数理解析研究所講究録
785巻 1992年 112-117

Nonlinear viscoelastic equations について。

筑波大学数学系　柴田良弘（YOSHIHIRO SHIBATA）

本講演会では，九大工学部，川島秀一氏との共同研究[1]の内容を発表することを，主な目的とします。

過去10年間以上の研究により，非線形双曲型方程式の大域解をもとめる仕事は発展した。一つのプリンシプルとして，線形化した方程式の解の時間についての減衰度が速ければ，少なくとも，十分小かつ滑らかな初期値に対しては，時間的大域解が存在する。一方，空間一次元で非線形波動方程式を考えれば，どんなに滑らかかつ小なる初期値から出発しても，C^2 solution は有限時間内に，その二次の導関数が爆発することが知られている（c.f. [2]）。このとき，線形方程式として，$u_{tt} - c u_{xx} = 0$　$(c \neq 0)$ が考えられるが，この解は $f(t-x) + g(t+x)$ と表わされ，まったく時間について解は減衰しない。こうして，この減衰度と，大域解の存在は，技術的な側面以上に本質的なものがある。

他の減衰を得られない例としては，内部問題である。例えば，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界領域，に対して，波動方程式，

$$\Box u = 0 \quad \text{in } \Omega \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

($\partial\Omega$はΩの境界で十分滑らかな hypersurface とする。)
もし、固有値問題　$\Delta v + \omega^2 v = 0$ in Ω, $v = 0$ on $\partial\Omega$ ($\omega \neq 0$) の nontrivial な解 $v \in C^\infty$ をもってくれば、
$u(t, x) = e^{it\omega} v(x)$ は決して減衰しない解である。
R. Racke (Bonn Univ.) は [2] の手法を真似て、非線形波動方程式の radial solution は、有限時間内に爆発することを示した。

線形化方程式の解の減衰が期待できない場合の一つのアプローチとしては、weak solution を考えることにあると思う。１次元非線形双曲系の場合は、むしろこちらからのアプローチの方が丁丈は広く、成果もかなり上がっている。しかし、多次元の内部問題の場合は、筆者の知る限り、唯一藤原－高桑 [3] の varifold solution である。残念ながら varifold sol. は weak sol. よりも弱い概念である。この方面のアプローチはこれからの研究を待つ。

他のアプローチとしては、方程式にアタッチした、減衰を引きおこす効果を考えることである。理論的には、visco-thermoelasticity と呼ばれている分野である。本講演では特に viscosity (粘性) を考えた場合を扱うことにする。粘性を考える理由は、内部問題でさえ、良い解の減

表を期待してである。方程式の代表的形は，

$$u_{tt}-\operatorname{div}\sigma(\nabla u)-\lambda\Delta u_t=0$$

$(\lambda>0,\quad \nabla u=(\partial u/\partial x_1,\dots,\partial u/\partial x_n),\ x=(x_1\cdots x_n)\in\mathbb{R}^n)$
である。$n=1$ の場合は古くから研究され，任意の滑らかな初期値に対して，大域解が存在することは，良く知られている。ここでは余りに大くの文献の為に，それらを上げることが出来ないので［1］の文献表を興味ある方は見ていただきたい。$n=2$ の場合は Pecher 氏の仕事［4］が代表的かと思われる。$\lambda\Delta u_t$ の効果から，任意の滑らかな初期値に対して，解の存在を期待するわけであるが，多次元の場合は，それほど容易ではない。$\sigma(\nabla u)$ の増大度に応じて，どの位のことが云えるかが，議論の一つのポイントである。最近の結果が，筆者の知るこの方面の仕事としては［5］を挙げておく。

一方，十分小なる初期値についてはどうかというと，福大の蛭原氏のいわゆる strongly damped wave equation：
$u_{tt}-\Delta u_t-F(u,\nabla u,\nabla^2 u)=0$ の一連の研究［6 とその文献表］及び，最近の溝畑－瀧嶋［7］の粘性流体中の波動方程式：$u_{tt}-a\Delta u-b\Delta u_t=c(|\nabla u|^2+(u_t)^2)_t$
$(a>0,\ b>0,\ c\neq 0)$ が筆者の知るところである。

我々の仕事［1］は十分小かつ滑らかな初期値に対して，

大域解の存在を証明するという立場で，粘性項を含む二階の双曲系の一般論を数学的見地から構築することを試みた。

考える方程式は次のものとする。

$$
(1)\begin{cases}
A_0(\mathcal{U})u_{tt} + A_j(\mathcal{U})\partial_j u_t - A_{ij}(\mathcal{U})\partial_i\partial_j u - B_{ij}(\mathcal{U})\partial_i\partial_j u_t = 0 & \text{in } (0, \infty)\times\Omega \\
u = 0 & \text{on } (0, \infty)\times\partial\Omega \\
u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x) & \text{in } \Omega
\end{cases}
$$

但し，Ω は $\mathbb{R}^n$ 有界領域でその境界 $\partial\Omega$ は C^∞ 超平面とする。$u = {}^t(u_1, \dots, u_d)$ は d-vector of unknown functions，$\mathcal{U} = (u_t, \nabla u, \nabla u_t)$，$u_t = \partial u/\partial t$，$\nabla u = (\partial u/\partial x_1, \dots, \partial u/\partial x_n)$，$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$，$t$：時間，とする。$A_0(\mathcal{U})$，$A_j(\mathcal{U})$，$A_{ij}(\mathcal{U})$，$B_{ij}(\mathcal{U})$ は $d\times d$-matrices で，$\mathcal{U}$ の real-valued かつ C^∞ な関数をその成分とするものとし，さらに次の仮定をみたすものとする。

<u>仮定</u>(1) ${}^tA_0 = A_0$，${}^tA_j = A_j$，${}^tA_{ij} = A_{ji}$，${}^tB_{ij} = B_{ji}$

(2) $\exists\delta > 0$：$A_0(0) \geq \delta I_d$，

$A_{ij}(0)\xi_i\xi_j \geq \delta|\xi|^2 I_d$，$B_{ij}(0)\xi_i\xi_j \geq \delta|\xi|^2 I_d \; ({}^\forall\xi \in \mathbb{R}^n)$

但し，I_d は $d\times d$ 単位行列。

以下通常の Sobolev space H^s of order s は全て L^2 sense のものとする。

u_j $(j \geq 2)$ を (1) が解 u をもったとしたときの $\partial_t^j u$ の $t=0$ の値とする。これは，u_0，u_1 から逐次決まっていく。N を $N \geq [n/2]+3$ なる整数として，次の定理を得る。

__定理__： $\exists\, \varepsilon > 0$ s.t. もし，初期値が次の条件をみたせば，(1) は解 u

$$u \in \bigcap_{j=0}^{N-1} C^{j+1}([0,\infty) ; H^{N-j})$$

を一意的にもつ。

__初期値の条件__　$N_0 = [\frac{n}{2}]+3$ として

$$\|u_0\|_{N_0} + \sum_{j=0}^{N_0-1} \|u_{j+1}\|_{N_0-j} \leq \varepsilon$$

$$u_0 \in H^N \cap H_0^1 , \quad u_{j+1} \in H^{N-j} \cap H_0^1 \; (0 \leq j \leq N-1).$$

更に，解 u の energy は exponential decay をする。$\boxed{}$

更に，time-periodic solution の存在等も云える。

また，次の問題としては，Cauchy problem や Neumann boundary condition 等が考えられる。

References

[1] S.Kawashima and Y.Shibata: Global existence and exponential stability of small solutions to nonlinear viscoelasticity, preprint in 1991.

[2] S.Klainerman and A.Majda: Formation of singularities for wave equations including the nonlinear vibrating string, Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980), 241-263.

[3] D.Fujiwara and S.Takakuwa: A varifold solution to the nonlinear equation of a vibrating membrane, Kodai Math.J. 9 (1986), 84-116 and its correction, Ibid 14 (1991), 310-311.

[4] H.Pecher: On global regular solutions of third order partial differential equations, J.Math.Anal.Appl. 73(1980), 278-299.

[5] A.Friedman and J.Necas: Systems of nonlinear wave equations with nonlinear viscosity, Pacific J.Math. 135 (1988) 29-55.

[6] Y.Ebihara: On some nonlinear evolution equations with the strong dissipation, J.Diff.Eq's. 30(1978),149-164; II, ibid. 34 (1979),339-352; III, ibid.45(1982),332-355.

[7] K.Mizohata and S.Ukai: The global existence of small amplitude solutions to the nonlinear acoustic wave equation, preprint in 1991, Dep. of Information Sci. Tokyo Inst. of Tech.