

ある種の非線形写像に対する不変集合の特徴について

お茶の水女大・理 竹尾 富貴子 (Fukiko Takeo)

§1. 序

非線形縮小写像の族に対する不変集合はフラクタル図形にもなり、興味深い。

[1]において、畑氏は自己相似図形の位相的特徴を写像族のある種の性質から論じている。ここでは、二つの非線形写像に対する不変集合の位相的特徴を直積空間 $\Sigma_2 = \prod_{i=1}^{\infty} \{1, 2\}$ の商空間の特徴との関係で調べる。

まず、言葉の定義から始める。

1) $\{1, 2\}$ を成分にもつ数列のうち、無限数列の全体を $\Sigma_2 = \{x = (x_1 \cdots x_n \cdots); x_i \in \{1, 2\}\}$, 有限数列の全体を $I = \{\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_n); n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \{1, 2\}\}$ とする。

和 $\oplus : I \times (I \cup \Sigma_2) \rightarrow I \cup \Sigma_2$ の演算を

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \oplus (\beta_1 \cdots \beta_m) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_m),$$

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \oplus (x_1 \cdots x_k \cdots) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n x_1 \cdots x_k \cdots),$$

によって定義する。

さらに、 $x \in \Sigma_2$ に対し、 $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \oplus z^j$ なる表現は、

$$M < \infty \text{ のとき、 } z^j \in I \ (1 \leq j \leq M-1), \ z^M \in \Sigma_2$$

$$M = \infty \text{ のとき、 } z^j \in I \ (1 \leq j < M) \text{ とする。}$$

$I \ni \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に対し、 $|\alpha|$ は α の長さ n を表し、 $x \in \Sigma_2$ に対しては、 $|x| = \infty$ とす。

2) $x \in \Sigma_2$ に対し、 $x = \alpha \oplus x$ なる $\alpha \in I$ が存在するならば、 α を x の周期といい、最小の長さの周期 α を x の最小周期をいう。また、このような $\alpha \in I$ が存在しないとき、 x の最小周期はそれ自身 x であるという。

3) $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し、写像 $\sigma^n: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, $P_n: \Sigma_2 \rightarrow I$, を以下の様に決める。

$$\sigma^n(x_1 \cdots x_k \cdots) = (x_{n+1} x_{n+2} \cdots)$$

$$P_n(x_1 x_2 \cdots) = (x_1 \cdots x_n)$$

4) $x, y \in \Sigma_2$ の最小周期をそれぞれ α, β とするとき、

$$Q(x, y) = \left\{ \sum_{j=1}^n \oplus z^j \in \Sigma_2 ; z^j \in \{\alpha, \beta, x, y\} \right\} \text{ とする。}$$

$x, y \in \Sigma_2$ が互に素とは

任意の $v, w \in Q(x, y)$ に対し、 $\sigma^n v = w$ なる $n \in \mathbb{N}$ が存在するならば、

$$P_n v = \sum_{j=1}^n \oplus z^j \quad (z^j \in \{\alpha, \beta\}) \text{ であることとする。}$$

5) $u^1 = (u_n^1), u^2 = (u_n^2) \in \Sigma_2$ に対し、以下の条件 (*1), (*2) を満たすとき、

(u^1, u^2) を (*) 組 という。

$$(*1) \quad u_1^1 = 1, u_1^2 = 2$$

$$(*2) \quad u^1 \text{ と } u^2 \text{ は互に素。}$$

(*) 組 (u^1, u^2) に対し、 α^1, α^2 を u^1, u^2 の最小周期とし、 $Qu = Q(u^1, u^2)$ 即ち、

$$Qu = \left\{ \sum_{j=1}^n \oplus \beta^j ; \beta^j \in \{\alpha^1, \alpha^2, u^1, u^2\} \right\} \text{ とする。}$$

6) $\Sigma_2 \ni x, y$ に対し、 x と y が同値 であるとは

$$x = y \text{ 又は}$$

$$P_n x = P_n y, \sigma^n x, \sigma^n y \in Qu \text{ なる } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ が存在すること}$$

とし、同値関係 $x \sim y$ を定義する。

$n_1 \geq n_2 \geq 0$ に対して、 $P_{n_1} x = P_{n_1} y, P_{n_2} y = P_{n_2} z, \sigma^{n_1} x, \sigma^{n_1} y, \sigma^{n_2} y, \sigma^{n_2} z \in Qu$ ならば、 u^1, u^2 が互に素で、 $\sigma^{n_1} y = \sigma^{n_1 - n_2}(\sigma^{n_2} y) \in Qu$ より、 $P_{n_1 - n_2}(\sigma^{n_2} y) = \sum_{j=1}^n \oplus z^j \quad (z^j \in \{\alpha^1, \alpha^2\})$ となる。これより、 $\sigma^{n_2} x \in Qu$ となるので、 $\sim$ は同値律を満たす。

x の同値類を $Qx = \{y \in \Sigma_2 : x \sim y\}$ とかき、同値類全体、即ち、商空間を

$\Sigma_2/\sim$ とかく。

§2. $\Sigma_2/\sim$ の位相について

以下、 (u^1, u^2) を $(*)$ 組とし、 α^1, α^2 を u^1, u^2 の最小周期とし、商空間 $\Sigma_2/\sim$ を考える。

Σ_2 に直積位相を入れると $x \in \Sigma_2$ の近傍基底は $\{U_n(x)\}_{n=1}^\infty$ であり、 Σ_2 はコンパクトである。ただし、 $U_n(x) = \{y \in \Sigma_2; P_n x = P_n y\}$ である。

Σ_2 から商空間への標準写像を

$$q: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2/\sim \text{ とする。}$$

補題 2-1. Σ_2 において、 Qu は閉集合である。

証明 1 点は閉集合より、 $|\alpha^1| = |\alpha^2| = \infty$ の場合は $Qu = \{u^1, u^2\}$ より明らか。

$|\alpha^1| = n_1 < \infty, |\alpha^2| = n_2 < \infty$ の場合を考える。

$\Sigma_2 \ni y = (y_n)$ に対し $P_n y \in P_n Qu$ が任意の自然数 n に対して成り立つならば $y_1 = j_1$ とおくと、 $P_{n_{j_1}} y = \alpha^{j_1}$ となり、 $y_{n_{j_1}+1} = j_2$ とおくと、 $P_{n_{j_1}+n_{j_2}} y = \alpha^{j_1} \oplus \alpha^{j_2}$ となる。これより、 $y = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{j_k} \in Qu$ ($j_k \in \{1, 2\}$) となる。従って対偶をとり、 $y \notin Qu$ ならば $U_n(y) \cap Qu = \emptyset$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在して、 Qu は閉集合となる。

$|\alpha^1| < \infty, |\alpha^2| = \infty$ または、 $|\alpha^1| = \infty, |\alpha^2| < \infty$ の場合も同様にして Qu は閉集合であることが示される。//

$n \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq n-1$ に対し、

$$P_{j,n}: \Sigma_2 \rightarrow I \text{ を } P_{j,n}(x_1 \cdots x_n \cdots) = (x_{j+1} \cdots x_n)$$

$$H(x; j) = \{h \in \Sigma_2; P_j h = P_j x, \sigma^j h \in Qu, q(h) \neq q(x)\}$$

$$J(x; n) = \{j; 0 \leq j \leq n-1, \exists h \in H(x; j) \text{ s.t. } P_n x = P_n h\}$$

$$V_n(x) = \{y \in \Sigma_2; P_n Qy = \{P_n x\} \text{ or } y = x\}$$

$$\tilde{U}_n(q(x)) = \{q(y) \in \Sigma_2 / \sim; P_n Qy \subset P_n Qx\}$$

Λ_x を Qx 上の自然数値をとる関数の全体とする。

$$\eta \in \Lambda_x \text{ に対して、 } \tilde{V}_\eta(q(x)) = \bigcup_{x' \in Qx} q(V_\eta(x')(x'))$$

とする。

このとき、 $\tilde{U}_n(q(x)) = \bigcup_{x' \in Qx} q(V_n(x'))$ である。

命題 2-2. $\Sigma_2 / \sim$ の位相について次が成り立つ。

1) $\{\tilde{V}_\eta(q(x))\}_{\eta \in \Lambda_x}$ は $\Sigma_2 / \sim$ の商位相の近傍基底である。

即ち $q(x) \in W \subset \Sigma_2 / \sim$ で、 $q^{-1}(W)$ が Σ_2 において開集合ならば、 $\tilde{V}_\eta(q(x)) \subset W$ なる $\eta \in \Lambda_x$ が存在し、また、任意の $\eta \in \Lambda_x$ に対して、 $q^{-1}(\tilde{V}_\eta(q(x)))$ は Σ_2 において開集合である。

2) $\{\tilde{U}_n(q(x))\}_{n=1}^\infty$ は $\Sigma_2 / \sim$ における一つの近傍基底をなす。

3) $\tilde{U}_n$ による位相は $\tilde{V}_\eta$ による位相より弱い。

4) i) Qu が二点のみからなるとき、 $\tilde{U}_n$ による位相と $\tilde{V}_\eta$ による位相は同相である。

ii) $Qx = \{x\}$ なる点 $x \in \Sigma_2$ に対しては $\tilde{U}_n(q(x)) = \tilde{V}_{\eta_n}(q(x))$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) である。

ただし、 $\eta_n(x') = n$ ($\forall x' \in Qx$) とする。

証明 1) $q(x) \in W \subset \Sigma_2 / \sim$ で、 $q^{-1}(W)$ が Σ_2 において開集合ならば、任意の $x' \in Qx$ に対して $x' \in q^{-1}(W)$ が成り立つので、 $U_{n_{x'}}(x') \subset q^{-1}(W)$ なる $n_{x'} \in \mathbb{N}$ が存在する。

$\eta \in \Lambda_x$ として $\eta(x') = n_{x'}$ なるように定めると、 $V_{\eta(x')}(x') \subset U_{\eta(x')}(x') \subset q^{-1}(W)$ より $q(\bigcup_{x' \in Qx} V_{\eta(x')}(x')) \subset W$ となる。さらに、 $q(\bigcup_{x' \in Qx} V_{\eta(x')}(x')) = \bigcup_{x' \in Qx} q(V_{\eta(x')}(x'))$ より $\tilde{V}_\eta(q(x)) \subset W$ となる。

定義より $V_n(x) = U_n(x) \setminus \bigcup_{j \in J(x, n)} H(x; j)$ となる。 Qx は閉集合より $H(x; j)$ は閉集合であり、また、 $J(x; n)$ は有限集合より、 $V_n(x)$ は開集合となる。さらに、 $\eta \in \Lambda_x$ に対して、 $q^{-1}(\tilde{V}_\eta(q(x))) = \bigcup_{x' \in Qx} V_{\eta(x')}(x')$ となるので、 $q^{-1}(\tilde{V}_\eta(q(x)))$ は開集合となる。

2) $q(y) \in \tilde{U}_n(q(x))$ ならば、 $\tilde{U}_n(q(y)) \subset \tilde{U}_n(q(x))$ より、近傍基底となる。

3) $\eta_n \in \Lambda_x$ として $\eta_n(x') = n (\forall x' \in Qx)$ とすると、 $\tilde{U}_n(q(x)) = \tilde{V}_{\eta_n}(q(x))$ より $\tilde{U}_n$ による位相のほうが弱い。

4) 定義よりあきらか。//

$\Sigma_2 / \sim_x$ の任意の元 $q(x)$ に対して、 $\{\tilde{U}_n(q(x))\}_{n=1}^\infty$ を近傍基底をする位相空間を $(\Sigma_2 / \sim_x, \tilde{U})$ によって表す。

命題 2-3. $\varphi: \Sigma_2 \rightarrow K \subset \mathbb{R}^N$ は連続で、 $q(x) = q(y)$ ならば、 $\varphi(x) = \varphi(y)$ であるとする。

このとき、 $\tilde{\varphi}: (\Sigma_2 / \sim_x, \tilde{U}) \rightarrow K$ は連続になる。

証明 $q(x) = q(y)$ ならば、 $\varphi(x) = \varphi(y)$ より、 $\tilde{\varphi}(q(x)) = \varphi(x)$ は定義できる。

φ はコンパクト集合上連続より、一様連続なので、 $\mathbb{R}^N \ni 0$ の任意の近傍 $V \subset \mathbb{R}^N$ に対して、 n が存在して $\varphi(U_n(x)) \subset V + \varphi(x)$ が任意の $x \in \Sigma_2$ に対して成り立つ。このとき $q^{-1}(\tilde{U}_n(q(x))) \subset \{U_n(x'); x' \in Qx\}$ より $\tilde{\varphi}(\tilde{U}_n(q(x))) \subset V + \tilde{\varphi}(q(x))$

となるので $\tilde{\varphi}$ は連続である。//

補題 2-4. A は $(\Sigma_2/\sim, \tilde{U})$ で開集合、かつ $A^c \neq \emptyset$ とする。 $Qx = \{x\}$ なる $q(x) \in A$ に対し、 $\tilde{U}_n(q(x)) \subset A$ かつ $\tilde{U}_{n-1}(q(x)) \not\subset A$ なる $n \in \mathbb{N}$ をとる。

このとき、次のいずれかが成り立つ。

a) $h \in H(x; n-1)$ に対し $q(h) \in A^c$

b) $m (> n)$ と $y \in q^{-1}(A)$ が存在して、 $P_{m-1}y = P_{n-1}x$, $Qy = \{y\}$,

$\tilde{U}_m(q(y)) \subset A$ かつ $\tilde{U}_{m-1}(q(y)) \not\subset A$ を満たす。

証明 $h \in H(x; n-1)$ に対し $q(h) \in A$ のとき、 b) が成り立つことを示す。

$h \in H(x; n-1)$ に対し $Qx = \{x\}$ より $\tilde{U}_{n-1}(q(x)) \subset \tilde{U}_n(q(h))$ であり、また、 $q(h) \in A$ ならば $\tilde{U}_m(q(h)) \subset A$ かつ $\tilde{U}_{m-1}(q(h)) \not\subset A$ なる $m (> n)$ が存在する。これより、 $P_{m-1}Qz \subset P_{m-1}Qh$, $P_{m-1}Qz = \{P_{m-1}z\}$ かつ $q(z) \notin A$ なる $z \in \Sigma_2$ が存在する。このとき、 $P_{m-1}z = P_{m-1}h'$ なる $h' \in Qh$ が存在し、 $P_my = P_mh'$ かつ $Qy = \{y\}$ となる $y \in \Sigma_2$ がとれる。すると、 $y \in q^{-1}(A)$ となり、これらの m と y は b) を満たす。//

定理 2-5. $(\Sigma_2/\sim, \tilde{U})$ は 連結、コンパクト、ハウスドル空間である。

証明 $\Sigma_2/\sim$ が連結でないとすると、 $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \Sigma_2/\sim$ を満たす空でない開集合 $A, B \subset \Sigma_2/\sim$ が存在する。 $A \neq \emptyset$ より $Qx^1 = \{x^1\}$, $\tilde{U}_{n_1}(q(x^1)) \subset A$ かつ $\tilde{U}_{n_1-1}(q(x^1)) \not\subset A$ なる $x^1 \in q^{-1}(A)$ と $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在する。補題2-4 より、 a), b) のいずれかが成り立つが、 a) の場合は、 $h \in H(x^1; n_1-1)$ に対し、 $q(h) \in A^c$ であるが、 $q(h)$ は $B = A^c$ の内点でないことがわかり、 B が開集合に矛盾する。

よって、b) の場合を考える。 $P_{n_1-1}x^1 = P_{n_1-1}x^2$, $Qx^2 = \{x^2\}$, $\tilde{U}_{n_2}(q(x^2)) \subset A$ かつ $\tilde{U}_{n_2-1}(q(x^2)) \not\subset A$ なる $n_2 (>n_1)$ と $x^2 \in q^{-1}(A)$ が存在する。 n_2 と x^2 に対し、補題2-4 より、a), b) のいずれかが成りたつが、a) の場合は、前述の議論をして B が開集合に矛盾する。従って以下の場合が残る。すなわち、数列 $\{n_j\}$ と点列 $\{x^j\} \subset q^{-1}(A)$ が存在して $n_j > n_{j-1}$, $P_{n_{j-1}-1}x^j = P_{n_{j-1}-1}x^{j-1}$, $\tilde{U}_{n_j}(q(x^j)) \subset A$ かつ $\tilde{U}_{n_{j-1}}(q(x^j)) \not\subset A$ を満たす。このとき、 $z = (z_k)$ として $n_{j-1} \leq k \leq n_j-1$ のとき $z_k = x_k^j$ とすると、 z は $q^{-1}(A^c)$ に属し、 $q(z)$ は $A^c = B$ の内点ではないことがわかり、 B が開集合に矛盾する。これは $\Sigma_2/\sim_{\frac{1}{2}}$ が連結でないとしたことによる矛盾であり、 $\Sigma_2/\sim_{\frac{1}{2}}$ は連結である。

$\Sigma_2/\sim_{\frac{1}{2}}$ のコンパクト性は 関係式

$$q(U_n(x)) \subset \tilde{U}_n(q(x)) \cup \{q(h); h \in H(x; j), j \in J(x; n)\}$$

及び $J(x; n)$ が有限個の元から成ることと Σ_2 のコンパクト性とより示される。

ハウスドルフ空間であることは容易にわかる。//

定理2-5 と同様にして、次の系が得られる。

系1 任意の $x \in \Sigma_2$ と自然数 n に対して $\tilde{U}_n(q(x))$ は $(\Sigma_2/\sim_{\frac{1}{2}}, \tilde{U})$ に於いて連結開集合である。

更に $\{\tilde{U}_n(q(x))\}_{n=1}^{\infty}$ は $(\Sigma_2/\sim_{\frac{1}{2}}, \tilde{U})$ に於ける近傍基底であることより、次の系が得られる。

系2 $(\Sigma_2/\sim_{\frac{1}{2}}, \tilde{U})$ は局所連結である。

即ち、任意の $q(x) \in \Sigma_2 / \sim$ を含む開集合 $\tilde{U}$ に対し、 $q(x)$ を含む開集合 $\tilde{V}$ で、 $q(x)$ の $\tilde{U}$ での連結成分に含まれるものが存在する。

§3. 端点について

$q(x) \in \Sigma_2 / \sim$ が 端点 とは

任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、 $\tilde{U}_n(q(x))$ の境界 $\partial \tilde{U}_n(q(x))$ が一点だけからなるような $n > N$ が存在することである。

境界 $\partial \tilde{U}_n(q(x))$ の性質として、次の補題が成り立つ。

$$\text{補題 3-1. } \partial \tilde{U}_n(q(x)) = \bigcup_{x' \in Qx} \bigcup_{j \in J(x'; n)} q(H(x'; j))$$

証明 $j \in J(x'; n)$ に対し、 $h \in H(x'; j)$ をとると、 $q(h) \in (\tilde{U}_n(q(x)))^c$ である。

任意の $m (> n)$ に対して、 $Qy = \{y\}$, $P_my = P_mh$ なる $y \in \Sigma_2$ をとると、 $q(y) \in \tilde{U}_n(q(x)) \cap \tilde{U}_m(q(h))$ となり $\bigcup_{x' \in Qx} \bigcup_{j \in J(x'; n)} q(H(x'; j)) \subset \partial \tilde{U}_n(q(x))$ である。

逆に、 $q(y) \notin (\tilde{U}_n(q(x)) \cup \bigcup_{x' \in Qx} \bigcup_{j \in J(x'; n)} q(H(x'; j)))$ ならば $q(y)$ は $(\tilde{U}_n(q(x)))^c$ の内点となり、 $\partial \tilde{U}_n(q(x)) \subset \bigcup_{x' \in Qx} \bigcup_{j \in J(x'; n)} q(H(x'; j))$ である。 //

命題 3-2. $x \in \Sigma_2$ に対し、(1) $\Rightarrow$ (2) は常に成り立つ。

(1) $Qx = \{x\}$ かつ任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、 $J(x; n) = \{n-1\}$ となるような $n > N$ が存在する。

(2) $q(x) \in \Sigma_2 / \sim$ が 端点 である。

さらに、 $Qu = \{u^1, u^2\}$ のとき、(1) と (2) は同値である。

証明 $n-1 \in J(x; n)$ は常に成りたつので、補題3-1 から、(1) $\Rightarrow$ (2)は示される。

$Qu = \{u^1, u^2\}$ のとき、" $q(H(x; j)) = q(H(x'; j'))$ " と " $x = x', j = j'$ " は同値であるので、(2) $\Rightarrow$ (1)は示される。//

注 命題3-2において、 $Qu = \{u^1, u^2\}$ の仮定がないと、(1)と(2)の同値は必ずしも成りたたない。

例 $u^1 = \sum_{k=1}^3 \oplus (12)$, $u^2 = (2) \oplus \sum_{k=1}^3 \oplus (1)$, $x = \sum_{k=1}^3 \oplus (122)$,

とすると、 $Qx = \{x\}$ かつ $\partial \tilde{U}_{3k}(q(x)) = \{q(H(x; 3(k-1)))\}$ となり、 $q(x)$ は端点である。しかし、

$n=3k$ のとき $J(x; n) = \{n-1, n-3\}$, $n=3k+1$ のとき $J(x; n) = \{n-1, n-2, n-4\}$,
 $n=3k+2$ のとき $J(x; n) = \{n-1, n-2\}$ となり、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $J(x; n) \neq \{n-1\}$ である。

命題 3-3. 端点の存在について次が成りたつ。

- (1) $\Sigma_2 / \sim$ には端点は必ず存在する。
- (2) $J(u^1; n) = J(u^2; n) = \{n-1\}$ ($n \geq 2$) のとき以外は端点は無限個ある。

証明 $x^1 = \sum_{k=1}^3 \oplus (1)$, $x^2 = \sum_{k=1}^3 \oplus (2)$, $x^3 = \sum_{k=1}^3 \oplus (12)$ とおく。

(1) 命題 3-2 より

- a) $u_2^1 = 2$ のとき、 $q(x^1)$ は端点
- b) $u_2^2 = 1$ のとき、 $q(x^2)$ は端点
- c) $u_2^1 = 1, u_2^2 = 2$ のとき、 $q(x^3)$ は端点である。

(2) $J(u^1; n) = J(u^2; n) = \{n-1\}$ ($n \geq 2$) 以外ならば、 $1 \leq j_0 \leq n_0 - 2$, $j_0 \in J(u^2; n_0)$ なる j_0, n_0 が存在する。このとき、

a) $u_2^1 = 2$ ならば、

$$(*) \quad \begin{cases} \sigma^{m_1} u^1 = x^1 \text{ なる } m_1 \text{ が存在するならば、} m_1 \geq 2 \\ \sigma^{m_2} u^2 = x^1 \text{ なる } m_2 \text{ が存在するならば、} m_2 \geq 3 \end{cases} \quad \text{である。}$$

(*) を満たす m_1, m_2 が存在するとき、 m_1, m_2 は(*)をみたす最小の数とし、 $y \in \Sigma_2$ として、 $\sigma^3 y = (2) \oplus x^1$, $P_2 y \neq P_2 \sigma^{m_1-2} u^1$, $P_3 y \neq P_3 \sigma^{m_2-3} u^2$, なるものをとる。任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\sigma^k z = y$ なる $z \in \Sigma_2$ をとると $q(z)$ は端点となり、端点は無限個ある。(*) を満たす m_1, m_2 が一方だけ存在する場合、どちらも存在しない場合も同様に示される

b) $u_2^1 = 1, u_2^2 = 1$ ならば、

$$\begin{cases} \sigma^{m_1} u^1 = x^2 \text{ なる } m_1 \text{ が存在するならば、} m_1 \geq 2 \\ \sigma^{m_2} u^2 = x^2 \text{ なる } m_2 \text{ が存在するならば、} m_2 \geq 3 \end{cases} \quad \text{である。}$$

従って、 x_1 の代わりに x_2 を用いて、a) と同様にして、端点が無限個あることが示される。

c) $u_2^1 = 1, u_2^2 = 2$ ならば、

$$(**) \quad \begin{cases} \sigma^{m_1} u^1 = x^3 \text{ なる } m_1 \text{ が存在するならば、} m_1 \geq 1 \\ \sigma^{m_2} u^2 = x^3 \text{ なる } m_2 \text{ が存在するならば、} m_2 \geq 3 \end{cases} \quad \text{である。}$$

m_1, m_2 は(**)をみたす最小の数とする。

$m_1 = 1$ のとき、

$y \in \Sigma_2$ として、 $\sigma y = (22) \oplus x^3$, $P_3 y \neq P_3 \sigma^{m_2-3} u^2$ なるものをとる。任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\sigma^k z = y$ なる $z \in \Sigma_2$ をとると $q(z)$ は端点となり、端点は無限個ある。

$m_1 \geq 2$ のとき、

$y \in \Sigma_2$ として、 $\sigma^2 y = x^3$, $P_2 y \neq P_2 \sigma^{m_1-2} u^1$, $P_2 y \neq P_2 \sigma^{m_2-2} u^2$, $P_2 y \neq (12)$ なるものをとる。任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\sigma^k z = y$ なる $z \in \Sigma_2$ をとると $q(z)$ は端点となり、端点

は無限個ある。//

定理 3-4. 次は同値である。

- (1) $(\Sigma_2/\sim, \tilde{U})$ は区間 $[0, 1]$ と位相同型である。
 (2) 任意の $n \geq 2$ に対し、 $J(u^1; n) = J(u^2; n) = \{n-1\}$ である。

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): 仮定より、位相写像 $\tau: [0, 1] \rightarrow \Sigma_2/\sim$ が存在する。 $t \in (0, 1)$ ならば、 $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset (0, 1)$ なる $\varepsilon > 0$ が存在する。 $\tau((t-\varepsilon, t+\varepsilon))$ は $\Sigma_2/\sim$ における開集合より、 n_0 が存在して、 $\overline{\tilde{U}_n(\tau(t))} \subset \tau(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ ($\forall n \geq n_0$) を満たす。定理2-5の系1より $\tilde{U}_n(\tau(t))$ は連結開集合であるから、 $\tau^{-1}(\tilde{U}_n(\tau(t)))$ も連結開集合となり、 $(0, 1)$ に含まれる开区間より、 $\partial \tau^{-1}(\overline{\tilde{U}_n(\tau(t))})$ は2点から成る。従って、 $\partial(\overline{\tilde{U}_n(\tau(t))})$ も2点から成り、 $\tau(t)$ は端点でない。従って、 $\Sigma_2/\sim$ における端点は $\tau(0)$ と $\tau(1)$ のみであり、命題3-3より (2) となる。

(2) $\Rightarrow$ (1): $x = (x_n) \in \Sigma_2$ に対して、

$$e_n(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n-1} (x_j - u_2^{x_j} + 1) & (n \geq 2) \\ 0 & (n=1) \end{cases}$$

$$a_n(x) = \frac{1}{2} + (-1)^{e_n(x)} \left(x_n - \frac{3}{2} \right),$$

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{2^n}$$

とおくと、 $a_n(x) \in \{0, 1\}$ で $r: \Sigma_2 \rightarrow [0, 1]$ は上への連続写像である。

(2) ならば、 $j \geq 3$ に対して、次が成り立つ。

$$(*) \quad u_j^1 \neq u_{j-1}^1, \quad u_j^2 \neq u_{j-1}^2$$

このとき、 $r(x) = r(y)$ と $q(x) = q(y)$ は同値であることを示す。

" $r(x)=r(y)$ かつ $x \neq y$ " であることと

" $(**) a_j(x)=a_j(y) (j \leq n_0-1), a_{n_0}(x)=0, a_j(x)=1 (j \geq n_0+1), a_{n_0}(y)=1, a_j(y)=0 (j \geq n_0+1)$

を満たす $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在すること、

あるいは、 $a_j(x)$ と $a_j(y)$ がすべての $j \in \mathbb{N}$ で逆になること"

と同値である。

$q(x)=q(y)$ ならば、 $r(x)=r(y)$ を示す。(2)の仮定より、 $Qu = \{u^1, u^2\}$ なので、 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、 $x = P_{n_0-1}x \oplus u^1, y = P_{n_0-1}x \oplus u^2$ のとき示せばよい。このとき、 $a_j(x)=a_j(y) (j \leq n_0-1)$ である。 $e_{n_0}(x)=e_{n_0}(y)=0 \pmod{2}$ のとき、 $x_{n_0}=u^1_1=1$ より、 $a_{n_0}(x)=\frac{1}{2}+(u^1_1-\frac{3}{2})=0$ 、(*)を用いて、 $e_{n_0+1}(x)=2-u^1_2 \pmod{2}$ 、 $e_{n_0+j}(x)=1-u^j_2 \pmod{2} (j \geq 2)$ より $a_{n_0+j}(x)=1 (j \geq 1)$ であり、同様にして、 $a_{n_0}(y)=1, a_{n_0+j}(y)=0 (j \geq 1)$ である。 $e_{n_0}(x)=e_{n_0}(y)=1 \pmod{2}$ の場合も同様に(**)を満たすことがわかるので $r(x)=r(y)$ となる。

逆に $r(x)=r(y)$ ならば $q(x)=q(y)$ を示す。 $x=y$ ならば明らかより、 $x \neq y$ の場合を考える。 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、 $x_j=y_j (j \leq n_0-1), x_{n_0} \neq y_{n_0}$ とする。このとき、 $a_j(x)=a_j(y) (j \leq n_0-1)$ より、 $e_{n_0}(x)=e_{n_0}(y)$ であり、 $x_{n_0} \neq y_{n_0}$ より、 $a_{n_0}(x) \neq a_{n_0}(y)$ である。 $a_{n_0}(x)=0, a_{n_0}(y)=1$ のとき示せばよい。 $r(x)=r(y)$ より、 $a_j(x)=1 (j \geq n_0+1), a_j(y)=0 (j \geq n_0+1)$ である。 $a_{n_0}(x)=\frac{1}{2}+(-1)^{e_{n_0}(x)}(x_{n_0}-\frac{3}{2})=0$ 、より、 $e_{n_0}(x) \neq x_{n_0}$ 、これより、 $e_{n_0+1}(x)=u^{x_{n_0}}_2 \pmod{2}$ である。また $a_{n_0+1}(x)=1$ と併せて $x_{n_0+1}=u^{x_{n_0}}_2 \pmod{2}$ である。以下同様にして、 $j \geq 2$ に対して、 $e_{n_0+j}(x)=1-u^{x_{n_0+j-1}}_2 \pmod{2}, x_{n_0+j} \neq u^{x_{n_0+j-1}}_2$ となり、 $x = P_{n_0-1}x \oplus u^{x_{n_0}}$ である。同様にして、 $y = P_{n_0-1}x \oplus u^{y_{n_0}}$ であり、 $q(x)=q(y)$ である。

以上より、 $r(x)=r(y)$ と $q(x)=q(y)$ は同値であり、 $(\Sigma_2/\sim, \tilde{U})$ はコンパクト

で、 $[0, 1]$ はハウスドルフ空間で、 $r: \Sigma_2 \rightarrow [0, 1]$ は上への連続写像より、命題2-3 から、 $(\Sigma_2 / \sim, \tilde{U})$ は区間 $[0, 1]$ と同相である。 //

注. 定理3-4 の条件 (1), (2) は次の (3) と同値である。

(3) (u^1, u^2) は次のどれかの場合に限る。

$$(i) \quad u^1 = (1) \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (2), \quad u^2 = (2) \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (1)$$

$$(ii) \quad u^1 = (12) \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (1), \quad u^2 = (22) \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (1)$$

$$(iii) \quad u^1 = (11) \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (2), \quad u^2 = (21) \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (2)$$

$$(iv) \quad u^1 = (1) \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (12), \quad u^2 = (2) \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus (21)$$

§4. R^N における非線形写像の不変集合について

f_1, f_2 を R^N 上の1対1、縮小写像、即ち、 $\text{Lip } f_j = r_j$ とし、 f_j の一意的不動点を $\text{Fix}(f_j)$ で表す ($j=1, 2$)。空でないコンパクト集合 K が $K = f_1(K) \cup f_2(K)$ を満たすとき、 $K = K(f_1, f_2)$ とかく。この $K(f_1, f_2)$ は不動点定理から f_1, f_2 により一意に決まる。

$x_j \in \{1, 2\}$ ($j=1, 2, \dots, n$) に対し、 $f_{x_1} \dots f_{x_n} = f_{x_1} f_{x_2} \dots f_{x_n}$, $K_{x_1} \dots x_n = f_{x_1} \dots f_{x_n}(K)$ とおく。このとき、 $\text{diam}(K_{x_1} \dots x_n) \leq r_{x_1} r_{x_2} \dots r_{x_n} \text{diam}(K) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) である。

$\Sigma_2 \ni x = (x_n)$ に対し、 $K \supset K_{x_1} \supset K_{x_1 x_2} \supset \dots \supset K_{x_1 \dots x_n} \supset \dots$, であり、 $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_{x_1 \dots x_n}$ は1点 $\{k_x\}$ から成る。又、このとき、 $K = \bigcup_{x \in \Sigma_2} \{k_x\}$ である [2, 3.1]。 $\varphi: \Sigma_2 \rightarrow K$ を $\varphi(x) = k_x$ によって定義すると、 φ は連続写像で $f_j \circ \varphi(x) = \varphi((j) \oplus x)$ を満たす。

命題 4-1. $\text{Fix}(f_1) \neq \text{Fix}(f_2)$ かつ $f_1(K) \cap f_2(K) \neq \emptyset$ ならば $\varphi(u^1) = \varphi(u^2)$ を満たす $(*)$ 組 (u^1, u^2) が存在する。

証明 φ は K の上への写像で、 $f_1(K) \cap f_2(K) \neq \emptyset$ より、 $\Sigma_2 \ni x = (x_n), y = (y_n)$ が存在して $\varphi(x) = \varphi(y)$, $x_1=1, y_1=2$ を満たす。 $f_{x_1 \dots x_j} \varphi(x) = \varphi(x)$ なる $j \geq 1$ が存在するとき、最小の j を j_1 とし、 $\alpha^1 = (x_1 \dots x_{j_1})$ とおき、 $u^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^1$ とする。このような j が存在しないとき、 $u^1 = x$ とする。同様に、 $f_{y_1 \dots y_j} \varphi(y) = \varphi(y)$ なる $j \geq 1$ が存在するとき、最小の j を j_2 とし、 $\alpha^2 = (y_1 \dots y_{j_2})$ とおき、 $u^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2$ とする。このような j が存在しないとき、 $u^2 = y$ とする。このとき、 $\varphi(x) = \varphi(u^1)$, $\varphi(y) = \varphi(u^2)$ より、 $\varphi(u^1) = \varphi(u^2)$ となり、又 u^1 と u^2 は互に素であるので、 (u^1, u^2) は $(*)$ 組である。//

定理 4-2. f_1, f_2 を $\mathbb{R}^N$ 上の 1 対 1、縮小写像とし、 $\text{Fix}(f_1) \neq \text{Fix}(f_2)$ とする。このとき、

- (1) $K = K(f_1, f_2)$ は連結集合又は全不連結集合である。
- (2) $f_1(K) \cap f_2(K)$ が 1 点 $\{k_0\}$ のみから成るならば、 $(*)$ 組 (u^1, u^2) が存在し、 $(\Sigma_2 / \sim, \tilde{U})$ は K と位相同型である。

証明 $\varphi(x) = k_x$ なる $\varphi: \Sigma_2 \rightarrow K$ は連続である。

(1) a) φ が 1 対 1 のとき、 $\mathbb{R}^N$ はハウスドルフ空間、 Σ_2 はコンパクトで、 φ は連続より、 φ は位相写像である。 Σ_2 は全不連結より、 K も全不連結である。

b) φ が 1 対 1 でないとき、命題 4-1 より $(*)$ 組 (u^1, u^2) が存在し、 $\varphi(u^1) = \varphi(u^2)$ を満たす。定理 2-5 より $(\Sigma_2 / \sim, \tilde{U})$ は連結である。 $\tilde{\varphi}: (\Sigma_2 / \sim, \tilde{U}) \rightarrow K$ は命

題2-3より連続だから、 K は連結集合の連続像より連結集合である。

(2) $f_1(K) \cap f_2(K) = \{k_0\}$ のとき、(1)b) と同様にして $(*)$ 組 (u^1, u^2) と $\tilde{\varphi}: (\Sigma_2/\sim, \tilde{U}) \rightarrow K$ が存在し、この $\tilde{\varphi}$ が1対1であることを示せば、 $(\Sigma_2/\sim, \tilde{U})$ と K は位相同型といえる。

a) $z \in \Sigma_2$ に対し、 $\varphi(z) = \varphi(u^1)$ ならば、 $q(z) = q(u^1)$ であることを示す。

$z = u^1$ なら明らかなので、 $n_1 \geq 1$ が存在して、 $P_{n_1} z = P_{n_1} u^1$, $z_{n_1+1} \neq u^1_{n_1+1}$ とする。このとき、 $f_{P_{n_1} z} \varphi(\sigma^{n_1} z) = f_{P_{n_1} z} \varphi(\sigma^{n_1} u^1)$ かつ f_1, f_2 は1対1より、 $\varphi(\sigma^{n_1} z) = \varphi(\sigma^{n_1} u^1)$ 即ち、 $\varphi(\sigma^{n_1} u^1) = k_0 = \varphi(u^1)$ である。命題4-1の u^1 の作り方から $P_{n_1} u^1 = \alpha^1 \oplus \cdots \oplus \alpha^1$ である。従って $P_{n_1} z = \alpha^1 \oplus \cdots \oplus \alpha^1$, $(\sigma^{n_1} u^1)_1 = 1$, $(\sigma^{n_1} z)_1 = 2$ である。さらに $\varphi(\sigma^{n_1} z) = \varphi(u^2)$ より $\sigma^{n_1} z = u^2$ ならば $z = \alpha^1 \oplus \cdots \oplus \alpha^1 \oplus u^2$ となり、 $z \in Qu$ より、 $q(z) = q(u^1)$ である。 $n_2 \geq 1$ が存在し、 $P_{n_2}(\sigma^{n_1} z) = P_{n_2}(u^2)$, $(\sigma^{n_1} z)_{n_2+1} \neq u^2_{n_2+1}$ ならば、 $\varphi(\sigma^{n_1} z) = \varphi(u^2)$ より、同様にして、 $P_{n_2}(\sigma^{n_1} z) = P_{n_2}(u^2) = \alpha^2 \oplus \cdots \oplus \alpha^2$ となる。以下、この操作を繰り返し、 $z \in Qu$ となり、 $q(z) = q(u^1)$ である。

b) $z^1, z^2 \in \Sigma_2$ に対し、 $\varphi(z^1) = \varphi(z^2)$ ならば、 $q(z^1) = q(z^2)$ を示す。

$z^1 = z^2$ ならば、明らかなので、 $n_0 \geq 0$ が存在して、 $P_{n_0} z^1 = P_{n_0} z^2$, $z^1_{n_0+1} \neq z^2_{n_0+1}$ とする。このとき、 $f_{P_{n_0} z^1} \varphi(\sigma^{n_0} z^1) = f_{P_{n_0} z^2} \varphi(\sigma^{n_0} z^2)$ かつ f_1, f_2 は1対1より、 $\varphi(\sigma^{n_0} z^1) = \varphi(\sigma^{n_0} z^2)$ である。 $(\sigma^{n_0} z^1)_1 \neq (\sigma^{n_0} z^2)_1$ より、 $\varphi(\sigma^{n_0} z^1) = \varphi(\sigma^{n_0} z^2) = k_0 = \varphi(u^1)$ である。a) より $q(\sigma^{n_0} z^1) = q(\sigma^{n_0} z^2) = q(u^1)$ 即ち $\sigma^{n_0} z^1, \sigma^{n_0} z^2 \in Qu$ である。よって、 $q(z^1) = q(z^2)$ である。

以上より、 $\tilde{\varphi}$ が1対1となり、 $(\Sigma_2/\sim, \tilde{U})$ と K は位相同型である。//

次に $f_1(K) \cap f_2(K)$ が1点 $\{k_0\}$ のみから成るのはどのような場合かを R^2 と同形な複素平面 C 上の写像で考える。

命題 4-3 f_1, f_2 は複素平面 C 上の 1 対 1, 縮小写像とし f_1 は適当な $\gamma, w \in C$ により, $f_1(z) = \gamma \bar{z} + w$ と表されたとする。更に,

$$f_1(K) \cap f_2(K) = \{k_0\}$$

かつ $\text{Fix}(f_1) \neq \text{Fix}(f_2)$ ならば, (u^1, u^2) を $\varphi(u^1) = \varphi(u^2)$ を満たす (*) 組とすると, u^1 は適当な $x \in \Sigma_2$ により,

$$u^1 = (12) \oplus x \quad \text{または} \quad u^1 = (112) \oplus x$$

と表される。

証明 $\varphi: \Sigma_2 \rightarrow K$, $\tilde{\varphi}: (\Sigma_2 / \sim, \tilde{U}) \rightarrow K$ とすると、定理 4-2 (2) より、 $\tilde{\varphi}$ は位相写像だから、定理 2-5 及び系 2 から K は連結かつ局所連結である。 K は完備距離空間より、弧状連結である [3, p. 36]。 u^1, u^2 は適当な $x, y \in \Sigma_2$ により、

$$u^1 = (11 \cdots 1) \oplus (2) \oplus x, \quad u^2 = (2) \oplus y$$

と表されているとする。また $\varphi(u^1) = \varphi(u^2) = k_0$ である。このとき、 $m \geq 3$ と仮定して、矛盾に導く。

$$x^1 = \sum_{i=1}^m (1) \text{ とおく。}$$

a) m が偶数のとき、又は $\gamma \in \mathbb{R}$ のとき、

$\varphi(x^1), \varphi((11) \oplus u^1), \varphi(u^1), \varphi((112) \oplus x), \varphi((2) \oplus x)$ はこの順に一直線上にある。 $\varphi((2) \oplus x)$ と $\varphi(u^1) = \varphi((2) \oplus y)$ は $f_2 K$ 内の点であり、 K が弧状連結より、 $f_2 K$ 内の曲線 C_2 により結ぶことができる。 $f_1^2 C_2$ は $f_1 K$ 内の曲線で $\varphi((112) \oplus x)$ と $\varphi((11) \oplus u^1)$ を結ぶ。 $f_1^2(z) = |\gamma|^2 z + \gamma \bar{w} + w$ より、 $f_1^2 C_2$ と C_2 は交点をもつ、すなわち、 $f_1(K) \cap f_2(K)$ は $\varphi(u^1)$ 以外の点を含むことになり、

$f_1(K) \cap f_2(K) = \{k_0\}$ に矛盾する。

b) $\gamma \notin R$ かつ m が奇数のとき、

$\varphi(x^1), \varphi((1) \oplus u^1), \varphi((112) \oplus x), \varphi((2) \oplus x)$ はこの順に一直線上にあり、
 $\varphi(x^1), \varphi((11) \oplus u^1), \varphi(u^1), \varphi((12) \oplus x)$ はこの順に別の一直線上にある。a) と同様に、 $\varphi((2) \oplus X)$ と $\varphi(u^1) = \varphi((2) \oplus Y)$ は、 f_2K 内の曲線 C_2 により結ぶことができる。 $f_1C_2, f_1^2C_2$ は f_1K 内の曲線でそれぞれ $\varphi((12) \oplus x)$ と $\varphi((1) \oplus u^1), \varphi((112) \oplus x)$ と $\varphi((11) \oplus u^1)$ を結ぶ。 $C_2, f_1C_2, f_1^2C_2$ は相似形より、 C_2 は f_1C_2 又は $f_1^2C_2$ と交り、 $f_1(K) \cap f_2(K) = \{k_0\}$ に矛盾する。よって、
 $f_1(K) \cap f_2(K) = \{k_0\}$ ならば、 $m \leq 2$ である。 //

参考文献

- [1] M. Hata, On the Structure of Self-Similar Sets, Japan J. Appl. Math., 2(1985), 381-414.
- [2] J. E. Hutchinson, Fractals and self-similarity. Indiana Univ. Math. J., 30 (1981), 713-747.
- [3] G. T. Whyburn, Analytic Topology. Amer. Math. Soc. Colloq. Pub., Vol.28, 1942.