数理解析研究所講究録
第 791 巻 1992 年 161-174

補外法と特異不動点問題

長崎総合科学大　長田直樹 (Naoki Osada)

1. はじめに

$E=\boldsymbol{R}^N$または$\boldsymbol{C}^N$とし，$G:E\rightarrow E$とする．$N=1$の場合のGの不動点を求めるAitken-Steffensen 公式は，$N>1$の場合に以下のようにして拡張できる:kを自然数とし，$T:E^{k+1}\rightarrow E$とする．初期値$y^0\in E$を選ぶ．各$n=0,1,\ldots,$に対し，$s^0=y^n$，$s^{i+1}=G(s^i)$ $(i=0,\ldots,k-1)$とし，$y^{n+1}=T(s^0,\ldots,s^k)$とおく．ベクトル列$(y^n)$を，$T$に関するSteffensen 型反復列と呼ぶ．$T$として，連立方程式に対するSteffensen 変換 (Henrici[6, p.116])，ベクトルϵ算法 (Brezinski[1], Gekeler[5]) および最小多項式補外 (Skelboe[16]) などが取り上げられている．Gが不動点x^*の近傍で Fréchet 微分可能でG'が Lipschitz 条件を満たし，$I-G'(x^*)$が正則，初期値y^0がx^*に十分近く，各nに対し，$T(s^n,\ldots,s^{n+k})$が定義出来れば，Steffensen 型反復列(y^n)は，$\|y^{n+1}-x^*\|=O(\|y^n-x^*\|^2)$を満たす ([8][9][17])．

$I-G'(x^*)$が特異なとき，$x=G(x)$を特異不動点問題と呼ぶ．$N=1$の場合，すなわち$G'(x^*)=1$のときは，3つの方法が考えられている:

(i) $x^{n+1}=G(x^n)$によって生成される数列(x^n)は，Gがある種の条件を満たすときには，x^n-x^*は漸近列$\{(\log n)^\alpha/n^\beta\}$に関する漸近展開で表せる．そこで，$(x^n)$に修正$\epsilon$算法，修正Aitken δ^2法，θ算法や Lubkin のW変換などを適用する (Sablonnière[13,14], Sedogbo[15])．

(ii) Aitken-Steffensen 反復列は線型収束するので，もう一度 Aitken-Steffensen 反復を行う．(Ostrowski[12], 伊理[7])

(iii) 修正 Aitken δ^2法を用いて Steffensen 型反復列を作る．(Sablonnière[14])

本論文では，$N\geq 1$の場合の特異不動点問題の反復列の漸近的性質と，補外法の適用について述べ，数値例による比較を行う．

2. 反復列の漸近的性質

2.1. $E=\boldsymbol{R}$のとき

Sablonnière は de Bruijn[3]の結果を用いて，次の定理を与えた[13].

定理 $G(x)$は

$$G(x)\sim x+\sum_{j=2}^{\infty}c_j(x-x^*)^j$$

を満たし，数列(x^n)が$x^{n+1}=G(x^n)$によって生成されるとき，以下が成立する．

(i) $c_2<0, c_3=c_2^2$のとき

$$x^n-x^*=-\frac{1}{c_2 n}+O(\frac{1}{n^2}).$$

(ii) $c_2<0, c_3\neq c_2^2$のとき

$$x^n-x^*=-\frac{1}{c_2 n}+\frac{1}{c_2}\left(1-\frac{c_3}{c_2^2}\right)\frac{\log n}{n^2}+O(\frac{1}{n^2}).$$

(iii) $c_2=0, c_3<0$のとき

$$x^n-x^*=\sqrt{-\frac{1}{2c_3}}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{c_4}{2c_3^2}\frac{1}{n}+\frac{a_3\log n}{n\sqrt{n}}+O(\frac{1}{n\sqrt{n}}),$$

ここで,

$$a_3 = -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+\frac{c_4^2}{c_3^3}-\frac{c_5}{c_3^2}\right)\sqrt{-\frac{1}{2c_3}}.$$

(iv) $c_2 = \cdots = c_p = 0, c_{p+1} < 0$ のとき

$$x^n - x^* = O(n^{-1/p}).$$

2.2. $E = \boldsymbol{R}^N (N > 1)$ のとき

自然数 $i\,(1 \le i \le N)$ が存在して，x^* に十分近い x に対し,

$$\|G(x)-x^*\|_\infty = |(G(x)-x^*)_i|$$

で $(G(x)-x^*)_i$ が定符号かつ

$$(G(x)-x^*)_i \sim (x-x^*)_i + \sum_{j=2}^{\infty} c_j (x_i - x_i^*)^j$$

が満たされているときは，反復列 $x^{n+1} = G(x^n)$ に対し，Sablonnière の定理が適用できる．ここで，$x \in E$ に対し，x_i は x の第 i 成分を表す．

2.3. $E = \boldsymbol{C}^N (N > 1)$ のとき

$x \in E$ に対し,

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le N}\{|\mathrm{Re}\, x_i|, |\mathrm{Im}\, x_i|\} \quad (\boldsymbol{R}^{2N} \text{の最大値ノルム})$$

と定義する．自然数 $i\,(1 \le i \le N)$ が存在して，x^* に十分近い x に対し,

$$\|G(x)-x^*\|_\infty = |\mathrm{Re}(G(x)-x^*)_i| \quad [\,|\mathrm{Im}(G(x)-x^*)_i|\,]$$

かつ $\mathrm{Re}(G(x)-x^*)_i$ $[\mathrm{Im}(G(x)-x^*)_i$, resp.$]$ が定符号で

$$\mathrm{Re}(G(x)-x^*)_i \sim \mathrm{Re}(x-x^*)_i + \sum_{j=2}^{\infty} c_j (\mathrm{Re}(x_i - x_i^*))^j$$

$$[\mathrm{Im}(G(x)-x^*)_i \sim \mathrm{Im}(x-x^*)_i + \sum_{j=2}^{\infty} c_j (\mathrm{Im}(x_i - x_i^*))^j \text{, resp.}]$$

を満たすときにも Sablonnière の定理が適用できる．

3. 特異非線型方程式に対する簡易 Newton 法

特異不動点問題の重要な例として，特異非線型方程式に簡易 Newton 法を適用して得られる反復がある．

$F:\boldsymbol{R}^N\to\boldsymbol{R}^N$は，零点$x^*$の近傍でFréchet微分可能とし，$\det F'(x^*)=0$と仮定する．$x^*$に十分近い出発値$x^0$ ($F'(x^0)$ は正則) をとり，簡易Newton法

$$x^{n+1}=x^n-F'(x^0)^{-1}F(x^n)$$

による反復を考える．

$$G(x)=x-F'(x^0)^{-1}F(x)$$

と置くと

$$G'(x)=I-F'(x^0)^{-1}F'(x)$$

より，$I-G'(x^*)$ は特異になる．このとき，$G'(x^0)=0$ が成立している．
逆に，特異不動点問題 $x=G(x)$ が，$G'(x^0)=0$ を満たすとき，

$$F(x)=x-G(x)$$

と置くと，簡易Newton法は，

$$x^{n+1}=x^n-F(x^n)=G(x^n)$$

となる．
(x^n) の誤差評価については，[4]を見よ．

4. 特異不動点問題に対する補外法

$E=\boldsymbol{R}^N$または$\boldsymbol{C}^N$とし，$G:E\to E$，$T_n:E^{n+1}\to E$とする．kはGとx^0と(x^n)によって定まる自然数とし，$T=T_k$とおく．Gが不動点x^*の近傍でFréchet微分可能で，$I-G'(x^*)$が特異と仮定する．$N=1$の場合の自然な拡張として，Gの不動点$x^*=G(x^*)$を求める3つの算法を考える．

算法 I. $x^{n+1}=G(x^n)$ によって生成されるベクトル列 (x^n) を，T_nにより加速する．

```
n := 0;
{ read x^0 };
y^0 := x^0;
repeat
  n := n + 1;
  x^n := G(x^{n-1});
  y^n := T_n(x^0, ..., x^n);
until  |y^n - y^{n-1}| < ε;
```

算法 II. Tに関するSteffensen型反復を2重に適用する．

```
n := 0;
{ read y^0 };
repeat
  n := n + 1;
  t^0 := y^{n-1};
  for i := 1 to k do
  begin
    s^0 := t^{i-1};
```

$$\begin{aligned}
&\quad\quad \textbf{for } j := 1 \textbf{ to } k \textbf{ do } s^j := G(s^{j-1});\\
&\quad\quad t^i := T(s^0, \ldots, s^k);\\
&\quad \textbf{end}\\
&\quad y^n := T(t^0, \ldots, t^k);\\
&\textbf{until} \quad |y^n - y^{n-1}| < \epsilon;
\end{aligned}$$

算法 III. Steffensen 型反復列 (y^n) を T_n により加速する.

$$\begin{aligned}
&n := 0;\\
&\{ \text{ read } y^0 \};\\
&z^0 := y^0;\\
&\textbf{repeat}\\
&\quad n := n + 1;\\
&\quad s^0 := y^{n-1};\\
&\quad \textbf{for } i := 1 \textbf{ to } k \textbf{ do } s^i := G(s^{i-1});\\
&\quad y^n := T(s^0, \ldots, s^k);\\
&\quad z^n := T_n(y^0, \ldots, y^n);\\
&\textbf{until} \quad |z^n - z^{n-1}| < \epsilon;
\end{aligned}$$

Tとして，算法 I では，ある種の対数収束列に対し有効に働く加速法をとり，算法 II と III では，Steffensen 型反復列が線型収束し，かつ線型収束列に有効に作用する補外法を用いる．$N = 1$ の場合，前者の加速法としては，Levin u, v変換，Lubkin の W変換，θ算法，ρ算法，一般化ρ算法，修正ϵ算法，修正 Aitken δ^2法などが該当する．後者の加速法としては，Aitken δ^2法，ϵ算法，Levin t 変換などが該当する．$N > 1$ の場合は，上記の加速法をベクトル列に拡張した加速法が該当する．これらの補外法のうち，一般化ρ算法，修正ϵ算法，修正 Aitken δ^2法は，反復列の漸近展開についての情報を必要とするので，本論文では取り上げない．

5. 数値例

反復列の漸近的性質が決定 (あるいは推定) できる特異不動点問題を用いて，前節で述べた 3 つの算法の比較を行う．適用する補外法は，算法 I(ρ算法，W変換，Levin v変換)，算法 II(ϵ算法) および算法 III(ϵ算法) である．算法 II,III の kは次のように決める．$N = 1$ のときは，$k = 2$ とし，例 2,5,6 のときは $k = 4$, 例 3 については算法 II は $k = 4$, 算法 III は $k = 2$ とする．$N > 1$ の場合のρ算法，W変換，Levin v変換，ϵ算法はそれぞれ，ベクトルρ算法 (VRA)[10]，ベクトル W変換 (VWT)[10]，ベクトル Levin v変換 (VLV)[11]，位相的ϵ算法 (TEA)[2]である．

例 1.　$E = \boldsymbol{R}$ の特異不動点問題

$$G(x) = x - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(x-1)^3, \quad x_0 = 2$$

を考える．Sablonnière の定理より，

$$x_n = 1 + \frac{2}{n} + O(\frac{1}{n^2}).$$

例 2.　$E=\boldsymbol{R}^2$ の特異不動点問題

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 2x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{20}x + y^3 - \frac{7}{2}y^2 + \frac{21}{5}y - \frac{49}{40} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.25 \end{pmatrix},$$

を考える．$x_n - 1 = 2(y_n - 1)$ だから，2.2 より，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + O\left[\frac{1}{n^2}\right],$$

となる．ここで，$a_n \in \boldsymbol{R}$ $(a_n \to 0)$ に対し，$O[a_n]$は，$\|O[a_n]\| = O(a_n)$ を満たす Eの元を表す．

例 3.　$E=\boldsymbol{C}^2$ の特異不動点問題

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2(y - 2 - \frac{i}{2})^2 + \frac{1}{4}(x - 1 - i)^3 \\ y - \frac{1}{4}(x - 1 - i)^2 + (y - 2 - \frac{i}{2})^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2i \\ 2.5 + i \end{pmatrix},$$

を考える．$x_n - 1 - i = 2(y_n - 2 - \frac{i}{2})$ で $|\mathrm{Re}\,(x_n - 1)| > |\mathrm{Im}\,(x_n - i)|$ だから，2.3 より，

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, x_n \\ \mathrm{Re}\, y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + O\left[\frac{1}{n^2}\right],$$

となる．

例 4. ([7])　$E=\boldsymbol{R}$ の特異不動点問題 $G(x) = 2\sqrt{x-1}$,　$x_0 = 4$ を考える．

$$G(x) = x - \frac{1}{4}(x-2)^2 + \frac{1}{8}(x-2)^3 + O((x-2)^4)$$

だから，Sablonnière の定理より，

$$x_n = 2 + \frac{4}{n} + \frac{4\log n}{n^2} + O(\frac{1}{n^2}).$$

例 5.　$E=\boldsymbol{R}^2$ の特異不動点問題

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}y - 1 \\ \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}y^2 + \frac{6}{5}y - \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.25 \end{pmatrix},$$

を考える．$x_n - 1 = 2(y_n - 1)$ だから，2.2 より，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\log n}{n^2}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + O\left[\frac{1}{n^2}\right],$$

となる．

例 6. 特異連立非線型方程式を簡易 Newton 法で解く.

$$\begin{cases} xy + y^2 - 3y + 1 = 0 \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0 \\ x + z^2 - 2z = 0 \end{cases}$$

初期値を $(x_0, y_0, z_0)^T = (1.1, 1.5, 2.0)^T$ とすると，反復は

$$G\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{348}\begin{pmatrix} -110x^2 + 440x + 100xy - 10y^2 - 80y - 340 \\ 150x^2 - 600x + 180xy + 330y^2 - 840y + 780 \\ 55x^2 - 46x - 50xy + 5y^2 + 40y + 174z^2 - 348z + 170 \end{pmatrix}$$

により与えられる. Decker and Kelley[4]の結果より

$$|z_n - 1| = O(|y_n - 1|), \quad |x_n - 1| = O(|z_n - 1|^2)$$

となる. さらに，数値実験より

$$\|(x_n, y_n, z_n)^T\|_\infty = z_n - 1$$

$$z_n = 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2 \log n}{n^2} + O(\frac{1}{n^2})$$

が予想される.

例 7.　$E = \boldsymbol{R}$ の特異不動点問題

$$G(x) = x - \frac{1}{2}(x-1)^3, \quad x_0 = 2$$

を考える. Sablonniere の定理より,

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{3}{8}\frac{\log n}{n\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}}).$$

計算は，桁落ちと丸め誤差の影響を少なくするため 4 倍精度 (10 進約 33 桁) で行った. $G(x)$ の計算回数 n と有効桁数

$$-\log_{10} \|x^n - x^*\|_\infty$$

を表 1 ～ 7 に与える. 比較のため，表 1-1～表 7-1 に倍精度 (10 進約 16 桁) による計算結果も与える.

表 1. 例 1 の有効桁数 (4 倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		ρ alg	W	Levin v	ϵ alg	ϵ alg
4	0.42	0.42	0.42	0.81	1.20	1.20
8	0.66	4.39	2.74	2.73	3.04	2.92
12	0.82	8.22	5.58	5.92	6.67	5.17
16	0.93	12.67	9.36	8.07	13.95	7.95
20	1.02	16.07	10.99	11.79		11.28
24	1.10	20.55	10.98	16.03		15.17
28	1.16	20.25	13.82	17.99		19.63
32	1.22	20.62	13.93	17.17		21.94
36	1.27	21.10	13.93	17.30		21.15
40	1.31	20.59	13.93	16.27		21.66
44	1.35	21.03	14.26	16.29		21.62
48	1.39	19.88	14.26	16.84		22.01
52	1.42	20.06	14.26	16.95		21.02
56	1.46	20.54	14.26	16.46		20.51
60	1.49	20.87	14.96	16.36		20.16

表 1-1. 例 1 の有効桁数 (倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		ρ alg	W	Levin v	ϵ alg	ϵ alg
4	0.42	0.42	0.42	0.81	1.20	1.20
8	0.66	4.39	2.74	2.73	3.04	2.92
12	0.82	8.22	5.58	5.29	6.67	5.17
16	0.93	11.19	7.97	7.24		7.95
20	1.02	10.82	7.70	7.00		8.81
24	1.10	11.24	7.75	6.93		8.09
28	1.16	10.85	7.74	7.06		8.60
32	1.22	10.90	6.49			9.63
36	1.27	11.05	6.49			
40	1.31	10.13	6.49			
44	1.35	10.24	6.49			
48	1.39	10.21	6.49			
52	1.42	10.72	7.54			
56	1.46	9.85	7.54			
60	1.49	11.20	7.54			

表 2. 例 2 の有効桁数 (4 倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		VRA	VWT	VLV	TEA	TEA
4	0.59	1.99	1.52	1.52		1.04
8	0.77	5.69	3.70	2.98		1.79
12	0.90	9.84	6.64	7.16		2.95
16	0.99	14.30	10.87	8.92	3.92	3.92
20	1.07	18.36	10.97	12.00		5.68
24	1.14	19.87	13.88	18.34		3.85
28	1.20	19.20	13.93	17.47		3.87
32	1.25	20.53	14.26	16.07	9.64	5.25
36	1.30	20.07	14.26	15.68		7.99
40	1.34	20.73	14.26	15.64		8.59
44	1.38	19.43	14.72	15.40		11.40
48	1.41	20.05	14.72	15.49	11.61	12.29
52	1.44	20.24	14.72	15.64		13.19
56	1.47	20.59	14.97	15.42		16.04
60	1.50	20.07	15.48	15.64		17.23

表 2-1. 例 2 の有効桁数 (倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		VRA	VWT	VLV	TEA	TEA
4	0.59	1.99	1.52	1.52		1.04
8	0.77	5.69	3.70	2.98		1.79
12	0.90	9.56	6.64	7.17		2.95
16	0.99	9.98	7.41	7.12	2.52	2.52
20	1.07	10.48	7.21	8.10		2.69
24	1.14	11.37	7.21	6.66		4.98
28	1.20	10.52	6.29	7.55		4.71
32	1.25	10.25	6.29	6.20	6.50	6.16
36	1.30	9.83	6.91			7.64
40	1.34	9.99	6.91			6.94
44	1.38	10.54	7.17			6.97
48	1.41	10.51	7.17		6.49	6.89
52	1.44	10.50	7.46			6.88
56	1.47	9.96	7.24			6.98
60	1.50	9.60	7.24			6.88

表 3. 例 3 の有効桁数 (4 倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		VRA	VWT	VLV	TEA	TEA
4	0.44	1.41	0.76	0.76		0.69
8	0.66	4.55	2.81	2.23		2.08
12	0.82	8.38	5.68	3.66		3.94
16	0.93	12.74	10.30	5.64	3.29	6.32
20	1.02	16.68	11.41	8.01		9.26
24	1.10	20.82	13.62	10.72		12.76
28	1.16	19.82	14.12	13.34		16.83
32	1.22	20.15	14.10	15.17	9.27	21.76
36	1.27	20.04	14.26	14.85		21.63
40	1.31	20.25	14.26	15.14		20.91
44	1.35	20.94	14.25	14.52		21.63
48	1.39	19.53	14.25	14.26	12.17	21.01
52	1.42	20.13	14.25	13.82		21.73
56	1.45	20.30	14.25	14.23		21.31
60	1.48	20.52	14.25	15.17		21.06

表 3-1. 例 3 の有効桁数 (倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		VRA	VWT	VLV	TEA	TEA
4	0.44	1.41	0.76	0.76		1.18
8	0.66	4.55	2.81	2.23		2.08
12	0.82	8.38	5.68	3.66		3.94
16	0.93	9.73	7.53	5.61	3.29	6.32
20	1.02	10.56	7.34	6.04		8.72
24	1.10	10.35	7.89	6.16		7.79
28	1.16	10.55	7.27	6.05		9.04
32	1.22	9.79	6.19	5.64	6.86	8.07
36	1.27	10.37	6.81			8.86
40	1.31	10.05	6.80			8.88
44	1.35	10.17	7.47			8.59
48	1.39	10.25	6.84			5.31
52	1.42	10.14	7.06			5.34
56	1.45	10.12	7.31			5.35
60	1.48	9.91	7.31			5.43

表 4. 例 4 の有効桁数 (4 倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		ρ alg	W	Levin v	ϵ alg	ϵ alg
4	0.11	1.09	1.19	1.19	0.92	0.92
8	0.34	2.73	3.33	2.76	2.66	2.07
12	0.49	4.03	5.72	4.12	6.04	4.15
16	0.60	4.82	6.82	5.27	12.81	6.91
20	0.70	5.24	6.93	4.66		10.33
24	0.77	5.60	6.93	6.51		14.40
28	0.84	4.70	6.93	6.90		19.10
32	0.90	6.02	6.93	7.18		22.20
36	0.95	6.11	11.63	7.42		22.63
40	0.99	6.21	11.64	7.61		21.83
44	1.03	6.16	12.29	7.78		21.37
48	1.07	6.24	12.29	7.93		21.39
52	1.11	6.29	12.29	7.95		21.98
56	1.14	5.93	12.64	8.01		20.52
60	1.17	6.45	12.64	8.37		18.93

表 4-1. 例 4 の有効桁数 (倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		ρ alg	W	Levin v	ϵ alg	ϵ alg
4	0.11	1.09	1.19	1.19	0.92	0.92
8	0.34	2.73	3.33	2.76	2.66	2.07
12	0.49	4.03	5.73	4.12	6.04	4.15
16	0.60	3.86	7.46	5.27		6.91
20	0.70	4.66	9.31	4.66		8.76
24	0.77	4.93	7.51	5.17		8.00
28	0.84	4.98	7.47	5.39		8.29
32	0.90	4.72	5.46	5.09		9.03
36	0.95	4.79	5.46			7.35
40	0.99	4.78	5.46			7.16
44	1.03	5.14	5.19			
48	1.07	5.00	4.96			
52	1.11	5.01	4.96			
56	1.14	4.73	5.19			
60	1.17	5.16	5.19			

表 5. 例 5 の有効桁数 (4 倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		VRA	VWT	VLV	TEA	TEA
4	0.49	1.74	1.56	1.56		0.85
8	0.62	3.27	3.49	2.64		2.03
12	0.72	4.18	6.12	4.10		3.04
16	0.80	4.85	7.65	5.11	4.01	4.01
20	0.87	5.36	9.17	5.87		6.02
24	0.92	5.58	12.32	6.43		3.97
28	0.97	5.74	12.32	6.83		4.13
32	1.02	5.88	12.25	7.13	10.22	4.43
36	1.06	6.00	12.09	7.37		8.90
40	1.10	6.11	12.23	7.57		9.50
44	1.13	6.20	12.14	7.74		10.11
48	1.16	6.12	12.57	7.89	10.82	13.66
52	1.19	6.19	12.57	8.00		14.56
56	1.22	6.26	12.60	8.02		17.87
60	1.24	6.32	11.43	8.39		17.89

表 5-1. 例 5 の有効桁数 (倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		VRA	VWT	VLV	TEA	TEA
4	0.49	1.74	1.56	1.56		0.85
8	0.62	3.27	3.49	2.64		2.03
12	0.72	4.19	5.81	4.10		3.04
16	0.80	4.38	6.27	5.05	2.30	2.30
20	0.87	4.67	6.23	5.12		2.50
24	0.92	4.46	4.78	5.05		4.94
28	0.97	4.85	4.65	5.01		5.05
32	1.02	4.88	4.81	5.30	6.46	6.12
36	1.06	4.77	4.88			7.74
40	1.10	4.86	4.88			7.94
44	1.13	4.58	5.30			7.52
48	1.16	4.99	5.14		6.46	7.27
52	1.19	4.72	5.30			7.63
56	1.22	5.11	5.53			8.65
60	1.24	5.21	5.65			5.76

表 6. 例 6 の有効桁数 (4 倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		VRA	VWT	VLV	TEA	TEA
4	0.59	1.50	1.04	0.59		0.79
8	0.79	2.69	3.00	3.38		1.28
12	0.92	3.86	3.79	4.68		1.53
16	1.02	4.60	5.91	5.59	2.38	2.38
20	1.10	5.09	6.24	6.27		3.24
24	1.17	5.37	6.74	6.80		3.88
28	1.22	5.73	7.90	7.18		4.50
32	1.28	6.04	7.93	7.47	5.69	5.11
36	1.32	6.18	8.05	7.70		6.17
40	1.36	6.30	8.04	7.90		7.91
44	1.40	6.41	8.61	8.07		8.08
48	1.43	6.50	8.82	8.21	10.09	8.91
52	1.46	6.42	8.82	8.32		9.81
56	1.49	6.49	8.77	8.33		10.72
60	1.52	6.56	9.13	8.40		11.62

表 6-1. 例 6 の有効桁数 (倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		VRA	VWT	VLV	TEA	TEA
4	0.59	1.50	1.04	0.59		0.79
8	0.79	2.69	3.00	3.38		1.28
12	0.92	3.86	3.79	4.68		1.53
16	1.02	4.60	5.89	5.59	2.38	2.38
20	1.10	4.83	6.19	5.90		3.24
24	1.17	5.03	6.23	5.80		3.88
28	1.22	5.12	4.87	5.57		4.50
32	1.28	4.91	5.05	5.77	5.69	5.11
36	1.32	4.98	5.05			6.17
40	1.36	4.74	5.27			8.37
44	1.40	4.83	5.27			7.91
48	1.43	5.24	5.46		5.71	7.07
52	1.46	5.27	5.46			6.38
56	1.49	5.02	5.72			6.97
60	1.52	5.09	5.72			6.82

表 7. 例 7 の有効桁数 (4 倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		ρ alg	W	Levin v	ϵ alg	ϵ alg
4	0.44	0.80	0.64	0.64	0.67	0.67
8	0.54	1.13	2.50	2.69	2.29	1.98
12	0.60	1.43	5.28	3.92	7.13	4.02
16	0.65	1.58	6.70	4.73		6.70
20	0.69	1.70	6.74	5.29		10.05
24	0.73	1.84	7.03	5.76		14.07
28	0.76	1.92	7.03	6.09		18.78
32	0.78	2.00	7.03	6.33		20.74
36	0.81	2.03	9.80	6.52		20.22
40	0.83	2.06	9.80	6.69		20.70
44	0.84	2.09	9.80	6.96		19.41
48	0.86	2.12	9.80	6.96		19.41
52	0.88	2.10	10.15	7.07		18.94
56	0.89	2.12	10.15	7.07		19.44
60	0.91	2.14	10.15	7.11		19.00

表 7-1. 例 7 の有効桁数 (倍精度)

n	Base	Algorithm I			Alg II	Alg III
		ρ alg	W	Levin v	ϵ alg	ϵ alg
4	0.44	0.80	0.64	0.64	0.67	0.67
8	0.54	1.13	2.50	2.69	2.29	1.98
12	0.60	1.43	5.28	3.92	6.35	4.02
16	0.65	1.58	6.13	4.70		6.70
20	0.69	1.64	5.81	4.72		8.47
24	0.73	1.69	5.83	4.73		8.53
28	0.76	1.66	6.16	4.70		8.48
32	0.78	1.69	5.97	4.52		8.01
36	0.81	1.71	5.97			8.00
40	0.83	1.79	4.51			8.01
44	0.84	1.66	4.51			8.48
48	0.86	1.77	4.51			8.53
52	0.88	1.70	4.51			8.47
56	0.89	1.80	4.51			6.70
60	0.91	1.82	4.51			8.37

6. 結論

Sablonnière の定理の条件 (i) を満たす問題に対しては，ρ算法の族を用いた算法 I とϵ算法の族を用いた算法 III が著効．条件 (ii)(iii)(iv) を満たす問題に対しては，ϵ算法の族を用いた算法 III が最良である．算法 II は補外効果はあるが，桁落ちの影響が大きい．算法 III では例 6 を除いて，4 倍精度で計算すると倍精度で計算した際の 2 倍またはそれ以上の有効桁数が得られる．

N次元の特異反復列の漸近挙動についての定理，算法 I~III の丸め誤差解析，算法 II,III の収束定理は今後の課題である．

引用文献

[1] C. Brezinski, Application de l'ϵ-algorithme à la résolution des systèmes non linéaires, C.R.Acad.Sc.Paris, t.271(1970), Série A 1174–1177.

[2] C. Brezinski, Généralisations de la transformation de Shanks, de la table de Padé et de l'ϵ-algorithme, Calcolo 12(1975), 317–360.

[3] N. G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis* (Dover Publ., New York, 1981).

[4] D. W. Decker and C. T. Kelley, Sublinear convergence of the chord method at singular points, Numer. Math. 42(1983), 147–154.

[5] E. Gekeler, On the solution of systems of equations by the epsilon algorithm of Wynn, Math. Comp. 26(1972), 427–436.

[6] P. Henrici, *Elements of Numerical Analysis* (John Wiley and Sons, New York, 1964).

[7] 伊理正夫，数値計算 (朝倉書店，1981).

[8] Kh. Jbilou and H. Sadok, Some results about vector extrapolation methods and related fixed-point iterations, J. Comp. Appl. Math. 36(1991), 385–398.

[9] T. Noda, The Steffensen iteration method for systems of nonlinear equations. II, Proc. Japan Acad. 63 Ser. A (1987), 186–189.

[10] N. Osada, Acceleration methods for vector sequences, J. Comp. Appl. Math. 38(1991), 361–371.

[11] N. Osada, Extensions of Levin's transformations to vector sequences, Numer. Algorithms (to appear).

[12] A.M. Ostrowski, *Solution of equations and systems of equations, 2nd ed.* (Academic Press, New York, 1966).

[13] P. Sablonnière, Convergence acceleration of logarithmic fixed point sequences, J. Comp. Appl. Math. 19(1987), 55–60.

[14] P. Sablonnière, Comparison of four algorithms accelerating the convergence of a subset of logarithmic fixed point sequences, Numer. Algorithms 1(1991), 177–198.

[15] G.A. Sedogbo, Convergence acceleration of some logarithmic sequences, J. Comp. Appl. Math. 32(1990), 253–260.

[16] S. Skelboe, Computation of the periodic steady-state response of nonlinear networks by extrapolation methods, IEEE Trans. Circuits and Systems 27(1980), 161–175.

[17] D. A. Smith, W. F. Ford and A. Sidi, Extrapolation methods for vector sequences, SIAM Rev. 29(1987), 199–233.