数理解析研究所講究録
789巻 1992年 164-178

ペッティス集合について

静岡大学　理　松田　稔（Minoru　Matsuda）

§1. 序. この報告は主に、ペッティス集合に関する従来までの諸結果と、最近[3], [4]で得られた結果の紹介を目的として構成されたもので、その主題は、バナッハ空間論に源をもつものである。Xを実バナッハ空間、その共役をX^*とし、B_XはXの閉単位球を表すことにする。(Ω, Σ, μ)は完備確率測度空間、$([0,1], \Lambda, \lambda)$は$[0,1]$上のルベーグ測度空間とし、以後$[0,1]$上には、$\Lambda$と$\lambda$が備わっているとする。各$(\Omega, \Sigma, \mu)$に対して、$f: \Omega \to X$ (resp. X^*) が弱 (resp. 弱*) 可測であるとは、$(x^*, f(\omega))$ (resp. $(x, f(\omega))$) が各$x \in X$ (resp. $x^* \in X^*$) についてμに関し可測であることをいい、弱可測関数$f: \Omega \to X$がペッティス可積分であるとは、$(x^*, f(\omega)) \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ (各$x^* \in X^*$) で、各$E \in \Sigma$について$x_E \in X$が存在して$(x^*, x_E) = \int_E (x^*, f(\omega))\, d\mu(\omega)$, $\forall x^* \in X^*$、がみたされる時をいう。もし、$f: \Omega \to X^*$が有界値域をもつ弱*可測関数であるならば、$T_f(x) = x \circ f$ $(x \in X)$ により、$T_f: X \to L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ の有界線形写像が得られる。この共役作

用素を、$T_f^*(:L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)\to X^*)$と表す。$T_f$の作用素ノルム$=\sup\{\int_\Omega |x\circ f|\,d\mu : x\in B_X\}=\|f\|_P$と表し、$f$のPettis normという。さて、$\{J_{n,i}\}$ $(n\geqq 0,\ 0\leqq i\leqq 2^n-1)$を$J_{n,i}=[i/2^n,\ (i+1)/2^n)$ $(n\geqq 1,\ 0\leqq i\leqq 2^n-2)$、$J_{n,2^n-1}=[(2^n-1)/2^n,\ 1]$ $(n\geqq 0)$で定義される$[0,1]$の区間列とし、Λ_n $(n\geqq 1)$は、$\pi_n=\{J_{n-1,i} : 0\leqq i\leqq 2^{n-1}-1\}$で生成される$\sigma$-algebraとする時、$f:[0,1]\to X^*$が有界値域をもつ弱*可測関数であるならば、$f_n(s)=\sum_{A\in\pi_n}(T_f^*(\chi_A)/\lambda(A))\chi_A(s)$で定義される$f_n:[0,1]\to X^*$について、$(f_n,\Lambda_n)_{n\geqq 1}$はマーチンゲールとなり、以後これを、$f$に対応するマーチンゲールと呼ぶ。又、$X$の点列$\{x_n\}_{n\geqq 1}$がtreeであるとは$x_n=(x_{2n}+x_{2n+1})/2$ $(n\geqq 1)$がみたされることをいい、正数δに対して、tree $\{x_n\}_{n\geqq 1}$がδ-Rademacher treeとは、$\left\|\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}(-1)^n x_n\right\|\left(=\left\|\sum_{i=0}^{2^m-1}(-1)^i x_{2^m+i}\right\|\right)\geqq 2^m\cdot\delta$ $(\forall m\geqq 0)$がみたされることをいう。

Rosenthal [10]がℓ_1を含むバナッハ空間X(即ちB_Xがℓ_1-basisに同値な点列$\{x_n\}_{n\geqq 1}$を含む)の特徴付けを与えて以来、X^*のラドン-ニコディム性の研究にも触発され、それと並行した型でのMusial [5]により定義された弱ラドン-ニコディム性の研究、あるいは、それを一般化、局所化した弱ラドン-ニコディム集合(WRN set)の研究がなされ、一連の結果が得られている。

<u>定義</u>. Xの部分集合CがWRN setであるとは、各(Ω,Σ,μ)

と各 $\alpha: \Sigma \to X$ s.t. $\alpha(E) \in \mu(E)\cdot C$, $\forall E \in \Sigma$ について、ペッティス可積分関数 $f: \Omega \to C$ が存在して、$\forall E \in \Sigma$ に対して

$$\langle x^*, \alpha(E)\rangle = \int_E \langle x^*, f(\omega)\rangle d\mu(\omega) \quad (\forall x^* \in X^*)$$

がみたされる時をいう。特に B_X が WRN set である時、X は弱ラドン－ニコディム性を持つという。

定義. B_X が $D(\subset X^*)$ に関して weakly precompact であるとは、$\forall\{x_n\}_{n\geq 1} \subset B_X$ に対して適当に部分列 $\{x_{n(k)}\}_{k\geq 1}$ をとれば、$\forall x^* \in D$ について、$\lim_{k\to\infty}\langle x^*, x_{n(k)}\rangle$ が存在することをいう。

定義. K: compact Hausdorff space, $f: K \to R$ について、f が Baire-1-function であるとは、$\forall F$: compact $\subset K$ に対して、f の F への制限 $f|_F$ が連続点をもつことをいう。f が universally measurable であるとは、$\forall \mu$: Radon probability measure on K について、f が μ に関して可測であることをいう。

以上の概念を用いて、$C = K$: 弱*コンパクト凸集合の時の WRN set に関する従来の諸結果([9], [6], [11], [8], [12], [1], [2] を参照)を概括したのが、次である。なお、以後、弱*コンパクト集合上には、弱*位相が備わっていると考える。

定理A. X^* の弱*コンパクト凸集合Kに関する次の各陳述は、同値である。

(1) $B_X \subset C(K)$ とみた時、B_X は l_1-basis に同値な点列を含まない。

(2) B_X は K に関して weakly precompact.

(3) $\forall x^{**} \in X^{**}$ は K 上で universally measurable.

(4) $\forall x^{**} \in X^{**}$ は K 上で Baire-1-function.

(5) $\forall$有界線形写像 $T: L_1([0,1]) \to X^*$ s.t. $T(\chi_A) \in \lambda(A) \cdot K$, $\forall A \in \Lambda$ について、$\{T(\chi_A) : A \in \Lambda\}$ は相対ノルムーコンパクト。

(6) K は WRN set.

(7) $\forall f: [0,1] \to K$, 弱*可測について、f に対応するマーチンゲールは Cauchy in the Pettis norm.

(8) K が δ-Rademacher tree を含まない。

その後、Talagrand [13] の研究に示唆されて、凸性のない弱*コンパクト集合について、定理Aの一般化といえるものが研究された。

定義. X^* の弱*コンパクト集合Kが、ペッティス集合(Pettis set)であるとは、$\forall x^{**} \in X^{**}$ が K 上で universally measurable である時をいう。

その時、この集合に関する特徴付けが、Talagrand [13], Riddle and Saab [7] 等で得られている。

定理B. X^* の弱*コンパクト集合Kに関する次の各陳述は、同値である。

(1) 定理A (1)に同じ。

(2) 〃 (2) 〃 。

(3)　定理A(3)に同じ。即ちKは Pettis set.

(4)　〃　(4)　〃　。

(5)　$^\forall f:[0.1]\to K$, 弱*可測について $\{T_f^*(\chi_A) : A\in\Lambda\}$ は相対ノルム－コンパクト。

(6)　$\overline{co}^{w*}(K)$ (Kの弱*閉凸包) は WRN set.

(7)　定理A(7)に同じ。

以上の経過から判断すれば、定理Aの(8)に対応する定理Bの場合の特徴付け、即ち、Pettis set の δ-Rademacher tree による特徴付けが、どんな形で可能であるかを考察することは、自然の問題であろう。この事柄に関して我々は、性質(5)に示唆され、次の形で特徴付けられることを立証した([3])。

<u>定理1</u>. X^*の弱*コンパクト集合Kについて、KがPettis set であるための必要十分条件は、$^\forall f:[0,1]\to K$, 弱*可測について $\{T_f^*(\chi_A)/\lambda(A) : \lambda(A)>0, A\in\Lambda\}$ が δ-Rademacher tree を含まないことである。

更に、この結果に示唆され、定理Bの(7)によるPettis setの特徴付けの精密化として、次が得られることを注意する([4])。

<u>定理2</u>. X^*の弱*コンパクト集合Kについて、KがPettis set であるための必要十分条件は、$^\forall f:[0,1]\to K$, 弱*可測について fに対応するマーチンゲール $(f_n, \Lambda_n)_{n\geqq 1}$ が $\inf\{\|f_n-f_{n+1}\|_p : n\geqq 1\}=0$ をみたすことである。

これら二定理に関し，我々が強調すべき，重要で本質的な部分は，Kが non-Pettis set である時に，[0,1] で定義されたK-値弱可測関数 h で $\{T_h^*(\chi_A)/\lambda(A) : \lambda(A)>0, A\in\Lambda\}$ が δ-Rademacher treeを含むもの，あるいは，h に対応するマーチンゲール $(h_n, \Lambda_n)_{n\geq 1}$ について $\inf\{\|h_n-h_{n+1}\|_p : n\geq 1\}>0$ であるものを構成することであり，以下，その構成の概略を与える。

§2．準備．ここでは，定理1，2の証明の過程で必要とされる概念や事実を準備しよう。

Kをcompact Hausdorff spaceとする時，Kの互いに素な集合の対の列 $(A_n, B_n)_{n\geq 1}$ が independent であるとは，$\forall k\geq 1$ と $\forall\{\varepsilon_j\}_{1\leq j\leq k}$ $(\varepsilon_j = 1 \text{ or } -1, 1\leq j\leq k)$ について $\bigcap_{j=1}^{k}\varepsilon_j A_j \neq \phi$ (但．$\varepsilon_j A_j = A_j$ if $\varepsilon_j=1$, $\varepsilon_j A_j = B_j$ if $\varepsilon_j=-1$) であることをいう。もし，Kの互いに素な閉集合の対の列で independent なもの $(A_n, B_n)_{n\geq 1}$ が存在すれば，$\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)$ とおくことにより，我々はKの空でない compact subset Γ を得る。その時，$\phi : \Gamma\to\Delta\,(=\{0,1\}^N$, Cantor space) を $\phi(z)=\{t_n\}_{n\geq 1}$ (但．$t_n=1$ if $z\in A_n$, $t_n=0$ if $z\in B_n$) で定義すれば，ϕ は連続全射であり，$\Gamma\cap A_m = \phi^{-1}(U_m)$ かつ $\Gamma\cap B_m = \phi^{-1}(U_m^c)$ (但．$U_m = \{t=\{t_n\}_{n\geq 1}\in\Delta : t_m = 1\}$) をみたす。$\phi$ が連続全射であることから，Talagrand の結果 (1-2-5 in [13]) を用いれば，Γ 上の Radon probability measure γ

で$\Phi(\gamma)$（γのΦによる像測度）$=\nu$（Δ上の正規化されたハール測度）で$\{f\circ\phi : f\in L_1(\Delta, \Sigma_\nu, \nu)\} = L_1(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$（但．$\Sigma_\nu$，$\Sigma_\gamma$は各々$\nu$，$\gamma$に関して可測な集合全体を表す）をみたすものが存在する。

更に，$\rho : \Delta \to [0, 1]$を$\rho(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n/2^n$（但．$t = \{t_n\}_{n\geq 1} \in \Delta$）で定義すれば，$\rho$は$\rho(\nu) = \lambda$かつ$\{u\circ\rho : u\in L_1([0, 1])\} = L_1(\Delta, \Sigma_\nu, \nu)$をみたす連続全射である。

この時，次の補題を得るのは容易で（[3]を参照），本質的には，Talagrand [13] の Theorem (7-3-7) の証中でも示唆されている。

<u>補題</u>．Sを$S(u) = u\circ\rho\circ\phi$（$u\in L_1([0, 1])$）で定義される線形写像とすれば，次の事柄が成り立つ。

(a)　Sは$L_1([0, 1])$から$L_1(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$への全射距離同型写像である。

(b)　任意の$g\in L_\infty(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$について，$S^*(g)(\rho(\phi(z))) = g(z)$，$\gamma$-a.e.（但．$S^*$は$S$の共役）。

(c)　任意のg_1，$g_2 \in L_\infty(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$について，$S^*(g_1\cdot g_2) = S^*(g_1)\cdot S^*(g_2)$ in $L_\infty(\Gamma, \Sigma_\gamma, \gamma)$．

§3．定理1，2の証明の概略．§1で注意したように，次の2つの事柄(A)，(B)が，定理1，2における証明の中核をなすので，これらの証明の概略を与えることにしよう。

(A) K が non-Pettis set の時，弱*可測関数 $h:[0,1]\to K$ で，$\{T_h^*(\chi_A)/\lambda(A):\lambda(A)>0,\ A\in\Lambda\}$ が δ-Rademacher tree を含むものを構成すること。

(B) K が non-Pettis set の時，弱*可測関数 $h:[0,1]\to K$ で，h に対応するマーチンゲール $(h_n,\Lambda_n)_{n\geqq1}$ について $\inf\{\|h_n-h_{n+1}\|_P : n\geqq1\}>0$ であるものを構成すること。

結論からいえば，(A) で得られた関数 h が，実は (B) もみたす訳であるが，以下，関数 h の構成と，それが (A)，(B) で述べられた性質を有することを注意しよう。

(α) 関数 h の構成について。K を non-Pettis set とすれば，§1 で述べた定理 B の同値関係を利用することにより，B_X は K に関して weakly precompact でないから，$\exists\{x_n\}_{n\geqq1}\subset B_X$ s.t. $\{x_n\}_{n\geqq1}$ のどんな部分列も，K 上で各点収束列ではないことを得る。このことに Rosenthal の議論を利用すれば，$\exists\{x_{n(k)}\}_{k\geqq1}\subset\{x_n\}_{n\geqq1}$, $\exists r\in R$, $\exists\eta>0$ s.t. $A_k=\{x^*\in K:(x^*,x_{n(k)})\leqq r\}$, $B_k=\{x^*\in K:(x^*,x_{n(k)})\geqq r+2\eta\}$ について，$(A_k,B_k)_{k\geqq1}$ は K の閉集合からなる independent sequence。従って §2 で注意したように，$\Gamma=\bigcap_{k=1}^{\infty}(A_k\cup B_k)$ とおけば，Γ は K に含まれるコンパクトであり，補題から，完備確率測度空間 $(\Gamma,\Sigma_\gamma,\gamma)$ と全射距離同型線形写像 $S:L_1([0,1])\to L_1(\Gamma,\Sigma_\gamma,\gamma)$ が存在し，$S^*(g)(\rho(\phi(x^*)))=g(x^*)$，$\gamma$-a.e. $(\forall g\in L_\infty(\Gamma,\Sigma_\gamma,\gamma))$ が成り立つことがわか

る。

さて、各 $x\in B_X$ について $f_x(x^*)=(x^*,x)$ $(x^*\in\Gamma)$ で定義される Γ 上の連続関数を考える。又、l を $L_\infty([0.1])$ の lifting とする。そして、各 $s\in[0.1]$ について $C(\Gamma)$（: Γ 上で定義された実数値連続関数の作る Banach space）上で定義される有界線形汎関数 $L_s(f)=l(S^*(f))(s)$ を考えよ。その時、補題から L_s は multiplicative であるから $L_s(f)=f(x^*)$, $\forall f\in C(\Gamma)$, をみたす Γ の点 x^* が唯一つ存在する。従って $h:[0.1]\to\Gamma$ を $h(s)=x^*$ $(s\in[0.1])$ で定義すれば、h は K-値であり、$f(h(s))=l(S^*(f))(s)$, $\forall f\in C(\Gamma)$, が成り立つ。よって、特に、$f_x(h(s))=l(S^*(f_x))(s)$, $\forall x\in B_X$, であるから、$(x,h(s))=l(S^*(f_x))(s)$, $\forall s\in[0.1]$, が成り立ち、h は弱*可測である。このようにして K-値弱*可測関数 h が構成された。

(B) $\{T_h^*(\chi_A)/\lambda(A):\lambda(A)>0,\ A\in\Lambda\}$ が δ-Rademacher tree を含むこと。そのために、まず各 $A\in\Lambda$ について

$$\int_A (x,h(s))\,d\lambda(s)=\int_A l(S^*(f_x))(s)\,d\lambda(s)=\int_A S^*(f_x)(s)\,d\lambda(s)$$

$$=\int_A S^*(f_x)(s)\,d(\rho(\phi(\gamma)))(s)=\int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(A))} S^*(f_x)(\rho(\phi(x^*)))\,d\gamma(x^*)$$

$$=\int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(A))} f_x(x^*)\,d\gamma(x^*)\ \text{(補題の (b) を用いた)}=\int_{\phi^{-1}(\rho^{-1}(A))}(x^*,x)\,d\gamma(x^*)$$

であることを注意する。

次に、$\alpha(A) = T_h^*(\chi_A)$ $(A\in\Lambda)$ とすれば、$\alpha:\Lambda\to X^*$ はベクトル値測度である。よって、$I_{m,i} = [i/2^m, (i+1)/2^m]$ $(m\ge 0,\ 0\le i\le 2^m-1)$ について、$x^*_{2^m+i} = 2^m\alpha(I_{m,i})$ $(m\ge0,\ 0\le i\le 2^m-1)$ とおけば、α の測度性より、$\{x_n^*\}_{n\ge1}$ が tree であること、しかも $\{x_n^*\}_{n\ge1} \subset \{T_h^*(\chi_A)/\lambda(A) : \lambda(A)>0,\ A\in\Lambda\}$ であることは明らかであるから、$\{x_n^*\}_{n\ge1}$ が適当な正数 δ に対して、δ-Rademacher tree を含むことを示せばよい。

そのために、$\{I_{m,i}\}$ $(m\ge0,\ 0\le i\le 2^m-1)$ の番号付けを次のように改めることにする。$I_{0,0} = I\ (=[0,1])$, $I_{1,0}=I(0)$, $I_{1,1}=I(1)$, $I_{2,0}=I(0,0)$, $I_{2,1}=I(0,1)$, $I_{2,2}=I(1,0)$, $I_{2,3}=I(1,1)$ 等々。即ち、$I_{0,0}=I$ であり、もし $I_{m,i}=I(a_1^{(i)},\dots,a_m^{(i)})$ $(m\ge1,\ 0\le i\le 2^m-1)$ ならば $I_{m+1,2i}=I(a_1^{(i)},\dots,a_m^{(i)},0)$ かつ、$I_{m+1,2i+1}=I(a_1^{(i)},\dots,a_m^{(i)},1)$。但し $\{a_j^{(i)}\}_{1\le j\le m}$ は 0 と 1 からなる数列で $\{(a_1^{(i)},\dots,a_m^{(i)}) : 0\le i\le 2^m-1\} = \{(a_1,\dots,a_m): a_j = 0 \text{ or } 1\}$ をみたす。その時、0 と 1 の数列 $\{a_j\}_{1\le j\le m}$ について、$U_1^{\varepsilon_1}\cap\cdots\cap U_m^{\varepsilon_m} = \rho^{-1}(I(a_1,\dots,a_m))$ (但 $a_j=1$ の時 $\varepsilon_j=1$ かつ $a_j=0$ の時 $\varepsilon_j=c$ (補集合) とする) が成り立つ。従って、α の定義と、最初に示した等式から、0 と 1 からなる数列 $\{a_j\}_{1\le j\le m}$ と $x\in X$ について、

$$(\alpha(I(a_1,\dots,a_m)),x) = \int_{I(a_1,\dots,a_m)} (x, h(s))\,d\lambda(s) = \int_{\varphi^{-1}(\rho^{-1}(I(a_1,\dots,a_m)))} (x^*,x)\,d\gamma(x^*)$$

$$= \int_{\phi^{-1}(U_1^{\varepsilon_1} \cap \cdots \cap U_m^{\varepsilon_m})} (x^*, x) \, d\gamma(x^*)$$

が成り立つ。このことから、

$$\sum_{i=0}^{2^m-1} (\alpha(I(a_1^{(i)}, \cdots, a_m^{(i)}, 0)), x_{n(m+1)})$$

$$= \int_{\phi^{-1}(U_{m+1}^c)} (x^*, x_{n(m+1)}) \, d\gamma(x^*) = \int_{\Gamma \cap B_{m+1}} (x^*, x_{n(m+1)}) \, d\gamma(x^*)$$

及び、

$$\sum_{i=0}^{2^m-1} (\alpha(I(a_1^{(i)}, \cdots, a_m^{(i)}, 1)), x_{n(m+1)})$$

$$= \int_{\phi^{-1}(U_{m+1})} (x^*, x_{n(m+1)}) \, d\gamma(x^*) = \int_{\Gamma \cap A_{m+1}} (x^*, x_{n(m+1)}) \, d\gamma(x^*)$$

が得られる。従って、各 $m \geqq 0$ について

$$\left\| \sum_{i=0}^{2^{m+1}-1} (-1)^i x^*_{2^{m+1}+i} \right\|$$

$$\geqq \left(\sum_{i=0}^{2^{m+1}-1} (-1)^i x^*_{2^{m+1}+i}, x_{n(m+1)} \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{2^m-1} (x^*_{2^{m+1}+2i}, x_{n(m+1)}) - \sum_{i=0}^{2^m-1} (x^*_{2^{m+1}+2i+1}, x_{n(m+1)})$$

$$= 2^{m+1} \left(\int_{\Gamma \cap B_{m+1}} (x^*, x_{n(m+1)}) \, d\gamma(x^*) - \int_{\Gamma \cap A_{m+1}} (x^*, x_{n(m+1)}) \, d\gamma(x^*) \right)$$

$$\geqq 2^{m+1}\{(r+2\eta)/2 - r/2\} = 2^{m+1}\cdot\eta$$

が成り立つ。よって $x_1^* \neq 0$ ならば，$\delta = \min\{\|x_1^*\|, \eta\}$ とおけば，$\{x_n^*\}_{n\geq1}$ 自身が δ-Rademacher tree である。次に $x_1^* = 0$ ならば，今示した不等式の $m=0$ の場合から $\|x_2^* - x_3^*\| \geqq 2\eta$ であるから，一般性を失うことなく，$x_2^* (= \alpha([0, 1/2])) \neq 0$ としてよい。そして $\{L_{m.i}\}$ $(m\geqq0,\ 0\leqq i\leqq 2^m-1)$ を $L_{m.i} = [i/2^{m+1}, (i+1)/2^{m+1}]$ で与えられる $[0, 1/2]$ の閉区間の列としよう。その時，$y^*_{2^m+i} = 2^{m+1}\cdot\alpha(L_{m.i})$ $(m\geqq0,\ 0\leqq i\leqq 2^m-1)$ とおけば，$\{y_n^*\}_{n\geq1}$ は $\{x_n^*\}_{n\geq1}$ の部分列の作る tree であり，しかも $\delta = \min\{\|x_2^*\|, \eta\}$ とおけば，先と同様の議論により，$m\geqq0$ について

$$\left\|\sum_{i=0}^{2^{m+1}-1}(-1)^i y^*_{2^{m+1}+i}\right\| \geqq 2^{m+1}\eta \geqq 2^{m+1}\cdot\delta$$

かつ，$\|y_1^*\| \geqq \delta$ が示されるから，$\{y_n^*\}_{n\geq1}$ は δ-Rademacher tree である。

以上から，$\{T_h^*(\chi_A)/\lambda(A) : \lambda(A)>0,\ A\in\Lambda\}$ は適当な正数 δ に対して，δ-Rademacher tree を含むことが立証された。最後に，この h に対応するマーチンゲール $(h_m, \Lambda_m)_{m\geq1}$ について

(γ) $\inf\{\|h_m - h_{m+1}\|_p : m\geqq1\} > 0$ であること。そのために各 $m\ (\geqq1)$ について，

$$a_{m.i} = \int_{J_{m.2i}} |\langle x_{n(m)}, h_m(t)\rangle - \langle x_{n(m)}, h_{m+1}(t)\rangle|\, d\lambda(t)$$

かつ

$$b_{m,i} = \int_{J_{m,2i+1}} |(x_{n(m)}, h_m(t)) - (x_{n(m)}, h_{m+1}(t))| d\lambda(t)$$

(但, $0 \leqq i \leqq 2^{m-1}-1$) とおこう。そして $s \in J_{m,2i}$ ($0 \leqq i \leqq 2^{m-1}-1$) をとれ。その時,

$$(x_{n(m)}, h_m(s)) - (x_{n(m)}, h_{m+1}(s))$$

$$= 2^{m-1}\int_{J_{m-1,i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) - 2^m \int_{J_{m,2i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t)$$

$$= 2^{m-1}\left\{\int_{J_{m-1,i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) - 2\int_{J_{m,2i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t)\right\}$$

$$= 2^{m-1}\left\{\int_{J_{m,2i+1}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) - \int_{J_{m,2i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t)\right\}$$

が成り立つから, 各 i (但, $0 \leqq i \leqq 2^{m-1}-1$) について

$$a_{m,i} \geqq (1/2)\left\{\int_{J_{m,2i+1}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) - \int_{J_{m,2i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t)\right\}$$

である。従って(β)と同様の議論から,

$$\sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} a_{m,i}$$

$$\geqq (1/2)\sum_{i=0}^{2^{m-1}-1}\left\{\int_{J_{m,2i+1}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t) - \int_{J_{m,2i}} (x_{n(m)}, h_m(t)) d\lambda(t)\right\}$$

$$= (1/2)\sum_{i=0}^{2^{m-1}-1}\left\{\int_{I_{m,2i+1}}(x_{n(m)}, h_m(t))\,d\lambda(t) - \int_{I_{m,2i}}(x_{n(m)}, h_m(t))\,d\lambda(t)\right\}$$

$$= (1/2)\left\{\int_{\Gamma\cap B_m}(x^*, x_{n(m)})\,d\gamma(x^*) - \int_{\Gamma\cap A_m}(x^*, x_{n(m)})\,d\gamma(x^*)\right\}$$

が成り立つ。又、$b_{m,i}$ に関しても同様の議論から、

$$\sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} b_{m,i} \geqq (1/2)\left\{\int_{\Gamma\cap B_m}(x^*, x_{n(m)})\,d\gamma(x^*) - \int_{\Gamma\cap A_m}(x^*, x_{n(m)})\,d\gamma(x^*)\right\}$$

が成り立つから、これらを用いて、

$$\|h_m - h_{m+1}\|_p$$

$$\geqq \int_{[0,1]}|(x_{n(m)}, h_m(t)) - (x_{n(m)}, h_{m+1}(t))|\,d\lambda(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1}\int_{J_{m-1,i}}|(x_{n(m)}, h_m(t)) - (x_{n(m)}, h_{m+1}(t))|\,d\lambda(t)$$

$$= \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} a_{m,i} + \sum_{i=0}^{2^{m-1}-1} b_{m,i}$$

$$\geqq \int_{\Gamma\cap B_m}(x^*, x_{n(m)})\,d\gamma(x^*) - \int_{\Gamma\cap A_m}(x^*, x_{n(m)})\,d\gamma(x^*)$$

$$\geqq (r + 2\eta)/2 - r/2 = \eta$$

が得られる。即ち、$\inf\{\|h_m - h_{m+1}\|_p : m \geqq 1\} \geq \eta > 0$ であり、要求された結果である。

References

[1] M. Matsuda, On Saab's characterizations of weak Radon-Nikodym sets, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 21(1985), 921-941.

[2] M. Matsuda, A characterization of weak Radon-Nikodym sets in dual Banach spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 22(1986), 551-559.

[3] M. Matsuda, A characterization of Pettis sets in dual Banach spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 26(1991), 827-836.

[4] M. Matsuda, A characterization of non-Pettis sets in terms of martingales, Preprint.

[5] K. Musial, The weak Radon-Nikodym property in Banach spaces, Studia Math., 64(1978), 151-174.

[6] L. H. Riddle, The geometry of weak Radon-Nikodym sets in dual Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 86(1982), 433-438.

[7] L. H. Riddle and E. Saab, On functions that are universally Pettis integrable, Illinois J. Math., 29(1985), 509-531.

[8] L. H. Riddle, E. Saab and J. J. Uhl, Jr, Sets with the weak Radon-Nikodym property in dual Banach spaces, Indiana Univ. Math. J., 32(1983), 527-541.

[9] L. H. Riddle and J. J. Uhl, Jr, Martingales and the fine line between Asplund spaces and spaces not containing a copy of l_1, Lecture Notes in Math., Springer, 939(1981), 145-156.

[10] H. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing l_1, Proc. Nat. Acad. Sci., 71(1974), 2411-2413.

[11] E. Saab, Some characterizations of weak Radon-Nikodym sets, Proc. Amer. Math. Soc., 86(1982), 307-311.

[12] E. Saab and P. Saab, A dual geometric characterization of Banach spaces not containing l_1, Pacif. J. Math., 105(1983), 415-425.

[13] M. Talagrand, Pettis integral and measure theory, Memoirs of the A.M.S., 307(1984).