数理解析研究所講究録
第 793 巻 1992 年 75-93

配置写像, 同変手術障害類, そして応用
(Positioning Map, Equivariant Surgery Obstruction, and Applications)

岡山大学教養部　森本　雅治 (MASAHARU MORIMOTO)

A は単位元を持つ環としよう. これまで A 上の加群（あるいは内積を伴う加群）がしばしば考察されてきた. 我々は加群（あるいは内積を伴う加群）に配置と呼ばれる新しい装飾を付けて考察する. この装飾は幾何から自然に発生するもので後ほど重要なものと理解されるだろう. 本稿の構成は次のようになっている. 第1－3節は同変手術理論のための代数的準備にあてられている. 第4節で同変障害類の定義と同変手術定理が述べられている. 第5－6節は第1－4節の理論の応用として, 球面上の一不動点作用の存在問題が扱われている.

1. 配置を伴う加群

G は有限群, R は単位元を持つ可換環, $A = R[G]$ は群環, そして Θ は有限 G-集合とする. 以下 R-加群は（したがって A-加群も）R-上有限生成なものとする.

定義1．1． (A, Θ)-加群 (M, α) とは A-加群 M と G-写像 $\alpha : \Theta \to M$ の対のことである. この α をΘ-配置写像 (Θ-positioning map) と呼ぶことにする.

後で重要になる例を挙げてこの定義の出生地を明らかにしよう.

例1．2． X は n-次元, $n = 2k$, の連結な向き付けられたコンパクト多様体とし, その上に G が滑らかに作用しているとする. $\Theta = \Theta_X$ は H-不動点集合の k-次元の連結成分の全体とする. ただし H は G の部分群すべてを渡る. $\gamma \in \Theta$ にたいして, X_γ で γ に対応す

本稿は１９９０年秋および１９９１年秋の University of Bielefeld における Anthony Bak との共同研究 [2] をもとにしている. この研究を助成して下さった University of Bielefeld および日本数理科学振興会にこの場を借りて感謝の意を表したい.

る X の部分多様体を表す．Θ 上の G-作用を $X_{g\gamma} = gX_\gamma$ をみたすように与える．話を簡単にするために，X_γ はすべて向き付けられていて，その上任意の $g \in G$ にたいして，

$$g : X_\gamma \to X_{g\gamma} \text{ は向きを保つ}$$

ものと仮定する．このとき，$M = H_k(X;\mathbb{Z})$ とし $\alpha : \Theta \to M$ は $\alpha(\gamma) = i_{\gamma *}([X_\gamma]) \in M$ により定義する．ただし，$[X_\gamma] \in H_k(X_\gamma;\mathbb{Z})$ は X_γ の向きを表すホモロジー元で，$i_\gamma : X_\gamma \to X$ は自然な包含写像である．

しかしこの出生地のことはしばし忘れてその代数的な性質をまず考えてみる．

直和）．(A,Θ)-加群 (M_i,α_i), $i = 1, 2$, があるとき，その直和 $(M_1,\alpha_1)\perp(M_2,\alpha_2) = (M_1 \oplus M_2, \alpha_1 \perp \alpha_2)$ を

$$\alpha_1 \perp \alpha_2(\gamma) = (\alpha_1(\gamma), \alpha_2(\gamma)) \in M_1 \oplus M_2 \quad \text{for } \gamma \in \Theta$$

により定義する．

直積）．２つの加群の直積 $(M_1,\alpha_1)\top(M_2,\alpha_2) = (M_1 \otimes_R M_2, \alpha_1 \top \alpha_2)$ を

$$\alpha_1 \top \alpha_2(\gamma) = \alpha_1(\gamma) \otimes \alpha_2(\gamma)$$

で定義する．

制限と誘導）．対 (G,Θ) から対 (G',Θ') への射 $f = (\varphi,\psi)$ は群の準同型写像$\varphi : G \to G'$ とφ-写像 $\psi : \Theta \to \Theta'$ からなる．(M',α') を $(R[G'],\Theta')$-加群とすると，$(R[G],\Theta)$-加群 $f^{\#}(M',\alpha') = (f^{\#}M', f^{\#}\alpha')$ が以下のようにして得られる．

$f^{\#}M' = \{x \mid x \in M'\}$（集合としては M' の複製）

$f^{\#}M'$ 上の G-作用: $(g,x) \mapsto \varphi(g)x$

$f^{\#}\alpha'(\gamma) = \alpha'(\psi(\gamma))$.

もし f が包含写像からなる射であればこの $f^{\#}$ を制限 (restriction) と呼び，しばしば Res と書く．今度は $(R[G],\Theta)$-加群 (M,α) が与えられたとしよう．このとき，$(R[G'],\Theta')$-加群 $f_{\#}(M,\alpha)=(f_{\#}M, f_{\#}\alpha)$ が次のように定義される．

$$\begin{aligned} f_{\#}M &= R[G']\otimes_{R[G]} M \\ f_{\#}\alpha(\gamma') &= \sum_{[g',\gamma]\in G'\times_G\Theta}\{g'\otimes\alpha(\gamma)\mid g'\psi(\gamma)=\gamma'\}\ \text{ for } \gamma'\in\Theta'. \end{aligned}$$

特に，f が包含写像からなる射のときにはこの $f_{\#}$ を誘導 (induction) と呼び Ind と書くことが多い．

命題１．３ (Frobenius Reciprocity Law). 次式が成り立つ．

$$(f_{\#}(M,\alpha))\top(M',\alpha')\cong f_{\#}((M,\alpha)\top f^{\#}(M',\alpha')).$$

共役)．H は G の部分群，$\Theta(H)$ は H-集合，g は G の元とする．このとき

$$gHg^{-1}\text{-集合}\quad g\Theta(H)=\{g\gamma\mid\gamma\in\Theta(H)\}$$

が自然な方法で定義される.（すなわち $(a,g\gamma)\mapsto g(g^{-1}ag\gamma)$ for $a\in gHg^{-1}$, $g\gamma\in g\Theta(H)$.）従って，射 $c(H,g)=(\varphi,\psi):(H,\Theta(H))\to(gHg^{-1},g\Theta(H))$ が $\varphi(h)=ghg^{-1}$ と $\psi(\gamma)=g\gamma$ により定まる．上述の制限と誘導の議論により $c(H,g)^{\#}$ と $c(H,g)_{\#}$ が与えられる．これらをそれぞれ $g^{\#}$，$g_{\#}$ と表すことが多い．これらの記号を用いるとき次の命題が成り立つ．

命題１．４．(M,α) を $(R[H],\Theta(H))$-加群，(M',α') を $(R[gHg^{-1}],g\Theta(H))$-加群とすると $g_{\#}g^{\#}(M',\alpha')\cong(M',\alpha')$, $g^{\#}g_{\#}(M,\alpha)\cong(M,\alpha)$ が成り立つ．もし $g\in H$ ならば $g^{\#}(M,\alpha)\cong(M,\alpha)$, $g_{\#}(M,\alpha)\cong(M,\alpha)$ である．

このように (A,Θ)-加群の圏はとても自然な数学的対象のように思える．そこで Mackey の Double Coset Formula が成り立つことが期待される．このためには $H\mapsto\Theta(H)$ に下

に挙げる単純さが要求される．まず G の部分群の全体 $\mathcal{S}(G)$ は G の元による共役をとることにより G-集合となることに注意する．つぎに有限 G-集合 Z を１つ固定して考えよう．Z の部分集合の全体 $\mathcal{P}(Z)$ は $(g, X) \mapsto gX$, $g \in G$, $X \subset Z$, によりやはり G-集合になる．

定義１．５． G-写像 $\Theta : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{P}(Z)$ が単純 (simple) であるとは，

$$\Theta(H) \cap \Theta(K) = \Theta(H \cap K) \quad \text{for any } H,\, K \in \mathcal{S}(G)$$

が成り立つときをいう．

命題１．６ (Mackey Double Coset Formula). Θ が単純であれば次式が成り立つ．

$$Res^G_K Ind^G_H(M, \alpha) \cong \underset{KgH \in K\backslash G/H}{\perp} Ind^K_{K\cap gHg^{-1}} \circ g_\# \circ Res^H_{H\cap g^{-1}Kg}(M, \alpha).$$

2. 配置を伴う Grothendieck-Witt 群

この節の一般的な参考文献は A. Bak [**1**, Section 12] と A. Dress [**3**] である．R は Dedekind 環（特に可換な整域である）とする．有限群 G と有限 G-集合 Θ に対して $\mathbf{H}_{G-inv}(R, \Theta)$ で次のような３つ組 (M, B, α) 全体の圏を表す．

M : R 上射影的 $R[G]$-加群

$B : M \times M \to R$ G-不変な R-上の対称エルミート形式で

$M \to Hom_R(M, R)$; $x \mapsto B(x, \ )$, が全単射

$\alpha : \Theta \to M$ G-写像.

この圏の射 $(M, B, \alpha) \to (M', B', \alpha')$ は $R[G]$-準同型写像 $M \to M'$ で対称エルミート形式と配置写像を保つもののことである．$B(Im(\alpha), Im(\alpha)) = \{0\}$ をみたすとき，α は全等方的 (*totally isotropic* あるいは *t-iso*) であるといわれる．α が自明 (*trivial* あるいは *triv*) であるというのは $\alpha(\gamma) = 0$ のときを意味する．配置写像 α にこのような制限を付けて $\mathbf{H}_{G-inv}(R, \Theta)$ の充満部分圏 $\mathbf{H}_{G-inv}(R, \Theta)^{\%}$, $\% = t\text{-}iso,\ triv$, を定義する．これらの圏

の Grothendieck 群を取って, $KH_0(R,G,\Theta)$, $KH_0(R,G,\Theta)^{t-iso}$ (for $\% = t\text{-}iso$), および $KH_0(R,G)$ (for $\% = triv$) を定義する.

Grothendieck-Witt 群). $\mathbf{M} = (M,B,\alpha) \in \mathbf{H}_{G-inv}(R,\Theta)$ にたいして, U が $\mathbf{M}$ の弱 *Quillen* 部分加群 (*weak Quillen submodule*) である, あるいは $(\mathbf{M},U)$ が弱 *Quillen* 対であるというのは U は M の R-直和, $R[G]$-部分加群で $U \subseteq U^{\perp}$, さらに $U \supseteq Im(\alpha)$ をみたすときをいう. ここで $U^{\perp}$ は

$$U^{\perp} = \{x \in M \mid B(x,y) = 0 \text{ for all } y \in U\}$$

で与えられる. この場合, $U^{\perp}/U$ 上の対称エルミート形式 $B^{\perp}$ が $B^{\perp}([x],[y]) = b(x,y)$ (x, $y \in U^{\perp}/U$) で与えられる. これらの記号のもとで配置を伴う Grothendieck-Witt 群が

$$\overline{GW}_0(R,G,\Theta) = KH_0(R,G)/\langle [\mathbf{M}] - [(U^{\perp}/U, B^{\perp}, triv)] \rangle$$

と定義される. ここで $(\mathbf{M},U)$ は $\mathbf{H}_{G-inv}(R,\Theta)$ におけるすべての弱 Quillen 対を渡る. 同様にして $\overline{GW}_0(R,G,\Theta)^{t-iso}$ や$\overline{GW}_0(R,G)$ が定義される.

命題2.1. 自然な準同型写像により$\overline{GW}_0(R,G)$ と$\overline{GW}_0(R,G,\Theta)^{t-iso}$ とは同型である.

また次の完全列がある.

$$0 \to \overline{GW}_0(R,G,\Theta)^{t-iso} \to \overline{GW}_0(R,G,\Theta) \to \bigoplus_{(x,y)\in\Theta\times\Theta} R_{(x,y)}.$$

ここで $R_{(x,y)}$ は R の複製である. 従って A. Dress の ($\overline{GW}_0(G,R)$ についての) 誘導理論が配置を伴う場合へと$\Theta \times \Theta$ の考察を経て拡張される.

命題2.2. G-写像 $\Theta : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{P}(Z)$ が単純で $\mathcal{S}(G)$ の部分集合 $\mathcal{H}$ がすべての G の 2-*hyper-elementary* 部分群を含み, さらに

$$\bigcup_{H\in\mathcal{H}} (\Theta(H) \times \Theta(H)) = \Theta(G) \times \Theta(G)$$

をみたすとき制限写像

$$Res : \overline{GW}_0(\mathbb{Z}, G, \Theta(G)) \to \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} \overline{GW}_0(\mathbb{Z}, H, \Theta(H))$$

は単射である．

Burnside 環と誘導理論）．ここでは $\Omega(G)$ で G の Burnside 環を表すことにしよう．$\mathcal{H}$ は G の部分群からなる集合とする．もし $\beta \in \Omega(G)$ が

$$\beta = \sum_{H \in \mathcal{H}} a(H)[G/H]$$

（ $a(H)$ は整数）と書けるとき β を $\mathcal{H}$ 上の元であるいう．さらにもし

$$Res_H^G \beta = 1 \ \text{ in } \Omega(H) \text{ for all } H \in \mathcal{H}$$

が成り立つときに β を $\mathcal{H}$ 上の単位元という．

命題２．３．Θ と $\mathcal{H}$ は命題２．２にあるものとする．さらに $\Omega(G)$ の中に $\mathcal{H}$ 上の単位元 β が存在すると仮定する．このとき誘導写像

$$Ind : \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} \overline{GW}_0(\mathbb{Z}, H, \Theta(H)) \to \overline{GW}_0(\mathbb{Z}, G, \Theta(G))$$

は全射である．

系２．４．命題２．３と同じ仮定のもと，Green 函手 $H \mapsto \overline{GW}_0(\mathbb{Z}, H, \Theta(H))$ 上の Green 加群 $H \mapsto M(H)$（ Mackey 函手）にたいし，

$$M(G) \to \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} M(H)$$

は単射である．

3. G-手術障害類群

同変手術障害類は一般化された 2 次形式を持つ加群 (generalized quadratic module) の同値類として与えられる．そこでその 2 次形式の定義から始めよう．

R は $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, あるいは $\mathbb{Z}_{(p)}$（素数 p での $\mathbb{Z}$ の局所化）を表すものとする．群の準同型写像 $w : G \to \{1, -1\}$ を 1 つ取って固定して考えよう．群環 $A = R[G]$ 上の対合 (involution) ー が

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right)^{-} = \sum_{g \in G} a_g w(g) g^{-1}$$

で与えられる．対称性 (symmetry) λ は 1 か -1 とする．すなわちλ-対称とは対称か歪対称かいずれか一方を意味する．ここで K-理論で良く使われる記号を紹介する．

$$min^{\lambda}(A) = \{a - \lambda\overline{a} \mid a \in A\},$$

$$max^{\lambda}(A) = \{a \in A \mid a = -\lambda\overline{a}\}.$$

最初の工夫は A を次のように分解して考えることである．

A の分解と形式媒介変数）．まず $G^{\lambda}(2) = \{g \in G \mid g^2 = 1, g \neq 1, g = -\lambda\overline{g}\}$ とおく．G は $(g, a) \mapsto gag^{-1}$, $g \in G$, $a \in G^{\lambda}(2)$, により $G^{\lambda}(2)$ に作用する．G-不変な部分集合 $Q \subseteq G^{\lambda}(2)$ と $S \subseteq G^{-\lambda}(2)$ を固定する．そして $A_q = R[G \setminus S]$, $A_s = R[S]$, $\Lambda = \Lambda(Q) = \langle x,\ g \mid x \in \min^{\lambda}(A),\ g \in Q\rangle_R$ と定義する． ここで $R[X]$ は $Map(X, R)$ を意味する．従って $R[X]$ は自然な R-加群の構造を持つ．この Λ は K-理論で形式媒介変数 (form parameter) と呼ばれるものである．こうして A の R-加群としての直和分解 $A = A_q \oplus A_s$ を得る．

2 次形式加群）．2 次形式加群 (*quadratic module*) $\mathbf{M} = (M, <\ ,\ >, q)$ とは次のような 3 つ組のことである．

M は A-加群

$<\ ,\ > : M \times M \to A$ 非退化 λ-エルミート形式

$q : M \to A_q/\Lambda$ 2 次形式.

ここで $<,>$ が非退化というのは

$$M \to Hom_A(M,A);\ x \mapsto <x,\ >$$

が全単射であることを意味する．さらに以下の 6 つの性質が成り立つことが仮定されている．

(Q1) $<,>$ は双加法的．

(Q2) $<ax,by> = b<x,y>\overline{a}$.

(Q3) $<x,y> = \lambda\overline{<y,x>}$.

(Q4) $q(gx) = gq(x)\overline{g}$ in $A_q/\Lambda = A/(\Lambda + A_s)$.

(Q5) $q(x+y) - q(x) - q(y) = <x,y>$ in $A_q/\Lambda = A/(\Lambda + A_s)$.

(Q6) $\widetilde{q(x)} + \lambda\overline{\widetilde{q(x)}} = <x,x>$ in $A_q = A/A_s$ ここで $\widetilde{q(x)}$ は $q(x)$ の持ち上げである．

（ただし x, $y \in M$, a, $b \in A$, $g \in G$.）

2 次形式加群 $\mathbf{M} = (M,<,>,q)$ が自由 (*free*), 安定自由 (*stably free*)，射影的 (*projective*) であるというのは M がそうであるときを意味する．ここでは *cat* により free, stably free (s-free), projective (proj.) のいずれかを意味するものとする．*cat*-2 次形式加群のなす圏を $\mathbf{Q}^\lambda(A,\Lambda)_{cat}$ と表す．射はエルミート形式と 2 次形式の両方を保つ A-加群の準同型写像である．

零加群）．M の部分集合 X が全等方的 (*totally isotropic*) であるというのは

$$<X,X> = \{0\},\ かつ\ q(X) = \{0\}$$

が成り立つときをいう．M の部分 A-加群 L が *cat*-ラグランジェ部分加群 (*lagrangian*) であるというのは，L は全等方的な M の A-直和因子で，*cat*-A-加群で，さらに $L = L^\perp$ のときをいう．ここで

$$L^\perp = \{y \in M \mid <x,y> = 0 \ \text{ for all } x \in L\}$$

のことである．2次形式加群 $\mathbf{M}$ が *cat*-零加群 (*null module*) であるというのは $\mathbf{M}$ が *cat*-ラグランジェ部分加群を持つときである．

配置写像を伴う場合）．*cat*-2次形式加群 $(M, <\ ,\ >, q)$ と配置写像 $\alpha : \Theta \to M$ の組 $\mathbf{M} = (M, <\ ,\ >, q, \alpha)$ を考えよう．そのような組のなす圏を $\mathbf{Q}^{\lambda}(A, \Lambda, \Theta)_{cat}$ と書く．$L \subset M$ が $\mathbf{M}$ の *cat*-ラグランジェ部分加群であるとは，L が2次形式加群の *cat*-ラグランジェ部分加群であってしかも L が $Im(\alpha)$ を含むときをいう．*cat*-零加群の定義も同様である．

定義３．１．上の記号のもとで

$$
\begin{aligned}
KQ_0^{\lambda}(A, \Lambda)_{cat} &= \text{ 圏 } \mathbf{Q}^{\lambda}(A, \Lambda)_{cat} \text{ の Grothendieck 群} \\
WQ_0^{\lambda}(A, \Lambda)_{cat} &= KQ_0^{\lambda}(A, \Lambda)_{cat} / \langle cat\text{-零加群} \rangle \\
KQ_0^{\lambda}(A, \Lambda, \Theta)_{cat} &= \text{ 圏 } \mathbf{Q}^{\lambda}(A, \Lambda, \Theta)_{cat} \text{ の Grothendieck 群} \\
WQ_0^{\lambda}(A, \Lambda, \Theta)_{cat} &= KQ_0^{\lambda}(A, \Lambda, \Theta)_{cat} / \langle cat\text{-零加群} \rangle
\end{aligned}
$$

と定義する．

この $WQ_0^{\lambda}(A, \Lambda, \Theta)_{cat}$ が G-手術障害類群になるかというとそうではない．G-手術障害類群を定義するためにもう１つ工夫が必要である．それが次に説明する ∇ である．

関数 ∇）．例１．２を思い出して欲しい．不動点集合の連結成分 γ に対して G の部分群 $\rho_X(\gamma) = \bigcap_{x \in X_\gamma} G_x$ を考える．ここで G_x は x での等方部分群 (isotropy subgroup) である．この場合には自然に G-写像 $\rho = \rho_X : \Theta \to \mathcal{S}(G)$ を得る．そこで以下 Θ と単に書けば，G-写像 $\rho : \Theta \to \mathcal{S}(G)$ が１つ特別に指定されているものとする．さて配置写像を伴う2次形式加群 $\mathbf{M} = (M, <\ ,\ >, q, \alpha)$ に対して $\nabla : M \to R/2[S]$ を

$$\nabla(x)(g) = [\varepsilon(< \Sigma^{\alpha}(g) - x, gx >)], (x \in M, g \in S)$$

で定義する．ここで

$$\Sigma^{\alpha}(g) = \sum_{\gamma} \{\alpha(\gamma) \mid \gamma \in \Theta, \text{ and } \rho(\gamma) \ni g\}$$

で $\varepsilon : A \to R$ は

$$\varepsilon\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = a_1,\ (a_g \in R)$$

で与えられる準同型写像である．

命題３．２．R は任意の $r \in R$ にたいして $r^2 - r \in 2R$ をみたすものとする．このとき $\nabla : M \to R/2[S]$ は $R[G]$-上の準同型写像である．

そこで ∇ が零写像となるような $\mathbf{M} = (M, <\ ,\ >, q, \alpha)$ をすべて集めて $\mathbf{Q}^\lambda(A, \Lambda, \Theta)_{cat}$ の充満部分圏 $\mathbf{SQ}^\lambda(A, \Lambda, \Theta)_{cat}$ を定義する．

定義３．３．上の記号のもと

$KSQ_0(A, \Lambda, \Theta)_{cat} =$ 圏 $\mathbf{SQ}^\lambda(A, \Lambda, \Theta)_{cat}$ の Grothendieck 群

$WSQ_0(A, \Lambda, \Theta)_{cat} = KSQ_0(A, \Lambda, \Theta)_{cat}/\langle$零加群 $\in \mathbf{SQ}^\lambda(A, \Lambda, \Theta)_{cat}\rangle$

$W_{2k}(R, G, Q, S, \Theta)_{cat} = KSQ_0^\lambda(A, \Lambda, \Theta)_{cat}/\langle$零加群 $\in \mathbf{SQ}^\lambda(A, \Lambda, \Theta)_{free}\rangle$ for $\lambda = (-1)^k$

と定義する．

この最後の群が G-手術障害類群である．

G-手術障害類群の誘導理論）．Q, S は上述のように固定して考える．G の部分群 H にたいして $Q(H) = Q \cap H$, $S(H) = S \cap H$ と定義する．G-写像 $\Theta : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{P}(Z)$ と G-写像 $\rho : \Theta(G) \to \mathcal{S}(G)$ にたいして $\rho_H : \Theta(H) \to \mathcal{S}(H)$ を $\rho_H(\gamma) = \rho(G) \cap H$ と定義する．このとき，H にたいして可換群 $W_{2k}(R, H, Q(H), S(H), \Theta(H))_{cat}$ を得る．これらの記号のもとで次の定理が成り立つ．

定理３．４．Θ は単純で，$\Theta(\{1\}) = \emptyset$, さらに

（条件）もし $\gamma \in \Theta(G)$ と $g \in S$ にたいして$\rho(\gamma) \ni g$ であれば $\gamma \in \Theta(\langle g \rangle)$

が成り立つと仮定する．R は $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, あるいは $\mathbb{Z}_{(p)}$,（p は素数），とする．このとき函手 $H \mapsto W_{2k}(R, H, Q(H), S(H), \Theta(H))_{cat}$ は $H \mapsto \overline{GW}_0(\mathbb{Z}, H, \Theta(H))$ 上の Green 加群である．また $\mathcal{H}$ と β が命題２．３の仮定をみたすとき，制限写像

$$Res : W_{2k}(R, G, Q, S, \Theta(G))_{cat} \to \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} W_{2k}(R, H, Q(H), S(H), \Theta(H))_{cat}$$

は単射である．

4.　同変手術障害類と同変手術定理

初期設定）．この節では n は偶数で $n = 2k \geq 6$ をみたすものと仮定する．さて X は向き付けられたコンパクト G-多様体で，すべての連結成分は n-次元とする．いま

（弱ギャップ条件）　G の任意の部分群 $H \neq \{1\}$ にたいして $X^H \leq k$ が成り立つ

と仮定する．Θ^ℓ は部分群による不動点集合の ℓ-次元連結成分の全体とする．特に $\Theta = \Theta^k$ と定義する（例１．２を参照）そして $g : X_\gamma \to X_{g\gamma}$, $g \in G$, $\gamma \in \Theta$, が向きを保ち $\dim(X_\gamma \cap X_\delta) \leq k-2$, $\gamma \in \Theta^k$, $\delta \in \Theta^{k-1}$, が常に成り立つものと仮定する．この向きに関する仮定は以下の話を簡単にするためのものである．準同型写像 $w : G \to \{1, -1\}$ を

$$w(g) = \begin{cases} 1 & （g : X \to X \text{ が向きを保つとき}） \\ -1 & （g : X \to X \text{ が向きを反転させるとき}） \end{cases}$$

と定義する．Y も X と同様の G-多様体としこの節を通して Y は連結で単連結と仮定する．

枠付き G-写像）．G-写像 $f : X \to Y$ とベクトル束の安定 G-同型写像 $b : T(X) \to f^*\xi$ の組 $\mathbf{f} = (f, b)$ を枠付き G-写像という．ここで $T(X)$ は X の接ベクトル束であり，ξ は Y 上の G-ベクトル束である．この節では f は写像度 1 と仮定する．

$\mathbb{Z}_{(0)} = \mathbb{Z}$ と置く．素数 p にたいして $\mathbb{Z}_{(p)}$ は p での $\mathbb{Z}$ の局所化とする．p は 0 か素数としよう．我々は $f : X \to Y$ を等方群が $\{1\}$ の所で G-手術して X を単連結，かつ f を $\mathbb{Z}_{(p)}$-ホモロジー同値写像に直したい．Smith の定理から，次の条件が必要となる．

(Smith の条件） p を割る任意の素数 p' と G の任意の p'-部分群 $P \neq \{1\}$ にたいして $f^P : X^P \to Y^P$ は $\mathbb{Z}/p'$-ホモロジー同型である．

定理を述べるために

$$G(X,\ell) = \{g \in G \mid g^2 = 1,\ g \neq 1,\ \dim X^g = \ell\}$$

と置く．

定理４．１（同変手術定理）．p を 0 か素数とし，$R = \mathbb{Z}_{(p)}$ とする．X, Y は上に述べた G-多様体で，$\mathbf{f} = (f,b) : (X, T(X)) \to (Y, f^*\xi)$ は写像度 1 の（ *Smith* の条件）をみたす枠付き G-写像とする．このとき次の性質をみたす元 $\sigma(\mathbf{f}) \in W_n(R, G, G(X,k-1), G(X,k), \Theta)_{proj.}$ が存在する．

（性質） もし $\sigma(\mathbf{f}) = 0$ ならば，$\mathbf{f}$ を特異点集合の部分はそのまま保って G-手術により，X' は 1-連結で f' は R-ホモロジー同値であるような $\mathbf{f}' = (f', b') : (X', T(X')) \to (Y, f'^*\xi)$ に変形できる．

この節の残りの部分で $\sigma(\mathbf{f})$ がどのように与えられるか説明しよう． $\mathbf{f}$ は定理４．１に与えられたものとする．

最初に $\dim X = 2k$, $\dim X^H \leq k$（ $H \neq \{1\}$ ）であることを思い出そう．G-手術を施して $f : X \to Y$ は k-連結にできる．k-連結というのはこの場合， X も 1-連結で, $f_\# : \pi_\ell(X) \to \pi_\ell(Y)$（ $\ell < k$）が同型写像で $f_\#$ が $\ell = k$ のときには全射であることを意味する．そこで

$$K_k(f) = Ker[f_* : H_k(X;R) \to H_k(Y;R)]$$

と定義する．(Smith の条件）からこれは $A = R[G]$ 上射影的になる．$K_k(f)$ には交点形式 $Int_X : K_k(f) \times K_k(f) \to R$ がある．これを用いて，

$$<\,,\,> : K_k(f) \times K_k(f) \to A$$

を

$$< x,y > = \sum_{g\in G} Int_X(x, g^{-1}y)g$$

で定義する．もし $\dim X^H \leq k-2$（$H \neq \{1\}$）であれば，Wall の手術理論 [**9**, Section 5] のときと全く同様にして自己交点形式 $q : K_k(f) \to A/min^{\lambda}(A)$, $\lambda = (-1)^k$, が定義できる．この定義をよく考えてみると我々の場合には $q : K_k(f) \to A_q/\Lambda$, $A_q = R[G \backslash G(X,k)]$, $\Lambda = \Lambda(G(X,k-1))$，が得られることが分かる．さらに配置写像 $\alpha : \Theta \to K_k(f)$ を定義したい．準同型写像 $p : H_k(X) \to K_k(f)$ を

$$p(x) = x - P_X^{-1} \circ f^* \circ P_Y \circ f_*(x)$$

で定義する．ここで $P_X : H^k(X) \to H_k(X)$ は Poincaré 双対写像である．この記号のもとで

$$\alpha(\gamma) = p(i_{\gamma *}([X_\gamma]))$$

と定義する．以上で $\mathbf{M(f)} = (K_k(f), < , >, q, \alpha)$ が定まった．

補題４．２．上述の状況のとき $\mathbf{M(f)}$ は圏 $\mathbf{SQ}^{\lambda}(A, \Lambda, \Theta)_{proj.}$ に属す．

定義４．３．$\mathbf{M(f)}$ の $W_n(R, G, G(X,k-1), G(X,k), \Theta)_{proj.}$ おける同値類を$\sigma(\mathbf{f})$ と定義する．

補題４．２の証明）．$\mathbf{M(f)}$ に同伴する $\nabla : K_k(f) \to R/2[S]$ が自明であることを示せばよい．$g \in S$ にたいして

$$\Sigma^{\alpha}(g) = \sum_{\gamma\in\Theta} \{p(i_{\gamma *}[X_\gamma]) \mid \rho(\gamma) \ni g\}$$

である．$K_k(f)$ と $Ker(p)$ とは直交しているので

$$\begin{aligned}
\nabla(x)(g) &= [\varepsilon(< \Sigma^{\alpha}(g) - x, gx >)] \\
&= \left[\varepsilon\left(< \sum_{\gamma}\{i_{\gamma *}[X_\gamma] \mid \rho(\gamma) \ni g\}, gx > - < x, gx >\right)\right] \\
&= [\varepsilon(< i_*[X^g], gx > - < x, gx >)] \\
&= [\varepsilon(< i_*[X^g], x > - < x, gx >)]
\end{aligned}$$

x を immersion $h: S^k \to X$ で実現して，h と gh の交点数と h と X^g の交点数を考えるとこれらの交点数は $R/2$ で等しい．よって $\nabla = 0$ が示された．

誘導理論を用いるために)．G の部分群 H にたいして X の代わりに $Res_H^G X$ を考えれば，Θ_X の代わりに $\Theta_{Res_H^G X}$ を得る．そこで$\Theta(H) = \Theta_{Res_H^G X}$ と置く．このとき $\Theta : H \mapsto \Theta(H)$ により G-写像 $\Theta : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{P}(Z)$，$Z = \Theta_X$，を得る．第 3 節では$\rho_H : \Theta(H) \to \mathcal{S}(H)$ を $\rho_H(\gamma) = \rho(\gamma) \cap H$ と定義したが

$$\rho_H(\gamma) = \bigcap_{x \in X_\gamma} H_x$$

をみたしているので $Res_H^G X$ から幾何的に与えられるものと一致している．さらに

$$H(Res_H^G X, \ell) = G(X, \ell) \cap H$$

が成り立っている．$\Theta(\{1\}) = \emptyset$ は明らかである．

命題４．４．もし $\gamma \in \Theta$ で H が $\rho(\gamma)$ の $\{1\}$ と異なる部分群であれば，$\gamma \in \Theta(H)$ である．特に定理３．４の中の（条件）が成り立つ．

従って定理３．４を用いるには $\Theta : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{P}(Z)$ が単純であればよい．

命題４．５．上の状況のとき Θ が単純である必要十分条件は各 $\gamma \in \Theta$ にたいして$\rho(\gamma)$ が唯 1 つの最小の（$\{1\}$ と異なる）部分群を持つことである．

5. 応用

第 4 節の同変手術理論は球面 S^n 上の滑らかな G-作用で G-不動点が唯 1 点しかないものを構成しようという目的があって研究したものである．例えば S^8 の上に 5 次の交代群 A_5 のそのようなエキゾティック作用を作ろうとすると S^{C_2} の次元は 4 になりこれまでの同変手術理論が適用できなかったからである．ここで C_2 は位数 2 の群である．

有限群 G にたいして $G_0 = G$, $G_{i+1} = [G_i, G_i]$, $G(s) = \bigcap_{i=0}^{\infty} G_i$ と定義する．

命題5．1．G は非可解群とする．$\mathcal{H}$ を $G(s)$ を含まない G の部分群の全体とする．このとき *Burnside* 環 $\Omega(G)$ は次のような元 β を持つ．

$$\chi_H(\beta) = \begin{cases} 1 & \textit{for all } H \in \mathcal{H} \\ 0 & \textit{for all } H \notin \mathcal{H}. \end{cases}$$

従って β は $\mathcal{H}$ 上の単位元である．

いま $G = A_5$ とし，G-表現空間 $V = U(3) \oplus U(5)$ は 3 次元と 5 次元の既約表現空間の直和としよう．$Y = S(\mathbb{R} \oplus V)$ と置く．すると Y は（弱ギャップ条件）をみたし，Y に同伴する Θ は ρ によって $G = A_5$ の位数 2 の元の全体 $G(2)$ と G-集合として同型になる．よって命題4．5から $\Theta : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{P}(Z)$, $H \mapsto \Theta_{Res^G_H Y}$, は単純になる．

$$G(2) \times G(2) = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H(2) \times H(2)$$

が容易に分かる．ここで $\mathcal{H}$ は A_5 の真部分群の全体（$\{1\}$ も含む）である．従って，$\mathcal{H}$ は A_5 の 2-hyper-elementary 部分群をすべて含んでいる．筆者の改良による Petrie の横断正則構成（例えば [**5**, Sections 3–5], [**6**]）を用いれば（第4節の初期設定や（Smith の条件）をみたす）写像度 1 の枠付き G-写像 $\mathbf{f} = (f, b) : (X, T(X)) \to (Y, f^*T(Y))$ で $|X^G| = 1$ となるものを得ることができる．しかも任意の真部分群 H にたいして $Res^G_H \mathbf{f}$ と枠付き恒等写像 $\mathbf{id} = (id, id) : (Y, T(Y)) \to (Y, T(Y))$ の間に枠付き H-同境 $\mathbf{F}_H$ が存在するように $\mathbf{f}$ を取ることができる．いま $f : X \to Y$ をホモトピー同値にする障害類 $\sigma(\mathbf{f})$ は $W_n(\mathbb{Z}, G, \emptyset, G(2), G(2))$ にある．$\mathbf{F}_H$ の存在を使って $Res^G_H \sigma(\mathbf{f}) = 0$ を示すことができる．定理3．4より $\sigma(\mathbf{f}) = 0$. つまり $f : X \to Y$ はホモトピー同値写像と仮定してよいことになる．このとき X は G-不動点が唯 1 つのホモトピー球面である．同変連結和を上手に使って S^8 上の A_5-不動点が唯 1 つの滑らかな A_5 の作用を作れる．よって，次の定理を得る．

定理5．2 (with A. Bak). A_5 は S^8 上に A_5-不動点が唯 1 つとなるように滑らかに作用することができる．

系5．3．（1）S^n が A_5 の一不動点作用を持つのはその次元 n が 6 以上のときである（必要十分）．

（２）S^n がなにかある有限群の一不動点作用を持つのは n が 6 以上のときである（必要十分）．

また次の定理もこれまでに述べた同変手術理論の応用として得られる．

定理５．４ (with E. Laitinen and K. Pawałowski [4]). 有限非可解群はある次元の標準球面の上に滑らかな一不動点作用を持つ．

6. 付録

１９９１年１２月の数理解析研究所での短期共同研究における発表の後，本稿を準備している間に球面上の一不動点作用の研究がさらに進んだのでその結果を追加しておく．

有限群 G が可縮なコンパクト（境界を持つ）多様体上に，G-不動点を持たないで滑らかに作用するとき G を Oliver 群と呼ぶことにしよう．G がホモトピー球面上に滑らかな一不動点作用を持てば Oliver 群であることが容易に分かる．ここで Oliver [7] の結果を少し紹介しよう．p, q は 1 または素数としよう．このとき $\mathcal{G}_p^q$ により次のような正規列 $P \subseteq H \subseteq G$ を持つ有限群 G の族を表す：ここで P の位数は pべき，H/P は巡回群で，さらに G/H の位数は q-べきである．G が Oliver 群になるのは，どのような p, q にたいしても $G \notin \mathcal{G}_p^q$ のとき（必要十分）であることを Oliver は証明した．この節では $\mathcal{P}(G)$ で G の，位数が素数べきの部分群全体を表し，$\mathcal{G}^1(G)$ で G の部分群 H でなにかある素数 p にたいして $H \in \mathcal{G}_p^1$ となるものの全体を表すことにする．

Burnside 環 $\Omega(G)$ の元 β と G の部分群からなる組 $(\beta, \mathcal{H})$ で次の（条件）をみたすものを考えよう．

(条件)
$$\begin{cases} \chi_G(\beta) = 0 \\ Res_H^G \beta = 1 \quad \text{in } \Omega(H) \text{ for all } H \in \mathcal{H} \end{cases}$$

このような組 $(\beta, \mathcal{H})$ の存在する $\mathcal{H}$ の全体を $\mathcal{BF}_G$ と書くことにしよう．

命題６．１．G は Oliver 群とする．このとき $\mathcal{BF}_G$ には包含関係に関して唯１つの最大元が存在する.（これを以下 $\mathcal{M}_G$ と書くことにする.）

証明）．$(\beta, \mathcal{H})$ と $(\beta', \mathcal{H}')$ を上のような組としよう．このとき

$$\beta'' = 1 - (1-\beta)(1-\beta')$$

と置く．すると容易に $\chi_G(\beta'') = 0$ と

$$Res^G_H \beta'' = 1 \text{ for all } H \in \mathcal{H} \cup \mathcal{H}'$$

が確かめられる．よって $\mathcal{H}, \mathcal{H}' \in \mathcal{BF}_G$ ならば $\mathcal{H} \cup \mathcal{H}' \in \mathcal{BF}_G$ である．また $\mathcal{BF}_G$ が空集合でないことは次のようにして分かる．X を G-不動点を持たない可縮な有限 G-CW 複体とすると $([X], \{\{1\}\})$ は上に述べたような組で，$\{\{1\}\} \in \mathcal{BF}_G$ である．

定義６．２．G は Oliver 群とする．以下に挙げる７つの条件をみたす実 G-表現空間 V を $\mathcal{M}_G$ に適した G-表現空間ということにする．またそのような V が存在する有限群 G を強 Oliver 群と呼ぶことにする．

（１）$V^G = 0.$

（２）$\mathcal{P}(G) \subseteq Iso(G, V \setminus \{0\}) \subseteq \mathcal{M}_G.$

（３）$\dim V^H \geq 2$ for all $H \in \mathcal{G}^1(G).$

（４）$\dim V^P \geq \max\{6,\ 2\dim V^H\}$ for any $P \in \mathcal{P}(G)$ and $H \supsetneq P.$

（５）もし（４）において $\dim V^P = 2\dim V^H$ が成り立っていればそれは $|H/P| = 2$ のときに限る．またそのような $H_1, H_2 \supset P$ があるとき $\langle H_1, H_2 \rangle$（H_1 と H_2 を含む最小の部分群）は $\mathcal{M}_G$ に属する．

（６）G の任意の部分群 H にたいして，$\dim V^H$ は偶数である．

（７）G の任意の部分群 H にたいして，$g \in N_G(H)$ は V^H に向きを保つ写像として作用する．

これらの定義のもとで次の定理が成り立つ.

定理６．３．G を強 *Oliver* 群とし，V を $\mathcal{M}_G$ に適する実 G-表現空間とする．このとき $\dim V$ 次元の標準球面上に不動点が唯１点しかない，滑らかな G-作用が存在する．

また次の命題が成り立つ．

命題６．４．次に挙げる有限群 G は強 *Oliver* 群である．

(1)　３つ以上の相異なる非巡回的 *Sylow* 部分群を持つべき零群 G.

(2)　非可解群 G.

(3)　強 *Oliver* 群を正規部分群に持つ群 G.

(4)　奇数位数の強 *Oliver* 群の拡張として得られる群 G.

(5)　$G = A_4 \times S_3$.

したがって，T. Petrie [8] の構成した一不動点作用や定理５．４は，定理６．３の系として得られる．

参考文献

1. Bak, A., "K-Theory of Forms," Princeton Univ. Press, Princeton, 1981.
2. Bak, A. and Morimoto, M., *Equivariant surgery on compact manifolds with half dimensional singular sets*, preprint.
3. Dress, A., *Induction and structure theorems for Grothendieck and Witt rings of orthogonal representations of finite groups*, Bulletin Amer. Math. Soc. **79** (1973), 741–745.
4. Laitinen, E., Morimoto, M., and Pawałowski, K., *Smooth actions of finite nonsolvable groups on spheres*, preprint.
5. Morimoto, M., *Most standard spheres have smooth one fixed point actions of A_5. II*, K-Theory **4** (1991), 289–302.
6. Morimoto, M. and Uno, K., *Remarks on one fixed point A_5-actions on homology spheres*, Springer Lecture Notes in Math. **1474** (1991), 337–364.

7. Oliver, R., *Fixed point sets of finite group actions on acyclic complexes*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 155–177.

8. Petrie, T., *One fixed point actions on spheres, I*, Adv. Math. **46** (1982), 3–14.

9. Wall, C. T. C., "Surgery on Compact Manifolds," Academic Press, London-New York, 1970.