数理解析研究所講究録
793巻 1992年 169-186

Milnorの定理の1つの拡張

京都産大理 牛瀧文宏 (Fumihiro Ushitaki)

§1. 序論

この小論を通じて特に断らない限り，Gは球面に自由に作用する有限群とし，考えるカテゴリーはC^∞カテゴリーとする。この小論の目的は次のMilnorの定理を拡張することにある。

定理1.1([Mi; Corollary 12.13]). レンズ空間LとL'の間の任意のh同境Wは，$\dim L \geq 5$のとき$L \times I$に微分同相である。ここでIは閉区間$[0,1]$を表す。

この定理を変換群論の言葉に直してその形で拡張することを考える。その為に次の記号を用意する。Vを複素次元nのユニタリーG表現とし，$S(V)$をVの単位球面とする。GのVへの作用が自由であるとき，$S(V)$をfree-linear-G球面ということにする。以上の言葉を用いて定理1.1を書き直すと

次の様になる。

定理1.2. Gを有限巡回群，$S(V)$と$S(V')$を次元が$2n-1\geqq 5$のfree-linear-G球面とする。Wを$S(V)$と$S(V')$の間のG-h同境とするとき，Wは$S(V)\times I$にG微分同相である。

Milnorの定理を定理1.2の形で拡張することを考える。即ちGが一般の有限群の場合のこの定理の拡張を紹介するのがこの小論の目的である。その例として次に述べるものがある。証明は後述の注意4.2より明らかである。

例1.3. Gを複2面体群，複4面体群，複8面体群，又は4元数群とする。$S(V)$と$S(V')$を$2n-1\geqq 5$次元のfree-linear G球面とする。このとき$S(V)$と$S(V')$の間の任意のG-h同境Wは$S(V)\times I$にG微分同相である。

この小論の主定理は定理2.1である。また4つの節で構成されている。第2節では主定理とそれにまつわる種々の準備そして系を述べる。第3節で主定理の証明を行う。第4節では特にGを有限可解群に限って考え，具体的な例を与えることを行う。

§2. Milnorの定理の拡張(一般論)

先ずRothenbergの完全系列について復習する。詳細については[Sh]を参照されたい。Gを有限群, $\mathbb{Z}[G]$をGの$\mathbb{Z}$上の群環とする。$\mathbb{Z}[G]$は$\overline{\sum a_g g} = \sum a_g g^{-1}$ $(a_g \in \mathbb{Z},\ g \in G)$で定義されたinvolutionを持つ。$GL(\mathbb{Z}[G])$の元$(x_{ij})$に対しては, これより誘導されたinvolution $\overline{(x_{ij})} = (\overline{x_{ji}})$が定義される。従って$G$のWhitehead群$Wh(G)$はこれより誘導されるinvolutionをもつ。($Wh(G)$や$SK_1(\mathbb{Z}[G])$については[O]参照。) これを$Wh(G)$上のbar operationと呼ぶことにし, $\overline{}$で表す。$Wh(G)$の部分集合$\tilde{A}_m(G)$を

$$\tilde{A}_m(G) = \{\tau \in Wh(G) \mid \bar{\tau} = (-1)^m \tau\}$$

で定義する。容易にわかるように, $\tilde{A}_m(G)$は$Wh(G)$の部分群である。次の剰余群を$A_m(G)$で表わす。

$$A_m(G) = \tilde{A}_m(G)/\{\tau + (-1)^m \bar{\tau} \mid \tau \in Wh(G)\}.$$

このときRothenbergの完全系列は

$$\cdots \longrightarrow A_{2n+1}(G) \xrightarrow{c} L^s_{2n}(G) \xrightarrow{\alpha} L^h_{2n}(G) \longrightarrow \cdots$$

で与えられた。ここに$L^s_{2n}(G)$, $L^h_{2n}(G)$はWall群を表す(Wall群については[B]を参照されたい)。ここでcを定める写像$\tilde{c}: A_{2n+1}(G) \longrightarrow L^s_{2n}(G)$を考える。このとき次の定理が成り立つ。

定理2.1. Gを有限群，Xを$2n-1$次元free-linear-Gホモトピー球面で$n \geqq 3$とする。このとき次の(1)と(2)は同値である。

(1) Xとそれ自身の間の任意のG-h同境Wは$X \times I$にG微分同相である。

(2) $\ker \tilde{\tau} = 0$。

この定理の系として定理1.2の1つの拡張である次の結果が得られる。

系2.2. $S(V)$と$S(V')$を$2n-1$次元free-linear-Gホモトピー球面で$n \geqq 3$であるとする。このとき$\ker \tilde{\tau} = 0$であれば，$S(V)$と$S(V')$の間の任意のG-h同境Wは$S(V) \times I$にG微分同相である。

注意2.3. 定理2.1はXとそれ自身の間のG-h同境を考えたのに対し，系2.2では異なるG表現の球面の間のG-h同境を考えている。しかし一方，定理2.1では作用は線型とは限っていないが，系2.2では線型作用を考えている。

注意2.4. 有限群$\mathbb{Z}_m$は§4で述べるように$\ker \tilde{\tau} = 0$の条

件を満たし，他にも例1.3のような群が例として挙げられるので，系2.2は真にMilnorの定理の拡張になっている。

系2.2の証明　CをGの巡回部分群とする。定理1.2により実C表現空間として$res_C V = res_C V'$が成り立つ。従って，実G表現空間として$V = V'$となる。よって$S(V)$と$S(V')$はG微分同相である。即ちWは$S(V)$と自分自身の間のG-h同境とみなせ，$\ker\tilde{\tau} = 0$の仮定から定理2.1を用いてWが$S(V) \times I$とG微分同相であることが示された。

§3．主定理の証明

Milnorの定理の拡張（系2.2）の証明に必要な部分は定理2.1における(2)→(1)であるから，ここではその証明を述べることにする。(1)→(2)については[U1]を参照されたい。

定理2.1の(2)→(1)の証明　$|G| \leqq 2$の場合は$Wh(G) = 0$となるのでs同境定理により(1)は成り立つ。よって$|G| \geqq 3$の場合に証明する。WをXとそれ自身の間のG-h同境で$\dim W \geqq 6$とする。XのWへの包含写像を区別するためにX'をXのコピーとして$\partial W = X \amalg X'$とおく。そして各包含写像を$i: X \to W$, $i': X' \to W$とする。(2)の仮定のもと，$\tau := \tau(W, X)$が0となる

ことを示す。はじめにτが$\tilde{A}_{2n+1}(G)$の元であることを示す。

補助定理3.1. G-h同境$(W;X,X')$に対し$\tau(W,X)=\tau(W,X')$が成り立つ。

証明 rをiのGホモトピー逆写像とする。一般に、Gが位数3以上の有限群で5次元以上のホモトピー球面Xに自由に作用するとき，Xの任意のGホモトピー自己同値写像は恒等写像にGホモトピックである([U1; Lemma 4.1])。従って

$$\tau(r\circ i')=\tau(id)=0$$

が成り立つ。一方

$$\begin{aligned}\tau(r\circ i') &= \tau(r)+r_*\tau(i')\\ &=-r_*\tau(i)+r_*\tau(i')\\ &=r_*(\tau(i')-\tau(i))\end{aligned}$$

となるので$\tau(i')=\tau(i)$を得て，この補助定理は示された。 □

双対性定理([M; P.394])により，$\tau(W,X')=-\overline{\tau(W,X)}$をも得る。従って補助定理3.1の結果と合せて$\tau$が$\tilde{A}_{2n+1}(G)$の元であることがわかる。

補助定理3.2. Gホモトピー同値写像$f:W\to X\times I$が存在して$\tau(f)=-f_*(\tau)$, $f(X)\subset X\times\{0\}$, $f(X')\subset X\times\{1\}$, $f|X=id$, $f|X'=id$を

満す。

<u>証明</u>　G強変位レトラクト $r: W\to X$ を用いることにより、Gホモトピー同値写像 $f_0: W\to X\times I$ で $f_0(X)\subset X\times\{0\}$, $f_0(X')\subset X\times\{1\}$, $f_0|_X$ と $f_0|_{X'}$ はGホモトピー同値写像という条件を満たすものが構成できる。従って補助定理3.1の証明の中で述べたように $f_0|_X$ と $f_0|_{X'}$ は共に恒等写像にGホモトピックである。従ってGホモトピー同値写像 $f: W\to X\times I$ が存在して $f(X)\subset X\times\{0\}$, $f(X')\subset X\times\{1\}$, $f|_X=id$, $f|_{X'}=id$ を満す。この f が $\tau(f)=-f_*\tau(i)$ を満すことを示す。$\rho: X\times I\to X$ を自然な強G変位レトラクトとする。この時、次のGホモトピー同値写像のGホモトピー可換図式が得られる。

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r"] & X\times I \arrow[d, "\rho"] \\ X \arrow[r, "id"] & X \end{tikzcd}$$

従って

$$\tau(\rho\circ f)=\tau(id\circ r)$$

$$\tau(\rho)+\rho_*\tau(f)=\tau(id)+id_*\tau(r)$$

$$\rho_*\tau(f)=\tau(r)$$

$i: X\to W$ は $r: W\to X$ のGホモトピー逆写像なので、[C; (22.5)] により $\tau(r)=-r_*\tau(i)$ が成り立つ。よって、

$$\tau(f)=\rho_*^{-1}\tau(r)$$

$$= -\rho_*^{-1} \circ r_* \tau(i)$$
$$= -f_* \tau(W, X) \quad (\because \tau(i) = \tau(W, X))$$
$$= -f_* \tau \qquad \square$$

$g: X \times I \to W$ を $f: W \to X \times I$ の G ホモトピー逆写像で $\partial g: \partial(X \times I) \to \partial W$ は恒等写像であるものとする。この時，$\partial(X \times I)$ 上の G ベクトル束 $g^* T(W)|_{\partial(X \times I)}$ は $T(X \times I)|_{\partial(X \times I)}$ と同一視され $f^* g^* T(W)$ は $T(W)$ に同型である。かくして G 法写像

$$(f; b): (W; T(W)) \longrightarrow (X \times I; f^* g^* T(W))$$

を得る。ここで b は G ベクトルバンドル同型であり，境界への制限は恒等写像である。次にこの G 法写像 $(f; b)$ の G 手術障害 $\sigma(f; b) \in L_{2n}^s(G)$ が $(-1)^{n+1}\tilde{c}(\tau)$ で与えられる事を示す。まず十分大きな r を1つ与えて固定して F で階数 $2r$ の自由 $\mathbb{Z}[G]$ 加群 $\mathbb{Z}[G]^{2r}$ を表す。W と $G \times S^n \times S^n$ の r 個のコピーの同変連結和を考えることにより $\mathbb{Z}[G]$ 加群として $K_n(W') \cong F$ なる G 法写像

$$(f'; b'): (W', X \amalg X'; T(W')) \longrightarrow (X \times I, X \times \{0, 1\}; f'^* g^* T(W))$$

を得る。surgery kernel $K_n(W')$ の $\mathbb{Z}[G]$ 基底として次の2つのものを考える。その1つは

$$\mathcal{B}_0 = \{\{1\} \times \{*_1\} \times S_1^n, \cdots, \{1\} \times \{*_r\} \times S_r^n, \{1\} \times S_1^n \times \{*_1\}, \cdots, \{1\} \times S_r^n \times \{*_r\}\}$$

で与えられるもので，ここに $\{1\} \times \{*_i\} \times S_i^n$ と $\{1\} \times S_i^n \times \{*_i\}$ は

点$(1, *_i, *_i)$で交わりそれらはホモロジー群$H_n(S_i^n \times S_i^n)$ $(1\leq i\leq r)$を生成する。もう一つの基底はG手術障害$\sigma(f';b')$の定義から与えられるもので〔Wa I; Theorem 5.8 の証明〕の中に与えられている基底に相当するものである。この$K_n(W')$の$\mathbb{Z}[G]$基底を$\mathcal{B}$と書くことにし，f'の写像錐を$C_*(f')$と表せば〔Wa I; Lemma 2.3〕にあるように$\mathcal{B}$は$\tau(C_*(f'))=0$となるようにとられている。

補助定理3.3. $[\mathcal{B}/\mathcal{B}_0] = (-1)^n \tau(f)$

ここで$[\mathcal{B}/\mathcal{B}_0]$は$\mathcal{B}_0$を$\mathcal{B}$に変換する行列で代表されるWh$(G)$の元を表す。（その定義や性質に関する詳細については〔Mi; p. 363以後〕を参照にされたい）

証明　$f_*: C_*(W) \longrightarrow C_*(X\times I)$を$G$ホモトピー同値写像$f: W \to X\times I$から誘導されたチェイン複体の間のチェイン写像とする。f_*の写像錐を$C_*(f)$と書く。F_*を$F_n=F$, $F_k=0$ $(k\neq n)$で与えられるチェイン複体とする。

$$\varphi_* = f_* \oplus 0_* : C_*(W)\oplus F_* \longrightarrow C_*(X\times I)$$

とおく。このとき$C_*(\varphi)=C_*(f)\oplus F_{*-1}$が成り立つ。実際

$$C_k(\varphi) = C_{k-1}(W)\oplus F_{k-1}\oplus C_k(X\times I) = C_k(f)\oplus F_{k-1}$$

であり∂_*, ∂'_*, d_*, d'_*をそれぞれ$C_*(\varphi)$, $C_*(f)$, $C_*(W)\oplus F_*$, $C_*(X\times I)$の境界準同型とする時，$a\in C_{k-1}(W)$, $b\in F_{k-1}$, $c\in C_k(X\times I)$

に対して

$$\begin{aligned}\partial_k(a+b+c) &= -d_{k-1}(a+b)+\varphi_*(a+b)+d'_k(c)\\ &= -d_{k-1}(a)+f_*(a)+d'_k(c)\\ &= \partial'_k(a+c)\ .\end{aligned}$$

F_*の境界準同型は0写像であるから，これで$C_*(g)$と$C_*(f')\oplus F_{*-1}$がチェイン複体として等しいことが示された。

$f'_*: C_*(W') \to C_*(X\times I)$ をG法写像$f': W' \to X\times I$から誘導されたチェイン写像とする。WからW'を構成したときの方法を考えることによりφ_*はf'_*とみなせる。そして加群$F_n=F$はWからW'を得る過程においてWに連結和された$G\times S^n\times S^n$のr個のコピーによって定義されるチェイン複体のn-サイクルを表す。$f': W' \to X\times I$は$H_i(C_*(f'))=0$ $(i\neq n+1)$を満すことがわかる。（ここでホモロジー群は簡約ホモロジーを考えている。）[Wa I; Lemma 2.3] にあるように$C_*(f')$の preferred basis は $\tau(C_*(f'))=0$ を満たすようにとられ，$H_{n+1}(C_*(f'))$の preferred basis は同値なものを除いて

$$\bigoplus_i C_{n+1+2i}(f') \cong H_{n+1}(C_*(f'))\oplus \bigoplus_i C_{n+2+2i}(f')$$

で与えられる。従ってこの基底はbに他ならない。$\tau(C_*(f'))$を計算するにあたり，チェイン複体とチェイン写像のカテゴリーにおける次の短完全系列を考える。

$$0\longrightarrow C_*(f)\longrightarrow C_*(\varphi)\longrightarrow F_{*-1}\longrightarrow 0$$

そうする時ホモロジー完全系列

$$\cdots \to H_q(C_*(f)) \to H_q(C_*(\varphi)) \to H_{q-1}(F) \to \cdots$$

は$6n+2$次の自由非輪状チェイン複体であると考えられる。これを$\mathcal{H}$と置くとWhitehead トーション$\tau(\mathcal{H})$が定義されて$\tau(\mathcal{H})$の計算はチェイン複体

$$0 \to H_{n+1}(C_*(f')) \to H_n(F) \to 0$$

のトーションの計算に帰着される。上で見たように$H_{n+1}(C_*(f'))$のpreferred basisは$\mathcal{B}$であり$H_n(F)$のpreferred basisは$\mathcal{B}_0$である。$\mathcal{H}_{3n+3}=H_n(F)$であり$\mathcal{H}$が非輪状であることより，

$$\tau(\mathcal{H}) = (-1)^{3n+3}[\mathcal{B}/\mathcal{B}_0] = (-1)^{n+1}[\mathcal{B}/\mathcal{B}_0]$$

となる。[Mi; Theorem 3.2]により

$$\tau(C_*(f')) = \tau(C_*(\varphi))$$
$$= \tau(C_*(f)) + \tau(F_{*-1}) + \tau(\mathcal{H})$$

$F_k=0\ (k \neq n)$であるから$\tau(F_{*-1})=0$を得る。$\mathcal{B}$は$\tau(C_*(f'))=0$を満たすようにとられているから$[\mathcal{B}/\mathcal{B}_0]=(-1)^n\tau(f)$を得る。□

補助定理3.2によりfは$\tau(f)=-f_*(\tau)$を満たすので

$$[\mathcal{B}/\mathcal{B}_0] = (-1)^{n+1} f_*(\tau)$$

となる。よって

$$(-1)^{n+1}\tilde{c}(\tau) = \tilde{c}([\mathcal{B}/\mathcal{B}_0]) = \sigma(f'; b') = \sigma(f; b)$$

となる。ここで中央の等号は$\tilde{c}$の定義より成り立つ。さらに

$\sigma(f;b)$に関して次が成り立つ。

補助定理3.4. G手術障害$\sigma(f;b)$は自由作用を持つ閉G多様体のG手術障害として得られる。

証明 はじめに一点$x_0 \in X$をとり$X \times I$の中の$G \times \{x_0\} \times I$を考える。$f|_{\partial W} : \partial W \to X \amalg X$は恒等写像であるから

$$f^{-1}|_X(x_0) = f^{-1}|_{X'}(x_0) = x_0$$

となる。そうすると$f^{-1}(G \times \{x_0\} \times I)$は$G \times \{x_0\} \times I \cup \bigcup_{i=1}^{l} A_i$にG微分同相になる。但し，ここで$A_i \subset W$は$W$の1次元部分多様体を表す。[Mo ; Proposition 1.3]によりG写像$f'' : W \to X \times I$が存在してf''はfとGホモトピックかつ$G \times \{x_0\} \times I$に横断正則で$f''^{-1}(G \times \{x_0\} \times I) = G \times \{x_0\} \times I$を満し，$f''|_{\partial W} : \partial W \to X \times \{0,1\}$は恒等写像となる。$f''$の$G \times \{x_0\} \times I$への横断正則性により$G \times \{x_0\} \times I$のG管状近傍$G \times D_{x_0} \times I$を十分小さくとれば$f''| : f''^{-1}(G \times D_{x_0} \times I) \to G \times D_{x_0} \times I$は各ファイバー上で線型写像と仮定してよい。$f''| : f''^{-1}(G \times \{x_0\} \times I) \to G \times \{x_0\} \times I$は rel $G \times \{x_0\} \times \{0,1\}$でG微分同相にGホモトピックであるから同変ホモトピー被覆性質により$f''|_{f''^{-1}(G \times D_{x_0} \times I)}$はG微分同相とみなせる。$f''| : \partial W \to X \times \{0,1\}$は恒等写像であることに注意する。$W_0 = \mathrm{Closure}(W - f''^{-1}(G \times D_{x_0} \times I))$，$(X \times I)_0 = \mathrm{Closure}(X \times I - (G \times D_{x_0} \times I))$とおく。更に，$f''$のホモトピー逆写像$g'' : X \times I \to W$で

$g''|_{\partial(X\times I)\cup(G\times D_{x_0}\times I)}:\partial(X\times I)\cup(G\times D_{x_0}\times I)\to(X\cup X')\cup f''^{-1}(G\times D_{x_0}\times I)$ が真に $f''|_{(X\cup X')\cup f''^{-1}(G\times D_{x_0}\times I)}$ の逆写像であり $g''((X\times I)_0)\subset W_0$ を満たすものが存在する。こうしてG法写像

$$(f'';b''):(W,X\amalg X';T(W))\to(X\times I,X\times\{0,1\};f''^*g''^*T(W))$$

でその $(W_0;T(W_0))$ への制限

$$(f''|_{W_0};b''|_{T(W_0)}):(W_0,\partial W_0;T(W_0))\to((X\times I)_0,\partial(X\times I)_0;f''^*|_{W_0}g''^*|_{(X\times I)_0}T(W_0))$$

もG法写像であるものが得られる。$\Sigma=W_0\underset{f''|_{\partial W_0}}{\cup}(X\times I)_0$ を考える。即ちこれは $W_0\amalg(X\times I)_0$ を $x\in\partial W_0$ と $f''(x)\in\partial(X\times I)_0$ を同一視して得られる空間である。$f''|_{\partial W_0}$ はG微分同相であるから Σ は $C^\infty G$ 多様体の構造をもつ。同様に $\Sigma'=(X\times I)_0\underset{id|_{\partial(X\times I)_0}}{\cup}(X\times I)_0$ を構成し写像度1のG写像 $F:\Sigma\to\Sigma'$ を

$$F(x)=f''(x)\quad \text{if}\quad x\in W_0$$
$$F(x)=id(x)\quad \text{if}\quad x\in(X\times I)_0$$

で定義する。こうしてG法写像

$$(F;B):(\Sigma;T(\Sigma))\longrightarrow(\Sigma';F^*T(\Sigma'))$$

を構成する。ここにBは

$$B|_{T(W_0)}=b''|_{T(W_0)}$$
$$B|_{T((X\times I)_0)}=id$$

で定義されるGベクトルバンドル同型である。そうすると $(F;B)$ のG手術障害 $\sigma(F;B)$ に対し、

$$\sigma(F;B)=\sigma(f''|_{W_0};b''|_{T(W_0)})=\sigma(f'';b'')=\sigma(f;b)$$

となり補助定理が示された。 □

P を G の 2-Sylow 部分群とする。G は periodic cohomology を持つので G の 2-Sylow 部分群は巡回群か又は一般四元数群である。従って [O; P.14, Example 2] により $SK_1(\mathbb{Z}[P])=0$ が成り立つ。依って $res_P\,\tau\in SK_1(\mathbb{Z}[P])=0$ が成り立つので $res_P f$ は P 単純ホモトピー同値である。これより $res_P\,\sigma(f;b)=0$ である。補助定理3.4により Wall のトランスファー定理([Wa2; Theorem 12])が適用できて $\sigma(f;b)=0$ を得る。上で見たように $(-1)^{n+1}\tilde{c}(\tau)=\sigma(f;b)$ であるから $\tilde{c}(\tau)=0$ を得, $\tilde{c}$ が単射である仮定より $\tau=0$ となる。これは W が $X\times I$ に G 微分同相であるということに他ならない。以上で定理2.1の(2)→(1)の証明が終わる。

§4. 有限群の場合への拡張(具体例)

前節までに述べた一般論に基づき, 特に G を有限可解群に限って考えた場合に定理1.2の拡張例となる群を考察するのがこの節の目的である。球面に自由かつ線型に作用する有限可解群については[Wo]に完全な展開が載せられている。Sondow ([So]) により G が periodic cohomology を持つ有限群の場合, $\tilde{A}_{2n+1}(G)$ と $SK_1(\mathbb{Z}[G])$ とが同型であることが示されている。従って $\ker\tilde{c}=0$ となるための例として $SK_1(\mathbb{Z}[G])=0$ となる群

Gを考えることにする。今Gを有限可解群に限って考える時次の結果が得られる。証明は[U2]参照。

定理4.1([U2])　Gを球面に自由かつ線型に作用する有限可解群とする。この時Gが次の$\Gamma_1(m,n,r)$, $\Gamma_2(m,n,l)$, Γ_3, $\Gamma_4(n)$のいずれかの形で表される時，またその時に限り$SK_1(\mathbb{Z}[G])=0$が成り立つ。

$\Gamma_1(m,n,r)$：2つの元A,Bで生成され基本関係が

$$A^m=B^n=1,\quad BAB^{-1}=A^r$$

である位数mnの群。ここでm,n,rは次の条件を満たす。

$m\geqq 1$, $n\geqq 1$, $(n(r-1),m)=1$, $r^n\equiv 1 \pmod m$。

dを$\mathrm{mod}\ m$の乗法群におけるrのorderとする時，

n/dはdの任意の素因数で割り切れる。

$\Gamma_2(m,n,l)$：3つの元A,B,Rで生成され基本関係が

$$A^m=B^n=1,\quad BAB^{-1}=A^{-1},\ R^2=B^{n/2},\ RAR^{-1}=A^l,\ RBR^{-1}=B^{-1}$$

である位数$2n$の群。ここでm,n,lは次の条件を満す。

$m\geqq 1$, $(2n,m)=1$, $l^2\equiv 1 \pmod m$, $n=2^u v$ $(u\geqq 2,(v,2)=1,v\geqq 1)$

Γ_3：3つの元B,P,Qで生成され基本関係が

$$B^3=1,\ P^2=Q^2=(PQ)^2,\ BPB^{-1}=Q,\ BQB^{-1}=PQ$$

である位数24の群

$\Gamma_4(n)$：4つの元B,P,Q,Rで生成され基本関係が

$$B^n = 1,\ P^2 = Q^2 = (PQ)^2 = R^2,\ BPB^{-1} = Q,\ BQB^{-1} = PQ,$$
$$RPR^{-1} = QP,\ RQR^{-1} = Q^{-1},\ RBR^{-1} = B^{-1}$$

である位数$16n$の群。ここでnは6で割って3余る整数。□

この定理で考えた群については$SK_1(\mathbb{Z}[G])=0$であるから，これらは定理2.1，系2.2の条件を満たす群Gの例である。

注意4.2. 有限巡回群$\mathbb{Z}_k$は$\Gamma_1(1,k,r)$によって与えられる。複2面体群D_b^*（2面体群D_bの2重被覆）はbが奇数の時には$\Gamma_1(b,4,-1)$で得られ，bが偶数の時には$\Gamma_2(1,2b,l)$によって与えられる。四元数群$Q(8)$は$\Gamma_2(1,4,l)$で与えられる。Γ_3は複4面体群T^*に等しく，$\Gamma_4(3)$は複8面体群O^*に等しい。

注意4.3. 定理2.1において$SK_1(\mathbb{Z}[G])=0$の時Xとそれ自身の間の任意のG-h同境Wが$X\times I$にG微分同相であるということだけなら，実は補助定理3.1を示して$\tau\in\tilde{A}_{2n+1}(G)$が証明された時点で既に証明されているのである。

以上Milnorの定理の拡張について紹介したわけであるが，今後の課題としては$\ker \varepsilon \neq 0$となる例の存在を確認することであろう。また，この小論の内容についてのより詳しい情報

は〔U1〕,〔U2〕を参照されたい。最後にこの小論の清書を引き受けてくれた妻の牛瀧由美子氏に感謝する。

参考文献

〔B〕 A. Bak, "K-Theory of Forms," Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1981.

〔C〕 M.M. Cohen, "A Course in Simple-Homotopy Theory," Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, 1973.

〔Mi〕 J. Milnor, Whitehead torsion, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 358-426.

〔Mo〕 M. Morimoto, Bak Groups and Equivariant Surgery II, K-theory 3 (1990), 505-521.

〔O〕 R. Oliver, "Whitehead Groups of finite groups," London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1988

〔Sh〕 J.L. Shaneson, Wall's surgery obstruction group for $G \times \mathbb{Z}$, Ann. of Math. 90 (1969), 296-334.

〔So〕 J.D. Soudow, Triviality of the Involution on SK_1 for Periodic Groups, Lecture Notes in Math. 1126 (1985), 271-276, Springer-Verlag.

〔U1〕 Is a G-h-cobordism a G-s-cobordism?, (Preprint)

[U2] A generalization of a theorem of Milnor, (in preparation).

[Wa 1] C.T.C. Wall, "Surgery on Compact Manifolds," Academic Press, 1970.

[Wa 2] C.T.C. Wall, Formulae for surgery obstructions, Topology 15(1976), 189-210.

[Wo] J.A. Wolf, "Spaces of Constant Curvature," Publish or Perish, INC., 1974.