数理解析研究所講究録
785巻 1992年 139-151

Hilbert多様体上の単調作用素

航空技研　岩宮敏幸(Toshiyuki Iwamiya)
徳山女子短大　大河内広子(Hiroko Okochi)

§1. 序

微分構造を持つ抽象空間X上の微分方程式の初期値問題

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) + Au(t) \ni 0, & t > 0 \\ u(0) = x_0 \end{cases}
$$

を考える。Xが線形位相空間の場合、この初期値問題が局所解をもつための作用素Aの条件として、(イ) Aがコンパクト作用素である、(ロ) Aが単調作用素（増大作用素）であるの2つの方向がある。ここでは、XがHilbert多様体のとき作用素の単調性が如何なるものになるかを考察する。

Xを一般の距離のはいった微分多様体とし、Xの距離をρとする。XがHilbert空間［滑らかなBanach空間］のとき、作用素Aが単調［増大］であることは、初期値の異なる(1.1)の任意の解 u, v に対し、距離 $\rho(u(t), v(t))$ が t について単調非増加であること、すなわち、

$$\frac{d}{dt}\rho(u(t), v(t)) = \rho_x(u, v)\frac{d}{dt}u + \rho_y(u, v)\frac{d}{dt}v \leq 0$$

を導くものであることに注意する。但し、ρ_x, ρ_y はそれぞれ ρ の第1成分、第2成分に関するFrechet微分を表わす。従って、空間Xが一般の距離空間の場合についても、Aが単調[増大]であることの定義を

(1.2) $\quad -\rho_x Ax - \rho_y Ay \leq 0 \,,\quad x, y \in D(A)$

で与えることは自然であろう。

Hilbert空間やBanach空間の場合、初期値問題(1.1)の解の存在を示すために、次の差分近似が利用されている。

分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ に対し

(1.3) $$\frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + Ax_n \ni 0 \,,\quad n = 1, 2, \cdots, N,$$

又は、$\lambda_n = t_n - t_{n-1}$ とおいて

$$x_n + \lambda_n A x_n \ni x_{n-1} \,,\quad n = 1, 2, \cdots, N.$$

本稿では、空間XをHilbert多様体とし、作用素Aの単調性を定義し、単調作用素Aによって与えられた初期値問題(1.1)について、上述の差分近似を一般化し、$\max_n (t_n - t_{n-1}) \to 0$ としたとき、(1.1)の解に収束することを示す。

§2. 記号と定義

Mを完備なHilbert多様体とする。TMを接ベクトル束、

$T_x M$, $x \in M$, を x における接ベクトル空間とする。M上の Riemann inner product を

$$(\dot{x}, \dot{y})_x \qquad \dot{x}, \dot{y} \in T_x M$$

で表わす。また、これに付随するノルムを F 又は $\| \cdot \|_x$ で表わす。すなわち、

$$F(x, \dot{x}) = \|\dot{x}\|_x = \sqrt{(\dot{x}, \dot{x})_x}, \qquad \dot{x} \in T_x M$$

とおく。$(\mho, \phi)$ を局所座標系とすると

$$M \supset \mho \xrightarrow[\phi]{} H, \qquad TM|_{\mho} \xrightarrow[d\phi]{\sim} \mho \times H \xrightarrow[P_2 \text{(第2射影)}]{} H$$

が成立する。以下簡単のため、混乱を生じない限り、$\dot{x} \in T_x M$ と $P_2 \circ d\phi(\dot{x}) \in H$ を同一視する。各 $x \in \mho$ に対し、H上の正値自己共役作用素 $B(x)$ で

$$(\dot{x}, \dot{y})_x = (B(x)\dot{x}, \dot{y})_H, \qquad \dot{x}, \dot{y} \in T_x M$$

を満たし、$B(x)$、$B(x)^{-1}$ が共に有界であるものが存在する。Mの滑らかさとして、F が C^2-級であることを仮定する。すなわち、対応 $x \mapsto B(x)$ は C^2-級であるとする。

M上の C^1-級の曲線 $\upsilon : [a, b] \to M$ に対し、υ の長さ $\ell(\upsilon)$ は

$$\ell(\upsilon) = \int_a^b F(\upsilon(s), \dot{\upsilon}(s))\, ds$$

で与えられる。M上の距離 ρ は

$$\rho(x, y) = \inf\{\ell(\upsilon) : \upsilon : [a, b] \to M,\ \upsilon(a) = x,\ \upsilon(b) = y\}$$

で与えられる。測地線は、方程式

$$\frac{d}{ds} F_{\dot{x}}(v(s), \dot{v}(s)) - F_x(v(s), \dot{v}(s)) = 0$$

を満たす曲線として定義される。

exponential map は以下で定義される：$x \in M$, $\dot{x} \in T_x M$ に対し、

$$\exp_x \dot{x} = \begin{array}{l} v(0) = x,\ \dot{v}(0) = \dot{x},\ l(v) = \|\dot{x}\|_x \text{ を} \\ \text{満たす測地線 } v \text{ の終点} \end{array}$$

ここで、仮定より $F(x, \dot{x})\ (= \|\dot{x}\|_x)$ が C^2-級であるから、任意の $x \in M$ と $\dot{x} \in T_x M$ に対し、定義の条件を満たす測地線 v が存在することに注意する。

陰関数定理により次が成立する。

性質2.1. 任意の $x \in M$ に対し、x の近傍 U を適当に選べば次が成立する。

(P1) 任意の $y, z \in U$, $y \neq z$, に対し、y と z を結ぶ最短測地線 v が一意に存在する。すなわち、測地線 $v: [a, b] \to M$ で、$v(a) = y$, $v(b) = z$, $l(v) = \rho(y, z)$ を満たすものが一意に存在する。

いま、x の近傍 U を性質(P1)をもつようにとる。$y, z \in U$ とし、y と z を結ぶ最短測地線を $v: [a, b] \to M$ とする。このとき、Hilbert空間の場合のベクトル $z - y$ に対応する

ものとして、記号 "$z \leftarrow y$" によって、y における接ベクトル $\rho(y,z)\dot{v}(a)/\|\dot{v}(a)\| \in T_yM$ を表わすことにする。すなわち、

$$z = \exp_y(z \leftarrow y).$$

定義より、$\|z \leftarrow y\|_y = \|y \leftarrow z\|_z = \rho(y,z)$ に注意しておく。

次が成立する。

性質2.2. 距離 $\rho(x,y)$ は局所的に C^2-級である。すなわち、$V \times V \setminus \Delta$ (但し $\Delta = \{(x,x) \in M \times M\}$) 上で C^2-級である。更に、任意の V 上の C^1-級曲線 $u:[a,b] \to V$, $u(a) = x$, $\dot{u}(a) = \dot{x}$ と点 $y \in V$ に対し

(2.1) $$\left.\frac{d^+}{dt}\rho(u(t),y)^2\right|_{t=a} = -2(\dot{x}, y \leftarrow x)_x$$

が成立する。

作用素の単調性に関して、不等式(1.2)に着目し、次の様に定義する。

定義2.1. $A: D(A) \subset M \to TM$ を $Ax \subset T_xM$ なる多価作用素とする。A が単調であるとは、次が成立することをいう。

$$\left.\frac{d^+}{d\lambda}\rho(\exp_{x_1}\lambda\dot{x}_1,\ \exp_{x_2}\lambda\dot{x}_2)\right|_{\lambda=0} \ge 0$$

$$x_i \in D(A),\quad \dot{x}_i \in Ax_i,\quad i = 1, 2.$$

従って(2.1)を用いれば、各$\mathcal{U}$に対し

$$(2.2)\qquad (\dot{x}_1, x_2 \leftarrow x_1)_{x_1} + (\dot{x}_2, x_1 \leftarrow x_2)_{x_2} \leq 0$$
$$x_i \in D(A) \cap \mathcal{U},\ \dot{x}_i \in Ax_i,\ i = 1, 2$$

が成立する。

注意2.1. Hilbert多様体の場合は、作用素Aを接ベクトル束TMの部分集合として定義するほうが自然であり、これは、Hilbert空間の場合のAのグラフに対応するものであるが、従来の把え方との対応をわかりやすくするためにTMの多価の断面として与えた。

接ベクトル束TM上には、通常の強位相の他に、基底空間Mの強位相と接ベクトル空間の弱位相から導入される弱い位相がはいることに注意する。この位相を(強位相)×(弱位相)と書くことにする。

定義2.2. Aが極大単調であるとは、Aの単調な拡張がAのみであることをいう。

このとき、次が成立する.

命題2.1. Aが極大単調ならば、Aのグラフは(強位相)×(弱位相)で閉じている。

§3. 結果

$A: D(A) \subset M \to TM,\quad Ax \subset T_xM$ を単調作用素と

する。$T>0$ とする。分割 $0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$ に対する差分近似(1.3)をHilbert多様体の場合へ拡張したものを下記で与える。

$$(3.1)\quad \frac{x_{n-1}\leftarrow x_n}{t_{n-1}-t_n}+Ax_n\ni 0,\quad n=1,2,\cdots,N.$$

また、(1.3)の一般化として、悪いふるまいをしない小さい誤差を許した差分近似を、Hilbert多様体の場合へ拡張したものは下記で与える。

$$(3.2)\quad \begin{cases} \varepsilon>0 \text{とし、} \xi_{n-1},\ x_n\in U,\quad n=1,2,\cdots,N, \\ \dfrac{\xi_{n-1}\leftarrow x_n}{t_{n-1}-t_n}+Ax_n\ni 0, \\ \rho(\xi_{n-1},\ x_{n-1})\leq (t_n-t_{n-1})\varepsilon. \end{cases}$$

いま、$\varepsilon>0$ とし、区間 $[0,T]$ の分割 $0=t_0^\varepsilon<t_1^\varepsilon<\cdots<t_{N(\varepsilon)}^\varepsilon=T$ で $\max_n(t_n^\varepsilon-t_{n-1}^\varepsilon)\leq\varepsilon$ なるものに対し、$x_n\in U$, $n=1,2,\cdots,N(\varepsilon)$, を差分近似(3.2)を満たすものとする。このとき、方程式(1.1)の ε－近似解 u_ε を次で与える。

$$(3.3)\quad \begin{cases} u_\varepsilon(t)=x_n^\varepsilon,\quad t\in(t_{n-1}^\varepsilon,\ t_n^\varepsilon],\ n=1,2,\cdots,N(\varepsilon), \\ u_\varepsilon(0)=x_0 \end{cases}$$

このu_εについて次の定理を得る.

定理3.1. (u_εの収束) Aを単調作用素とする。正数Tが存在して、$\varepsilon>0$に対し、区間$[0,T]$上のε−近似解の列$\{u_\varepsilon\}$が存在するとする。このとき、曲線$u:[0,T]\to\mho$が存在して

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\rho(u_\varepsilon(t),\ u(t))=0,\quad [0,T]\text{上一様。}$$

更に、uは次のi)〜iii)を満たす。

i) $u(0)=x_0$

ii) uはLipschitz連続でそのLipschitz定数は$|||Ax_0|||_{x_0}$

iii) 任意の$0\leq s<t\leq T$, $x\in D(A)\cap\mho$, $\dot{x}\in Ax$に対し、

$$\rho(u(t),x)^2-\rho(u(s),x)^2\leq -2\int_s^t(\dot{x},u(\xi)\leftarrow x)_x\,d\xi$$

但し、$|||Ax|||_x=\inf\{\|\dot{x}\|_x;\ \dot{x}\in Ax\}$, $x\in D(A)$, とした。

強解の存在を保証するために、Aの値域条件として、次の(R_1)又はその一般化である(R_2)を考えることができる。

(R_1) 各$x\in D(A)$に対し、性質(P1)をもつxの近傍$\mho$と$\varepsilon=\varepsilon(x)>0$が存在して次を満たす: $0<{}^\forall\lambda<\varepsilon$に対し$x_\lambda\in D(A)\cap\mho$が存在して$\dfrac{x\leftarrow x_\lambda}{\lambda}\in Ax_\lambda$

を満足する。

(R_2) 各 $x \in D(A)$ と各 $\delta > 0$ に対し、x の近傍 U で性質 (P1) をもつものと $\varepsilon = \varepsilon(x, \delta) > 0$ が存在して次を満たす： $0 < \forall\lambda < \varepsilon$ に対し、$x_\lambda \in D(A) \cap U$, $y_\lambda \in U$ が存在して、$\rho(y_\lambda, x) \leq \lambda\delta$,

$$\frac{y_\lambda \leftarrow x_\lambda}{\lambda} \in Ax_\lambda, \quad \| y_\lambda \leftarrow x_\lambda \|_{x_\lambda} \leq \lambda |||Ax|||_x e^{\lambda\delta}$$

を満足する。

次の定理を得る。

<u>定理3.2.</u>（強解の大域的存在）　A が極大単調作用素で条件 (R_2) を満たしているとする。このとき、各 $x_0 \in D(A)$ に対し、初期値問題 (1.1) の強解 $u \in W^{1,\infty}([0,\infty) : M)$ が存在する。

§4. 定理の証明の概略

定理3.1と3.2を証明するため、幾つかの補題を準備する。

<u>補題4.1.</u>　$U \subset M$ を性質 (P1) を持つものとする。$x_k \in D(A) \cap U$, $\dot{x}_k \in Ax_k$, $k = 1, 2$, とする。このとき、各 $\lambda > 0$ で $\exp_{x_k}(\mu \dot{x}_k) \in U$, $0 < \mu \leq \lambda$, $k = 1, 2$, を満たすものに対し、

$$\rho(x_1, x_2) \leq \rho(\exp_{x_1}(\lambda\dot{x}_1), \exp_{x_2}(\lambda\dot{x}_2)) + |\partial^2\rho|\lambda^2\{\|\dot{x}_1\|_{x_1} + \|\dot{x}_2\|_{x_2}\}^2.$$

但し、$|\partial^2\rho| = \sup\{|\rho_{xx}(x,y)|_{T_xM\times T_xM\to\mathbb{R}}, |\rho_{xy}(x,y)|_{T_xM\times T_yM\to\mathbb{R}}: x, y \in U\}$ とした。

<u>証明.</u> $\mu \in (0, \lambda]$ に対し、$f(\mu) = \rho(\exp_{x_1}(\mu\dot{x}_1), \exp_{x_2}(\mu\dot{x}_2))$ とおく。このとき

$$f(\mu) \geq f(0) + f'(0)\mu - |\partial^2\rho|\{\mu\|\dot{x}_1\|_{x_1} + \mu\|\dot{x}_2\|_{x_2}\}^2.$$

従って、定義2.1より $f'(0) \geq 0$ に注意すれば、補題3.1の結論を得る。

補題4.1より次の補題を得る。

<u>補題4.2.</u> U を x_0 の近傍で性質(P1)をもつものとする。$\lambda, \mu > 0$ とし、$y \leftarrow y_\lambda \in \lambda A y_\lambda$, $z \leftarrow z_\mu \in \mu A z_\mu$, $y, z, y_\lambda, z_\mu \in D(A)\cap U$ とする。このとき

$$\frac{1}{\lambda}\{\rho(y_\lambda, z_\mu) - \rho(y, z_\mu)\} + \frac{1}{\mu}\{\rho(y_\lambda, z_\mu) - \rho(y_\lambda, z)\} \leq |\partial^2\rho|\{\lambda|||Ay|||_y + \mu|||Az|||_z\}.$$

<u>補題4.3.</u> $x \in D(A)$ とする。U を x の近傍で性質(P1)をもつものとする。$\lambda > 0$ とし、$x \leftarrow x_\lambda \in \lambda A x_\lambda$, $x_\lambda \in D(A)$ とする。このとき、

(4.1) $$\left\| \frac{x \leftarrow x_\lambda}{\lambda} \right\|_{x_\lambda} \leq \inf_{\dot{x} \in Ax} \| \dot{x} \|_x \left(\equiv |||Ax||| \right).$$

証明. $\dot{x} \in Ax$ とする。$\frac{x \leftarrow x_\lambda}{\lambda} \in Ax_\lambda$ に注意すれば (2.2) より

$$0 \geq \left(\frac{x \leftarrow x_\lambda}{\lambda}, x \leftarrow x_\lambda \right)_{x_\lambda} + (\dot{x}, x_\lambda \leftarrow x)_x$$

$$\geq \frac{1}{\lambda} \| x \leftarrow x_\lambda \|_{x_\lambda}^2 - \| \dot{x} \|_x \| x_\lambda \leftarrow x \|_x .$$

$\| x \leftarrow x_\lambda \|_{x_\lambda} = \| x_\lambda \leftarrow x \|_x$ より

$$\left\| \frac{x \leftarrow x_\lambda}{\lambda} \right\|_{x_\lambda} \leq \| \dot{x} \|_x$$

$\dot{x} \in Ax$ の任意性より補題が証明される。

定理3.1 は、補題4.2 と4.3 を用いて、通常のBanach空間における発展方程式の差分近似の収束定理と同様の議論により、証明される。(文献[1]を参照。)

定理3.2は、次の手順で証明される。まず、Aの値域条件 (R_2) より、各 $\varepsilon > 0$ に対し、ε-近似 $u_\varepsilon : [0, \infty) \to M$ が存在することに注意する。実際、x_0 の開近傍 U_1 で性質 (P1) をもつものに対し、適当な正数 T_1 が存在して、ε-近似解 $u_\varepsilon : [0, T_1] \to U_1$ がある。$u_\varepsilon(T_1)$ を改めて初期値と考えれば、$u_\varepsilon(T_1)$ の開近傍 U_2 で性質 (P1) をもつものに

対し、正数 $T_2 > T_1$ が存在して ε-近似解 $u_\varepsilon : [T_1, T_2] \to U_2$ がある。これをくり返して、ε-近似解 $u_\varepsilon : [0, \sup T_k) \to M$ が決まる。不等式(4.1)より、$\sup_k T_k < +\infty$ ならば $u_\varepsilon(T_k)$, $k = 1, 2, \cdots$, がMの点 $u_\varepsilon(T_\infty)$ に強収束することを利用して、$\sup_k T_k = +\infty$ を得る。

次に $u : [0, \infty) \to M$ を定理3.1で得られた弱解とする。このuが(1.1)の強解であることを示すために、$T > 0$ を固定し、局所座標系 (U, ϕ) を $u : [0, T] \to U$ ととる。$\phi \circ u : [0, T] \to H$ がLipschitz連続であり、Hilbert空間がRadon-Nikodym property をもつことより、$\phi \circ u \in W^{1,\infty}([0,T] : H)$ である。よって $u \in W^{1,\infty}([0,T] : U)$ である。従って、定理3.2の仮定を用いれば、a.e. $t > 0$ で $u(t) \in D(A)$ かつ (1.1) が成立することを得る。

文献

[1] Y. Kobayashi, Difference approximation of Cauchy problems for quasi-dissipative operators and generation of nonlinear semigroups, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 640-665.

[2] Y. Kōmura, Nonlinear semigroups in Hilbert space, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 493-

507.

[3] S. Lang, Differential manifold, springer, 1985.

[4] 宮寺功, 非線形半群, 紀伊國屋書店, 1977.