushin Murai)

## §1 Introduction.

[H-S] において, A.M. Hinz と A. Schief は  $\mathbb{R}^D$  内の compact set  $E$  に "average distance" という量を導入し, Sierpinski gasket  $E$  で その値を求めることに成功した. Sierpinski gasket とは, 各辺の長さ 1 の三角形から, 各辺の中点を頂点とする三角形を取り除く, この操作を残りの小三角形に対しても順次施していくことにより得られる図形である. この図形は 1915 年に Waclaw Sierpinski により, 各点が分岐している初めての例として発見され, Mandelbrot により fractal の一つとして Sierpinski gasket と名付けられた.

Average distance を求める. Hinz と Schief の議論で Key と呼ぶのは Sierpinski gasket の持つ図形的特徴, self-similarity と finitely ramification である.

Lindström [L] の提唱した "nested fractals" は、この  
2つの特徴を備えた  $\mathbb{R}^D$  内の fractal の class の 1 つである。

この paper では、snowflake fractal と呼ばれる nested  
fractals の 1 つについて、Hinze と Schief の手法を一般  
化することにより、average distance を求めるが、多  
くの nested fractals に対して、この一般化した方法が  
有効であることを注意しておく。

Def. 1.1  $E : \text{c.p.t.} \subset \mathbb{R}^D$   $x, y \in E$

$$d(x, y) \equiv \inf \{ |P| ; P \text{ is rectifiable curve in } E \\ \text{joining } x \text{ and } y \}$$

但し、 $|P|$  は curve  $P$  の長さ

更に、

$\mu : E$  の finite measure

$d : \text{continuous}$  と仮定。

$\hat{d} : \text{average distance}$  とは

$$\hat{d} \equiv \int_{E \times E} d(x, y) \mu(dx) \mu(dy)$$

Theorem 1.2 (A.M. Hinze - A. Schief)

Sierpinski gasket の average distance は  $\frac{466}{855}$

□

$\mathbb{R}^3$  内の正四面体から始めることにより, Sierpinski gasket の 3次元版を考えることができる. 3-dim Sierpinski gasket  $I$  では, Hinze と Schief の手法で average distance を求めることができる.

### Cor 1.3

3-dim Sierpinski gasket の average distance は  $\frac{667}{1050}$

□

### § 2 snow-frame fractal.

Def 2.1  $I = \{0, 1, \dots, 5\} \simeq \mathbb{Z}_6$

(1)  $\{p_i\}_{i \in I}$ : 各辺の長 1 の正六角形の頂点,

特に  $p_0 = 0$ .

$\psi_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :  $p_i$  を fixed point とする縮小率  $1/3$  の縮小写像  $i \in I$ .

$\exists E: \text{c.p.t.} \subset \mathbb{R}^2$  with  $E = \bigcup_{i \in I} \psi_i(E)$

$\bar{E}$ : snow frame fractal と呼ぶ.

(2)  $E^- \equiv \{x \in E \mid d(p_0, x) \leq d(p_2, x)\}$ ,  $E^+ = E - E^-$

但し  $d$  の定義は § 1 に同じ.

$E_i \equiv \psi_i(E)$   $i \in I$ . 特に  $\tilde{E} = E_0$ .

(3)  $\mu : E \subset \mathbb{R}^2$  の  $d_f$ -Hausdorff measure,  $\mu(E) = 1$   
 但し  $d_f = \log b, \log \beta$

(4)  $\pi : I^{\mathbb{N}} \longrightarrow E$ .  $I^{\mathbb{N}} \ni \omega = \omega_1, \omega_2, \dots$

$$\pi(\omega) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{\omega_1} \circ \psi_{\omega_2} \circ \dots \circ \psi_{\omega_n}(0)$$

によつて  $E$  と  $I^{\mathbb{N}}$  に対応がつき、更に  $E$  の可算個の点を除いてこの対応は 1対1. よつて  $\mu$  の下で  $E$  と  $I^{\mathbb{N}}$  は同一視できる. 以後  $x \in E$  と  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, x_k \in I$  と書く.

### Remark 2.2.

(1)  $P : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)p_0 + \lambda p_1 \quad \lambda \in [0, 1] \text{ とすると}$$

$$P([0, 1]) \subset E \quad \text{更に } |P| = \sqrt{3}$$

(2)  $\{p_i\}_{i \in I} \subset E$  は次で与える

$$p_i \equiv F_{i+2}(p_i)$$

各  $p_i$  に対応する  $I^{\mathbb{N}}$  の元は 2つずつあり、 $\tau \cdot i \cdot (i+2)$  と  $(i+1) \cdot (i-1)$  である. 但し  $i = i \cdot i \cdot \dots$

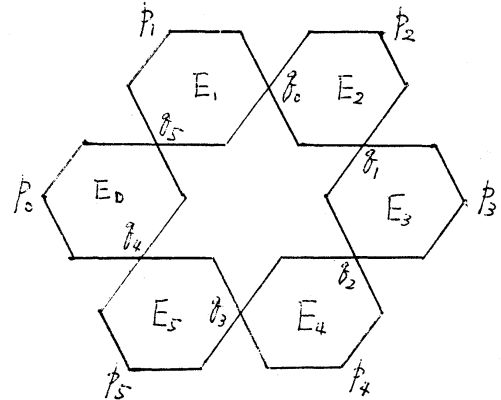
### Prop. 2.3

$$\lambda \equiv \int_E d(0, x) \mu(dx) = \frac{149}{204} \sqrt{3}$$

proof

$$\gamma \equiv \int_E d(o, x) \mu(dx)$$

$$\lambda = \sum_{i \in I} \int_{E_i} d(o, x) \mu(dx)$$



(Case I)  $i = 0$  のとき

$$\begin{aligned} \int_{E_0} d(o, x) \mu(dx) &= \frac{1}{6} \int_E d(o, x) \mu(dx \mid x \in E_0) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \int_E d(o, x) \mu(dx) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \lambda \end{aligned}$$

(Case II)  $i = 1, 5$  のとき

$$\begin{aligned} \int_{E_1} d(o, x) \mu(dx) &= \int_{E_1} \{ d(o, q_5) + d(q_5, x) \} \mu(dx) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \mu(E_1) + \int_{E_1} d(q_5, x) \mu(dx) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{6} + \int_{E_0} d(o, x) \mu(dx) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \lambda \\ i = 5 \text{ のときも同様} \end{aligned}$$

(Case III)  $i = 2, 4$  のとき

$$\begin{aligned} \int_{E_2} d(o, x) \mu(dx) &= \int_{E_2} \{ d(o, q_0) + d(q_0, x) \} \mu(dx) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \lambda \end{aligned}$$

$i = 4$  のときも同様

(Case IV)  $i = 3$  のとき

$E_3^- \equiv \{ x \in E_3 \mid d(q_2, x) \leq d(q_1, x) \}$ ,  $E_3^+ \equiv E_3 - E_3^-$   
 $E_3^+$ ,  $E_3^-$  が  $E^-$  と相似であることに注意(7).

$$\begin{aligned} \int_{E_3} d(o, x) \mu(dx) &= \int_{E_3^+} \{ d(o, q_1) + d(q_1, x) \} \mu(dx) \\ &\quad + \int_{E_3^-} \{ d(o, q_2) + d(q_2, x) \} \mu(dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{6} + \int_{E_3^+} d(q_1, x) \mu(dx) + \int_{E_3^-} d(q_2, x) \mu(dx) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \sigma.
\end{aligned}$$

以上により、次の関係式を得る。

$$13\lambda = 2\sigma + 9\sqrt{3}.$$

$\sigma$  に対しても、同様の考察と与えることにより

$$32\sigma = 4\lambda + 5\sqrt{3}.$$

$$\therefore \lambda = \frac{149}{204} \sqrt{3} \quad \left( \sigma = \frac{101}{408} \sqrt{3} \right)$$

□

average distance.

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &\equiv \int_{E \times E} d(x, y) \mu(dx) \mu(dy) \\
&= \sum_{i \in I} 6 \int_{E_0 \times E_i} d(x, y) \mu(dx) \mu(dy)
\end{aligned}$$

に對して、Prop. 2.3 と同様の議論により

$$17\mathcal{J} = 10\lambda - P + 4\sqrt{3}.$$

$$\text{但し、} P \equiv 3 \int_{E \times E} (d_1(x, y) - d_2(x, y))^+ \mu \otimes \mu(dx, dy | x \in E_0, y \in E_3)$$

$$d_1(x, y) \equiv d(x, q_5) + d(q_5, q_1) + d(q_1, y)$$

$$d_2(x, y) \equiv d(x, q_4) + d(q_4, q_3) + d(q_3, y)$$

$$a^+ = a \vee 0$$

Remark 2.2 により

$$d_1(x, y) - d_2(x, y) = d(x, o_2) - d(x, o_4) + d(o_1, y) - d(o_3, y)$$

Def 2.4  $x \in E$   $x = (x_k)_{k=1}$ .

$$(1) D^{(i)}(x) \equiv d(\dot{i}, x) - d(\dot{i+2}, x)$$

$$\tilde{D}^{(i)}(x) \equiv d(x, \dot{i}, x) - d(x, \dot{i+2}, x)$$

$$\text{特に } D = D^{(0)}, \tilde{D} = \tilde{D}^{(0)}$$

$$(2) \sigma : \text{shift } x : \begin{array}{c} \mathbb{I}^{\mathbb{N}} \\ \downarrow \\ x_1, x_2, x_3, \dots \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathbb{I}^{\mathbb{N}} \\ \downarrow \\ x_2, x_3, \dots \end{array}$$

Definition 2.1 (4) より,  $\sigma : E \rightarrow E$  と思, 1 良し.

$$(3) U : E \rightarrow E : \text{linear かつ } U(\beta_1) = \beta_5, U(\beta_2) = \beta_4$$

Lemma 2.5

$$(1) \pm D^{(i)}(\cdot) \stackrel{\mu}{\cong} D(\cdot)$$

$$\pm \tilde{D}^{(i)}(\cdot) \stackrel{\mu}{\cong} \tilde{D}(\cdot)$$

$$(2) D(x) = -D \circ U(x)$$

for  $\forall x \in E$ .

$$(3) \tilde{D}(x) = \frac{1}{3} D(\sigma x)$$

for  $\forall x \in E$ .

$$(4) -\sqrt{3} \leq D(x) \leq \sqrt{3} \quad \text{for } \forall x \in E$$

$$-\sqrt{3} \leq \tilde{D}(x) \leq 0 \quad \text{for } \forall x \in E$$

proof.

(1) - (3) clear.

$$(4) \quad C = \max_{x \in E} D(x)$$

$x_0 \in E$  :  $I$  の  $\max$  を attain.

$x_0 \in E_2$  は簡単にわかる.

$$\begin{aligned} C &= d(p_0, p_0) + d(p_0, x_0) - d(p_2, x_0) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{3} + \tilde{D}(x_0) = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}D(\sigma x_0) \\ &\leq \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}C \end{aligned}$$

□

Lemma 2.5 を用いて,  $P$  を変形すると

$$P = \int_{E \times E} (D(x) + D(y))^+ d(\mu \otimes \mu)$$

$P$  の計算を行うために, 次の notation を導入する.

$$Q \equiv \int_{E^- \times E} (D(x) + D(y))^+ d(\mu \otimes \mu)$$

$$R \equiv \int_{E^- \times E} (-D(x) + D(y))^+ d(\mu \otimes \mu)$$

$$S \equiv \int_{E^- \times E^-} (D(x) - D(y))^+ d(\mu \otimes \mu)$$

$$\alpha \equiv \int_{E^+} D(x) d\mu \quad \beta \equiv \int_{E^-} D(x) d\mu.$$

Remark 2.6 Lem. 2.5 より次を得る

$$(1) \quad \int_E D(x) \mu(dx) = 0.$$

$$(2) \quad \int_{E^-} (D(x))^+ \mu(dx) = 0$$

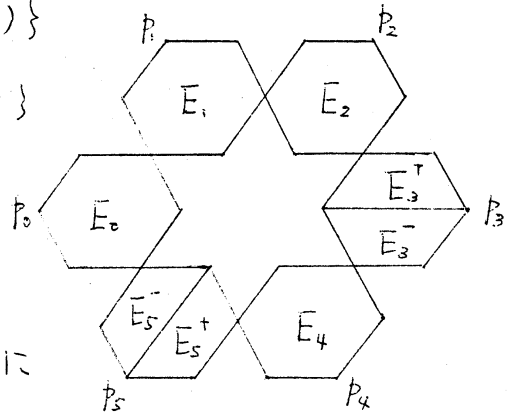
$$(3) \quad \alpha = \int_E (D(x))^+ d\mu = \int_{E^-} (-D(x))^+ d\mu = -\beta = \frac{4}{17}\sqrt{3}.$$



$$E_3^- \equiv \{x \in E_3; d(3i, x) \leq d(3j, x)\}$$

$$E_5^- \equiv \{x \in E_5; d(5i, x) \leq d(5j, x)\}$$

$$E_3^+ \equiv E_3 - E_3^-, \quad E_5^+ = E_5 - E_5^-$$



\$E\$ と右図のように、8 parts に分割し、\$P\$ の積分域を \$8 \times 8 = 64\$ parts に分ける。

$$P = \int_{E_0 \times E_0} + \int_{E_0 \times E_1} + \dots$$

### Lemma 2.7

$$D(x) = \begin{cases} \tilde{D}^{(0)}(x) - \frac{2}{3}\sqrt{3} & \text{if } x \in E_0 \\ -\tilde{D}^{(3)}(x) & \text{if } x \in E_1 \\ \tilde{D}^{(0)}(x) + \frac{2}{3}\sqrt{3} & \text{if } x \in E_2 \\ \frac{2}{3}\sqrt{3} & \text{if } x \in E_3^+ \\ \tilde{D}^{(5)}(x) + \frac{2}{3}\sqrt{3} & \text{if } x \in E_3^- \\ \tilde{D}^{(0)}(x) & \text{if } x \in E_4 \\ \tilde{D}^{(1)}(x) - \frac{2}{3}\sqrt{3} & \text{if } x \in E_5^+ \\ -\frac{2}{3}\sqrt{3} & \text{if } x \in E_5^- \end{cases}$$

□

以上の準備の下で、64分に分けられた \$P\$ の各 part を変形していくが、ここではそのうちのいくつか、特徴的なものについて実際にそれを変形してみる。

$$\begin{aligned}
& \int_{E_0 \times E_0} (D(x) + D(y))^+ d(\mu \otimes \mu) \\
&= \int_{E_0 \times E_0} (\tilde{D}^{(0)}(x) - \frac{2}{3}\sqrt{3} + \tilde{D}^{(0)}(y) - \frac{2}{3}\sqrt{3})^+ d(\mu \otimes \mu) \\
&= \frac{1}{36} \int_{E \times E} (\tilde{D}^{(0)}(x) + \tilde{D}^{(0)}(y) - \frac{4}{3}\sqrt{3})^+ \mu \otimes \mu(dx, dy | x \in E_0, y \in E_0) \\
&= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} \int_{E \times E} (D(\sigma x) + D(\sigma y) - 4\sqrt{3})^+ \mu \otimes \mu(dx, dy | x \in \tilde{E}, y \in \tilde{E}) \\
&= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} \int_{E \times E} (D(x) + D(y) - 4\sqrt{3})^+ \mu \otimes \mu(dx, dy) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{E_1 \times E_4} (D(x) + D(y))^+ d(\mu \otimes \mu) \\
&= \int_{E_1 \times E_4} (-D^{(3)}(x) + D^{(0)}(y))^+ d(\mu \otimes \mu) \\
&= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} \int_{E \times E} (D(x) + D(y))^+ d(\mu \otimes \mu) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} P.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{E_2 \times E_5^+} (D(x) + D(y))^+ d(\mu \otimes \mu) \\
&= \int_{E_2 \times E_5^+} (\tilde{D}^{(0)}(x) + \frac{2}{3}\sqrt{3} + \tilde{D}^{(0)}(y) - \frac{2}{3}\sqrt{3})^+ d(\mu \otimes \mu) \\
&= \frac{1}{72} \cdot \frac{1}{3} \int_{E \times E} (D(\sigma x) + D(\sigma y))^+ \mu \otimes \mu(dx, dy | x \in E_2, y \in E_5^+) \\
&= \frac{1}{72} \cdot \frac{1}{3} \int_{E \times E} (D(x) + D(y))^+ \mu \otimes \mu(dx, dy | x \in E, y \in E^+) \\
&= \frac{1}{72} \cdot \frac{1}{3} \int_{E \times E} (D(x) - D(y))^+ \mu \otimes \mu(dx, dy | y \in E^-) \\
&= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} \int_{E \times E^-} (D(x) - D(y))^+ d(\mu \otimes \mu) = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} R.
\end{aligned}$$

残りの part に対しても、同様の変形を行うことにより、次の関係式を得る。

$$P = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} \{ 6P + 2Q + 2R + 2S - 5X + 32\sqrt{3} \}$$

$Q, R, S$  各々について、 $P$  と同様の操作を施していくと、以下の関係式を得る。

$$Q = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} \{ P + 3Q + 3R + S + \frac{1}{2}x + 4\sqrt{3} \}$$

$$R = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} \{ P + 3Q + 3R + S - \frac{1}{2}x + 2\sqrt{3} \}$$

$$S = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} \{ P + Q + R + 3S + \frac{3}{2}x + 4\sqrt{3} \}$$

$$\text{これより } P = \frac{431}{1394} \sqrt{3}$$

### Theorem 2.8

Snowflake fractal の average distance は  $\frac{22990}{35547} \sqrt{3}$

□

### Remark 2.9

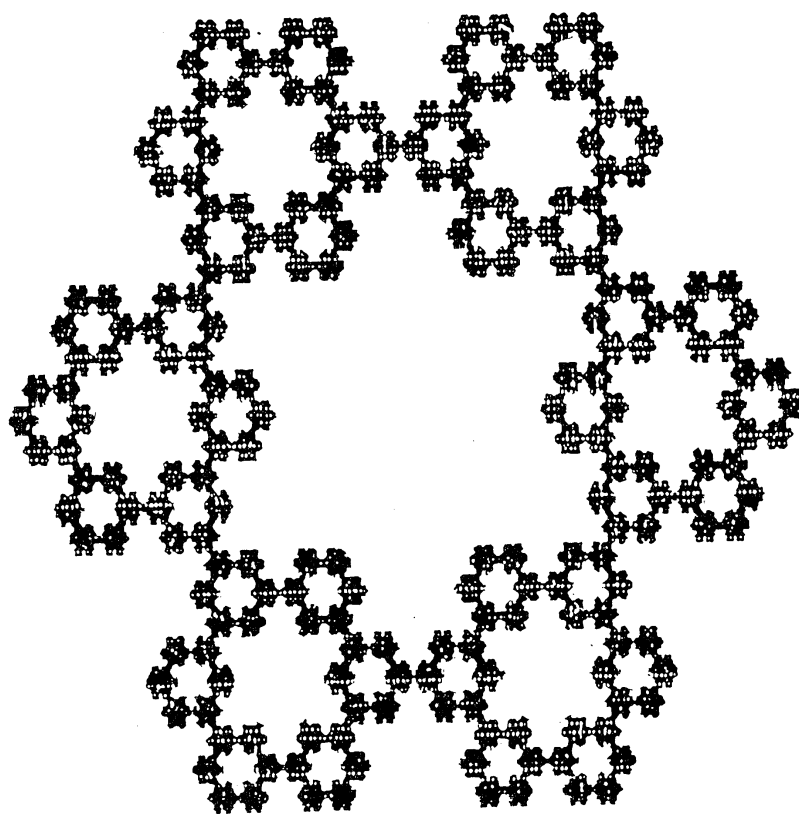
(1) nested fractals は  $\mathbb{R}^p$  内の compact set であるが、average distance は必ずしも収束しない。Koch curve や Pentakum (see [Kum]) はこれがその例である。

$x, y$  : ess. fixed points かつ互いに nearest neighbouring point (see [L]) のとき、 $d(x, y)$  の収束と、average distance の収束は同値である。

(2) nested fractals の典型例の一つである snowflake に対して、(1) より、その average distance は収束するが、その値を求めるにはさらにアイデアが必要である。

## References

- [H-S] Hinz, A.M., and Schief, A., The average distance on the Sierpinski gasket, *Probab. Th. Rel. Fields* 87 (1990), 129-138
- [H] Hutchinson, J.E., Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.*, 30 (1981), 713-747.
- [Kum] Kumagai, T., Kyoto Univ. Master Theses (1991)
- [L] Lindstrøm, T., Brownian motion on nested fractals, *Mem. Amer. Math. Soc.* 420 (1990)



Snowflake fractal