数理解析研究所講究録
第 791 巻 1992 年 158-160

第 2 種 $Mathieu$ 関数 $fe_m(z,q), ge_m(z,q)$ の計算について

富士通・沼津工場・PP事業部第4開発部　山下眞一郎 (Shin-ichiro Yamashita)

$Helmholtz$ の偏微分方程式を楕円座標を用いて変数分離して得られる方程式

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (\lambda - 2q\ \cos 2z)y = 0 \tag{1}$$

を $Mathieu$ の微分方程式と言う。λ は分離定数であり，q はパラメータである。(1) 式を満足する周期関数を第 1 種 $Mathieu$ 関数と言う。2 階の微分方程式は 2 つの独立な関数を満足するから第 1 種 $Mathieu$ 関数に対するもう 1 つの関数を第 2 種 $Mathieu$ 関数と言う。これは周期関数ではない。周期関数と成る為には，分離定数 λ を適当に選ばねばならない。$Mathieu$ 関数の計算の難関は，第 1 に，この固有値の計算にある。固有値の計算は参考文献 [1] で述べたうに，区分的最良近似式による。第 1 種 $Mathieu$ 関数をフーリエ級数に展開すると

$$ce_{2n}(z,q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k}\cos(2k)z \tag{2}$$

$$ce_{2n+1}(z,q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}\cos(2k+1)z \tag{3}$$

$$se_{2n+2}(z,q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+2}\sin(2k+2)z \tag{4}$$

$$se_{2n+1}(z,q) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k+1}\sin(2k+1)z \tag{5}$$

と表される。(2) ~ (5) を (1) に代入すると，次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} &A_2 = V_0A_0\ ;A_4 = V_2A_2 - 2A_0 \\ &\quad A_{2k+2} = V_{2k}A_{2k} - A_{2k-2}\ ;\ k = 2,3,4,\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &A_3 = (V_1 - 1)A_1 \\ &\quad A_{2k+1} = V_{2k-1}A_{2k-1} - A_{2k-3}\ ;\ k = 2,3,4,\cdots \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &B_0 = 0\ ;B_4 = V_2B_2 \\ &\quad B_{2k+2} = V_{2k}B_{2k} - B_{2k-2}\ ;\ k = 2,3,4,\cdots \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &B_3 = (V_1 + 1)B_1 \\ &\quad B_{2k+1} = V_{2k-1}B_{2k-1} - B_{2k-3}\ ;\ k = 2,3,4,\cdots \end{aligned} \tag{9}$$

ここに，$V_k = (\lambda - k^2)/q$

さらに (6) から係数 A_{2k} を消去する。その為に $R_k = A_{k+2}/A_k$ と置き，次のよう消去する。

$$R_0 = A_2/A_0 = V_0\ ;\ R_2 = A_4/A_2 = V_2 - 2A_0/A_2 = V_2 - 2/R_0\ ;\ \therefore R_0 = 2/(V_2 - R_2)$$
$$R_{2k} = A_{2k+2}/A_{2k} = V_{2k} - A_{2k-2}/A_{2k} = V_{2k} - 1/R_{2k-2}\ ;\ k = 2,3,4,\cdots \quad \therefore\ R_{2k-2} = 1/(V_{2k} - R_{2k})$$

従って

$$V_0/2 = 1/(V_2 - 1/(V_4 - 1/(V_6 - \cdots \tag{10}$$

同様に (7) ~ (9) に対応して

$$(V_1 - 1) = 1/(V_3 - 1/(V_5 - 1/(V_7 - \cdots \tag{11}$$

$$0 = 1/(V_2 - 1/(V_4 - 1/(V_6 - \cdots \tag{12}$$

$$(V_1 + 1) = 1/(V_3 - 1/(V_5 - 1/(V_7 - \cdots \tag{13}$$

を得る。これは固有値を計算する為の特性方程式である。固有値の求め方および (2) ~ (5) の係数の求め方は参考文献 [1] に述べた。

第2種 $Mathieu$ 関数をフーリエ級数に展開すると

$$fe_{2n}(z,q) = C_{2n}(q)\{z\, ce_{2n}(z,q) + \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+2}\sin(2k+2)z\} \tag{14}$$

$$fe_{2n+1}(z,q) = C_{2n+1}(q)\{z\, ce_{2n+1}(z,q) + \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}\sin(2k+1)z\} \tag{15}$$

$$ge_{2n+2}(z,q) = S_{2n+2}(q)\{z\, se_{2n+2}(z,q) + \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k}\cos(2k)z\} \tag{16}$$

$$ge_{2n+1}(z,q) = S_{2n+1}(q)\{z\, se_{2n+1}(z,q) + \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k+1}\cos(2k+1)z\} \tag{17}$$

と表される。この第2種 $Mathieu$ 関数のフーリエ係数を決めるには，これらを (1) に代入すれば，係数に関する関係式が導ける。$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+2}\sin(2k+2)z$ と置き，(14) を (1) に代入すれば，

$$f'' + (\lambda - 2q\cos(2z))f = -2\, ce'_{2n}(z,q) \tag{18}$$

と成り，さらに

$$\begin{array}{lll} (\lambda-4)f_2 & -q\, f_4 & = 4A_2 \\ (\lambda-4k^2)f_{2k} & -q\{f_{2k-2}+f_{2k+2}\} & = 4k\, A_{2k} \qquad ;\ k \geq 2 \end{array} \tag{19}$$

同様に (15) ～ (17) を (1) に代入して

$$\begin{array}{lll} (\lambda-1+q)f_1 & -q\, f_3 & = 2A_1 \\ (\lambda-(2k+1)^2)f_{2k+1} & -q\{f_{2k-1}+f_{2k+3}\} & = 2(2k+1)\, A_{2k+1} \qquad ;\ k \geq 1 \end{array} \tag{20}$$

$$\begin{array}{lll} \lambda g_0 & -q\, g_2 & = 0 \\ (\lambda-4)g_2 & -q(2g_0+g_4) & = -4B_2 \\ (\lambda-4k^2)g_{2k} & -q\{g_{2k-2}+g_{2k+2}\} & = -4k\, B_{2k} \qquad ;\ k \geq 2 \end{array} \tag{21}$$

$$\begin{array}{lll} (\lambda-1-q)g_1 & -q\, g_3 & = -2B_1 \\ (\lambda-(2k+1)^2)g_{2k+1} & -q\{g_{2k-1}+g_{2k+3}\} & = -2(2k+1)\, B_{2k+1} \qquad ;\ k \geq 1 \end{array} \tag{22}$$

である。これは3項無限次元連立一次方程式である。この方程式を解くには，消去法で $k = 1 \sim n$ まで進み，2項式に変形する。一方，収束項† $k = M$ から，2つの値を仮定して，逆に $k = n$ まで計算する。

この関係を分かりやすくする為に，次のように書き換える。

$$\begin{array}{lllll} V_2 f_2 & -f_4 & & & = c_2 \\ -f_2 & +V_4 f_4 & -f_6 & & = c_4 \\ & -f_4 & +V_6 f_6 & -f_8 & = c_6 \\ & & & & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$
(23)
(24)
(25)

ただし，$c_{2k} = 4kA_{2k}/q$; $V_k = (\lambda - k^2)/q$

ここで，2項式を作る為に，最初の式を V_2 で割り，2番目の式と加えて f_2 を消去すると

$$D_4 f_4 - f_6 = C_4 \tag{26}$$

ここに，$D_4 = V_4 - 1/D_2$; $D_2 = V_2$

$C_4 = c_4 + C_2/D_2$; $C_2 = c_2$

となる。同様にして

$$D_6 f_6 - f_8 = C_6 \tag{27}$$

ここに，$D_6 = V_6 - 1/D_4$; $C_6 = c_6 + C_4/D_4$

---

†Mathieu 関数の基本の漸化式 $f_{n+2} = V_n f_n - f_{n-2}$ は，$n \to \infty$ とすれば，0に向かうものと ∞ に向かうものの2つがある。∞ に向かうものは不要である。0に向かう速さと ∞ に向かう速さは同じであり，∞ に向かう計算はやさしい。$k = n$ から順方向に計算して十分に大きな値（2倍精度で 10^{+32} 程度）と成る $k = M$ を収束項とする。

となる。以下同様にして

$$
\begin{aligned}
&D_{2n}f_{2n} \quad -f_{2n+2} = C_{2n} \\
&\text{ここに,}\quad D_{2n} = V_{2n} - 1/D_{2n-2} \\
&\qquad\qquad C_{2n} = c_{2n} + C_{2n-2}/D_{2n-2}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

と成り，２項式が出来る。次に逆向きに，$k = M$ 項から $W_{2M} = 1$；$W_{2M+2} = 0$ として出発して

$$
W_{2k-2} = V_{2k}W_{2k} - W_{2k+2} - c_{2k}\ ;\ k = M, M-1, \cdots, n+1 \tag{29}
$$

から，W_{2k} を計算する。出発値を任意に選んだので，W_{2k} は仮の値である。正しくは，

$$
f_{2k} = W_{2k} - \theta A_{2k}\ ;\ k = M, M-1, \cdots, n \tag{30}
$$

である†。(30) を (28) の f_{2n}，f_{2n+2} に代入して θ を求めれば

$$
\theta \ = (D_{2n}W_{2n} - W_{2n+2} - C_{2n})/(D_{2n}A_{2n} - A_{2n+2}) \tag{31}
$$

となる。この分母は桁落ちするので，次のように計算する。

$$
\begin{aligned}
[\text{分母}] \quad &= D_{2n}A_{2n} - A_{2n+2} \\
&= (V_{2n} - 1/D_{2n-2})A_{2n} - A_{2n+2} \\
&= (V_{2n}A_{2n} - A_{2n+2}) - A_{2n}/D_{2n-2} \\
&= (A_{2n-2}) - A_{2n}/D_{2n-2} \\
&= (D_{2n-2}A_{2n-2} - A_{2n})/D_{2n-2}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

カッコ内は次数の１つ低い同型である。従って，

$$
\begin{aligned}
[\text{分母}] \quad &= (D_2A_2 - A_4)/(D_2D_4 \cdots D_{2n-2}) \\
&= (V_2A_2 - A_4)/(D_2D_4 \cdots D_{2n-2}) \\
&= 2A_0/(D_2D_4 \cdots D_{2n-2})
\end{aligned}
\tag{33}
$$

を得る。これで θ が次のように決まる。

$$
\theta \ = (D_{2n}W_{2n} - W_{2n+2} - C_{2n})(D_2D_4 \cdots D_{2n-2})/(2A_0) \tag{34}
$$

この θ を (30) に代入して，f_{2k}；$k = M, M-1, \cdots, n+1, n$ が決まる。さらに，２項式より後退代入して

$$
f_{2k} = (C_{2k} + f_{2k+2})/D_{2k}\ ;\ k = n, \cdots, 2, 1 \tag{35}
$$

により f_{2k} が決まる。同じように，(15)〜(17) も決定できる。最後に正規化の為に

$$
C_{2n}^2(q)\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}^2 \ = C_{2n+1}^2(q)\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}^2 \ = S_{2n}^2(q)\{2g_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k}^2\} \ = S_{2n+1}^2(q)\sum_{k=0}^{\infty} g_{2k+1}^2 \ = 1 \tag{36}
$$

とする。これで定数 $C_{2n}(q), C_{2n+1}(q), S_{2n+2}(q), S_{2n+1}(q)$ も求められる。第２種 *Mathieu* 関数値の計算は，２つのフーリエ級数が主な計算である。これは *Clenshaw* の方法で計算すれば良い。

参考文献

[1] 山下，*Mathieu* 関数について，数値解析・軽井沢シンポジウム，平成元年６月

[2]McLachlan, N.W., Theory and Application of Mathieu Functions, Dover Publ., N.Y., 1964.

† 3項無限次元一次方程式の一般解は定数項を０と置いた独立な２つの解と特解の線型結合である。今の場合，$k \to \infty$ とした時，∞ となる方は捨てる。定数項を０と置いた解は A_{2k} であり，W_{2k} は特解である。従って，このように解は表せる。