

確率微分方程式とその周辺

京大数理研 梶岡成雄 (Shigeo Kusuoka)

◇ 確率微分方程式の入門

確率モデルを数学的に取り扱うには「理想的なノイズ」を考えたことが有用である。理想的なノイズ $N_t, t \geq 0$, は単純に考えると、「確率過程」であって

$$N_{t_1}, \dots, N_{t_n}, \quad n \geq 2, 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

が独立にふるもの」と定義するのと同じように見えるが、実はこれではうまくいかない。このため、数学では普通、その積分にあたるものを考える。もし、 $X_t = \int_0^t N_s ds$ とおくと、これは次の性質を満たすはずである。

- $X_0 = 0$
- X_t は $t \rightarrow \infty$ まで「ある意味で」連続
- $n \geq 2, 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ に対し、 $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, k=1, \dots, n$, は独立

上の3つの条件を満たすものは加法過程と呼ばれ、P. Levy

が詳しく調べた。その構造は「Levy-伊藤の定理」により完全に決定づけられている。その定理を詳しく述べることはできぬが、次の事が本質である。

◎加法過程は Gauss 的 (正規分布) なものと Poisson 的 (Poisson 分布) の 2 つのものに分解される。Gauss 的 なもの の 根元は中心極限定理にあり、Poisson 的 なもの の 根元は Poisson の小数の法則にある。

「Levy-伊藤の定理」より次のことが従う。

。もし加法過程 X_t が確率 1 で $t \rightarrow 0$ について連続であれば、 X_t の分布は正規分布となる。さらに、 X_t の分布が平均 0、分散 t 、 $t > 0$ 、であるならば、そのような加法過程は本質的に一意に定まる。そのような加法過程はブラウン運動と呼ばれる。

さて、確率微分方程式 (SDE) は「理想的ノイズが刻々と加わる常微分方程式」のことである。上で見たように、理想的ノイズには Gauss 的 なものと Poisson 的 なものがあり、共に重要であるが、Poisson 的 ノイズは取り扱いが難しいため、理想的ノイズとして Gauss 的 なもののみを考慮することになる。

Gauss 的 ノイズは本質的にブラウン運動で表わされるため

SDE = 「ブラウン運動の微分がノイズとして刻々と加わる常微分方程式」

と理解されることも多い。

SDE を数学的に厳密に定式化することの最初に成功したのは伊藤清である。彼のコルモゴロフの拡散過程の存在を直観に基づいて示し、これとして SDE に到達した。

コルモゴロフの拡散過程とは「時間変数 t について連続であり、 x の位置 x なる時 $[t, t+dt]$ 間に平均 $b(x)dt$ 、分散 $\sigma(x)^2 dt$ の過去とは独立なノイズが加わる、ような確率過程である。もろくもこれの数学的に厳密な表現ではない。コルモゴロフはこれを解析的な言葉に書き直して表現したが、伊藤の以下のような直接的表現で述べようとした。

先ず $X(t)$ を拡散過程とすると述べたことは

「 $dX(t) = X(t+dt) - X(t)$ は平均が $b(X(t))dt$ 、分散が $\sigma(X(t))^2 dt$ で過去と独立」ということになる。これはまた数学的な表現といえる。しかし、これを書き直すと、

「 $\sigma(X(t))^{-1} (dX(t) - b(X(t))dt)$ は平均が 0、分散が dt で過去と独立」となる。よって、その積分 $Z(t)$ を考えれば

$$Z(t) = \int_0^t \sigma(X(s))^{-1} (dX(s) - b(X(s))ds)$$

は t について連続な加法過程で、平均 0、分散 t となる。このようなものは唯一つ、ブラウン運動しかないので、

$$dZ(t) = \sigma(X(t))^{-1} (dX(t) - b(X(t))dt)$$

を書きかえれば、

$$(*) \quad dX(t) = \sigma(X(t)) dZ(t) + b(X(t))dt,$$

$Z(t)$ はブラウン運動 (μ, σ 既知) とする。これを SDE で
ある。もちろん ここまでは形式的変形で実質はなし。伊藤

は、しかし、これを確率積分方程式

$$(*) \quad X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma(X(s)) dZ(s) + \int_0^t b(X(s)) ds$$

と考へ、 σ と b の確率積分に厳密な定義を与えん。すると、伊藤の公式と呼ばれる交換則を導いた。(確率積分、伊藤の公式等については [] を参照されたい。)

このようにして、伊藤清の直観を直接表現する新しい解析学を導入した。その結果、観念としては考へてはいたが数学的に厳密にできひか、たフィルタ-リ-ングや確率制御といったものゝの数学基礎を与えることになり、た。

◇ 確率微分方程式の応用の一例

文献 [] を参考として、確率制御と数理経済学との関わりを見ていく。今、Bond と Stock の 2 つの金融財のポートフォリオの問題を考へる。設定は以下の通りである。

P_t : Stock の価格

r : risk free rate = Bond の利率

μ : expected return on stocks in excess of the risk free rate ($r + \mu$ が stock の「利率の期待値」)

σ : volatility of stock returns

この時 P_t は次の確率微分方程式に従うことになる。

$$dP_t = (r + \mu) P_t dt + \sigma P_t dz_t$$

ただし、ここで z_t は ブラウン運動。さらに

S_t : value of the stock portfolio at time t

B_t : value of the bond portfolio at time t

$$W_t = (1-s) S_t + B_t$$

: liquidation value of the fund at time t

b : comission on stock purchases

(1ドルの stock を $(1+b)$ ドルで買える)

s : comission on stock sales

(1ドルの stock を $(1-s)$ ドルで売れる)

この時 t まで何もしなければ S_t, B_t の満たす方程式は

$$\begin{cases} dS_t = (r + \mu) S_t dt + \sigma S_t dz_t \\ dB_t = r B_t dt \end{cases}$$

である。時刻 t までに得る情報の $\mathcal{F}_t = \sigma \{ z_s, 0 \leq s \leq t \}$ と

与えられるが、それに基づいて時刻 t に dL_t ドルの stock

を買い、 dM_t ドルの stock を売るという行動をとれる。 $S_t,$

B_t の満たす方程式は

$$(1) \quad \begin{cases} dS_t = (r + \mu) S_t dt + \sigma S_t dz_t + dL_t - dM_t \\ dB_t = r B_t dt - (1+b) dL_t + (1-s) dM_t \end{cases}$$

となる。ここで L_t, M_t は単調非減で \mathcal{F}_t -可測でなくては

ならない。さらに、破産をしてはならないという制約条件

$$(2) \quad W_t = B_t + (1-s)S_t \geq 0 \quad a.e.$$

を加えろ。今、開始時刻を T_0 、終了時刻 T_1 とし、初期条件 $B_{T_0} = B$ 、 $S_{T_0} = S$ の下で、(1)、(2)が $t \in [T_0, T_1]$ で成立する ような可能な行動 (L, M) の全体を $\mathcal{A}(T_0, T_1, B, S)$ とする。

効用関数 $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$(3) \quad u(W) = \frac{1}{1-A} \cdot W^{1-A}$$

(ただし $A > 0$ 、 $A \neq 1$) で与えることにする。この時、問題の期待効用

$$J(B, S, T_0, T_1, L, M) = E \left[u(B_{T_1} + (1-s)S_{T_1}) \right]$$

を最大にする (L, M) を求めることにする。

今、 $V(B, S, T_0, T_1)$

$$= \sup \{ J(B, S, T_0, T_1, L, M) ; (L, M) \in \mathcal{A}(T_0, T_1, B, S) \}$$

とおく。与えられた問題は確率制御の問題の一つであり、動的計画法における Bellman の原理が適用可能であることが知られてゐる。よ、この問題をすべての $B, S \in \mathbb{R}$ 、 $T_0 < T_1$ に対して $V(B, S, T_0, T_1)$ を求めることに帰着する。

残念なことに [] の問題は完全に解けてゐない。しかし次のような興味深い事実が示されてゐる。

まず方程式 (1) は本質的に線型であることに注意する。

よ、この効用関数 u の $(1-A)$ 次同次性より

$$V(cB, cS, T_0+T, T_1+T) = c^{1-A} V(B, S, T_0, T_1)$$

($C > 0$, $T \in \mathbb{R}$) をあかす。よ、て

$$V(t, x) = V(1, x, 0, t) \quad \text{とおくと、}$$

$$V(B, S, T_0, T_1) = |B|^{1-A} V(T_1 - T_0, \frac{S}{|B|})$$

となるので、変数を二変数までに減らせた。実は $V(t, x)$ は時間発展の非線型方程式を満たすか、その形は後推るので省略する。[]でのその非線型方程式の固有関数解を求め、それにより、一般解を評価することあかされている。

ここで与えられた確率制御の問題は数学的におもしろい問題である。今後、我国の確率論研究者が経済学に興味をも、て経済学と数学との交流が確率解析の分野において盛んになることを願っている。

参考文献

- [1] Fleming, W.H., Grossman, S.G., Vila, J-L, and Zariphopoulous, T., Optimal Portfolio Rebalancing with Transaction Costs, submitted to *Econometrica*
- [2] 楠岡成雄, 確率解析 その思想的発展, 数理科学 No. 340 11月号 (1991), p.5-9.