

On automorphisms of Hadamard tournaments

伊藤 昇 Noboru Ito

名城大学理工学部数学科

1. アダムールトーナメントとは2重正則完全単向グラフのことである。 Γ を位数 $4\lambda + 3$ 、正則次数 $2\lambda + 1$ 、2重正則次数 λ のアダムールトーナメントとする。 Γ は完全単向なので、 Γ の自己同型対応の位数は奇数である。まず $\sigma \neq 1$ のときの固定点の個数 $f(\sigma)$ の最大値を考えたい。 Γ は付称2- \bar{F} ザイン(アダムール2- \bar{F} ザイン)ともみられるので、 $f(\sigma) \leq 2\lambda + 1$ というFeitの定理があることに注意する。

命題1. $f(\sigma) \leq \lambda$.

証明. $\sigma \neq 1$ なので、 $u, u\sigma, u\sigma^2$ が異なるという点 u がある。 Γ の点をこの3点の外近傍のいくつかの点に属するかにより分類し、それぞれ a_i が i 個の外近傍に属する点の個数とする($0 \leq i \leq 3$)。

$$\begin{cases} 4\lambda + 3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ 3(2\lambda + 1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ 3\lambda = a_2 + 3a_3 \end{cases}$$

これから $3(\lambda+1) = a_1 + a_2$, $\lambda = 4\lambda + 3 - 3(\lambda+1) = a_0 + a_3 \geq f(\sigma)$.

命題2. $f(\sigma) = \lambda$ なら $|\sigma| = 3$

証明. $|\sigma| > 3$ としとる. $u, u\sigma, u\sigma^2, u\sigma^3$ が異なるという点 u がある. Π の点をこの4点の外近傍のいくつかは, σ をまわって i 回 u になり分類し, u_i とする. また a_i で i 個の外近傍に, σ をまわって i 回 u の個数とする ($0 \leq i \leq 4$)

$$\begin{cases} 4\lambda + 3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ 4(2\lambda + 1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 \\ 6\lambda = a_2 + 3a_3 + 6a_4 \end{cases}$$

これから $a_0 + a_3 + 3a_4 = 2\lambda - 1$ を得る. 同じことを内近傍についてもする. そのとき u_i で i 個の内近傍に, σ をまわって i 回 u の個数とする ($0 \leq i \leq 4$). 同じく

$$u_0 + u_3 + 3u_4 = 2\lambda - 1.$$

$a_4 = u_0$, $u_0 = u_4$ であるから,

$$4(a_0 + a_4) + a_3 + u_3 = 4\lambda - 2$$

を得る. したがって $f(\sigma) \leq a_0 + a_4 = \lambda - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(a_3 + u_3) < \lambda$ が得られししまう.

例: $\lambda = 1$ のとき σ の様子 $\sigma^7 = \sigma^{-1} = \sigma^6 = \sigma^{-2} = \sigma^4 = \sigma^{-3} = \sigma^2 = \sigma^{-4} = \sigma$. Π_1 がある. $7 \rightarrow 1, 2, 4; 1 \rightarrow 2, 3, 5; 2 \rightarrow 3, 4, 6; 3 \rightarrow 4, 5, 7; 4 \rightarrow 1, 5, 6; 5 \rightarrow 2, 6, 7$;

$G \rightarrow 1, 3, 7$. このとき $\sigma_1 = (2, 3, 5)(4, 7, 6)$ は Γ_1 の自己同型対応で, $f(\sigma_1) = 1 = \lambda$ である.

これを基として, $\lambda_1 = 1, \lambda_{i+1} = 2\lambda_i + 1, i = 1, 2, 3, \dots$ とおくととき $f(\sigma_i) = \lambda_i$ という自己同型対応を持つパラメータ $(4\lambda_i + 3, 2\lambda_i + 1, \lambda_i)$ のアダマールト-タメント Γ_i が inductive に構成される.

A_i, P_i を Γ_i, σ_i の表現 (隣接行列, 置換行列) とする.

$$A_{i+1} = \begin{pmatrix} A_i^t & 0 & J_i - A_i \\ j_i & 0 & 0 \\ A_i^t & j_i^t & A_i \end{pmatrix},$$

$$P_{i+1} = \begin{pmatrix} P_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P_i \end{pmatrix}$$

とおくとよい。ここで j_i, J_i は サイズ $4\lambda_i + 3$ の全1バタトル, 全1行列, または転置である.

命題 $i \geq 2$ のとき Γ_i と Γ_i の逆 (converse) とは等価でない。また σ_i の固定点の集合を アダマールト-タメントを作る。

証明は略す

質問. $f(\sigma) = \lambda$ ということから, $\lambda \text{ odd}$ とか $\lambda \not\equiv 2 \pmod{3}$ とか出を来るのだろうか. また上のと非等価な例はあるのだろうか??

2. アダマールト-ナメントはアダマール 2-デザイン
 $D = (P, B)$ における次の様な写像 $c: P \rightarrow B$ であるときみ
 まされる. (1) $\forall a \in P$ について $a \notin a \subset$. (2) $\forall a \neq b$
 $\in P$ について $b \in a \subset$ なら $a \notin b \subset$ ((c, d) , $d \in c \subset$
 $)$ をアークとする). さまざまな質問が出て来る. 1 つより
 も多くの c があつたとき, それらはすべて等価であるか?

命題 3. (i) c を D のアダマールト-ナメント, σ を D の
 自己同型対応とすると, $\sigma^{-1}c\sigma$ も D のアダマールト-ナメン
 トで, c と等価である. (ii) c_2 が c_1 と等価なアダマ
 ールト-ナメントならば $\exists \sigma \in \text{Aut}(D); c_2 = \sigma^{-1}c_1\sigma$.

証明. (i) 明らかと思ふ. (ii) c_2 が c_1 と等価なら,
 $\exists \sigma \in \text{Sym}(P)$ で $a \rightarrow b$ (in c_1) なら $a\sigma \rightarrow b\sigma$ (in
 c_2). $\{b; a \rightarrow b \text{ (in } c_1)\}$, $\{b\sigma; a\sigma \rightarrow b\sigma$
 $\text{(in } c_2)\}$ はいずれも D のブロックであるから, $\sigma \in$
 $\text{Aut}(D)$ であり, $(a\sigma) \subset c_2 = (a \subset c_1)\sigma$. したがつて
 $c_2 = \sigma^{-1}c_1\sigma$.

仮定. D は l_1 のアダマールト-ナメント c_1, c_2 を持つ
 とする.

c_1 の隣接行列を A とすると, c_2 の隣接行列は QA ,
 $Q \in \text{Sym}(P)$ の形となる. 等価のもとでは Q に対応する置換
 σ について $\sigma = (1, 2, \dots, l_1)(l_1+1, l_1+2, \dots, l_1+l_2)$

... $(l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + 1, \dots, l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1} + l_n)$

としてよい。これにしたがって

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_r \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rr} \end{pmatrix}$$

と分割する。 Q_i は $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ の形の置換行列である。

主張 1. l_i はすべて奇数である ($1 \leq i \leq r$)。

証明. 記号を見易くするため $A_{ii} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ll} \end{pmatrix}$

とよす。 $Q_i A_{ii} = \begin{pmatrix} a_{l1} & \dots & a_{ll} \\ a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l-1,1} & \dots & a_{l-1,l} \end{pmatrix}$ とする。これは

トータレント (アダマールとは限らない) の隣接行列である。
とくに $i \neq j$ のとき

$$(*) \quad a_{i-1, j} + a_{j-1, i} = 1$$

が成立する。

$l = 2m$ とし, 逆対角線上の成分を考察する。 (*) から

$$a_{s, 2m-s} + a_{2m-s-1, s+1} = 1$$

がいつでも成立する ($s+1 \neq 2m-s$)。 $a_{2m, 2m} =$

$a_{1, 2m-1} = \dots = a_{m-1, m+1} = 0$ とする。しかし (*)

による $a_{m-1, m+1} + a_{m, m} = 1$ 本の条件値である。

主張2. A_{ii} の上の記号で $a_{1,1} = 0, a_{1,2i} = 0,$
 $a_{1,2i+1} = 0, 1 \leq i \leq m, l = 2m+1$ (主張1) ときま
 る circulant である。

証明. (*) からすぐ出て来る。

つきに $i \neq j$ のときの A_{ij} を考察する。 $A_{ij} + A_{ji}^t$
 $= J$ であるから $i < j$ のときだけしらべればよい。記
 号を昇らすため $i = 1, j = 2, A_{12} =$

$$\begin{pmatrix} a_{1, l_1+1}, \dots, a_{1, l_1+l_2} \\ \vdots \\ a_{l_1, l_1+1}, \dots, a_{l_1, l_1+l_2} \end{pmatrix} \text{ とする。 } \mathbb{Q}A \text{ の } \mathbb{Z} \text{ であり、}$$

$$\mathbb{Q}_1 A_{12} + (\mathbb{Q}_2 A_{21})^t = J \text{ となる。}$$

主張3. $A_{ij}, i \neq j$, は back-circulant である。

証明. $i = 1, j = 2$ とする。すぐ上の等式から

$$a_{i-1, l_1+j} + a_{\cancel{l_1+j-1}, i} = 1,$$

ただし $1 \leq i \leq l_1, 1 \leq j \leq l_2$ はそれぞれ $\text{mod } l_1,$

$\text{mod } l_2$ である。ゆえに $a_{i, l_1+j} + a_{l_1+j, i} = 1$ と

あわせる $a_{i, l_1+j-1} = a_{i-1, l_1+j}$ が出て来る。

主張4. $d = \gcd(l_i, l_j)$ とすると $A_{ij}, i \neq j$ は
 周期 d をもち、また $(1, i)$ -成分と $(1, i+d)$ -成
 分は等しい。

証明. やはり $i = 1, j = 2$ とする. 主張 3 の証明で

$$a_{l_1+j}, i = a_{l_1+j-1, i+1},$$

ここで $1 \leq i \leq l_1, 1 \leq j \leq l_2$ ごとに $\equiv \pmod{l_1}$,
 $\pmod{l_2}$ ごとく. だから $A_{2,1}$ も back-circulant

である. さて $l_1 > l_2$ と仮定し, $l_1 = r_1 l_2 + r_1,$

$0 \leq r_1 \leq l_2 - 1$ とする. $r_1 = 0$ のときは見易い。

$r_1 > 0$ のとき $a_{2, r_1 l_2 + r_1} = a_{1, l_1+1}$ 等の $A_{1,2}$ の
 最後 r_1 列も back-circulant. これをつづける。

注意. σ のサイクルが多いと, これだけでは A, QA の等
 価性をしらべるのは不十分に見える。