数理解析研究所講究録
794巻 1992年 149-152

Group Association Scheme の Subscheme について

富士通 岩片 靖 (Yasushi Iwakata)

問題 有限単純群Gが与えられたとき、そのGroup Association Scheme $(G, \{R_i\}_{i=1,2,\cdots,n})$ に含まれる極小なSubscheme を決定せよ。

Group Association Scheme については[1]に詳しい説明があります。またSubschemeの定義については[2]を見て下さい。ここでは、上記の問題を解くのに大変有効な補題の説明から始めます。

PおよびQをそれぞれAssociation Scheme $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=1,2,\cdots,d})$ のfirst eigen matrix と Second eigen matrix とします。$K=\{1,2,\cdots,d\}$ $i \in K$, $L \subset K$ のときに $S(i,L)$ を以下のように定義します。

$$S(i,L) = \sum_{j \in L} p_{ij} \qquad \text{ここで} \quad [p_{ij}] = P.$$

同様に
$$S^*(i,L) = \sum_{j \in L} q_{ij} \qquad\qquad [q_{ij}] = Q$$

と定義して $S(i,L)$ を i 行の和，$S^*(i,L)$ を i 列の和と呼ぶことにします。$S^*(i,L)$ を i 列の和と呼ぶのは、行と列を入れかえて ${}^tQ$ を使用すると、Pと同様に行がcharacter、列が

Conjugacy classで添字づけられるために、議論がしやすくなるためです。

補題（坂内 [2]）

$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{i=1,2,\cdots,d})$ を Commutative Association Scheme，$A_0, A_1, \cdots, A_d$ をAdjacency matrix，$E_0 = \frac{1}{|X|}J$；$E_1, E_2, \cdots, E_d$ を primitive idempotents とする。$L_0 = \{0\}, L_1, \cdots, L_e$ と $L_0^* = \{0\}, L_1^*, \cdots, L_e^*$ を $K = \{0, 1, \cdots, d\}$ の分割とする。

$$\widetilde{A}_k = \sum_{j \in L_k} A_j \qquad \widetilde{E}_k = \sum_{j \in L_k^*} E_j \qquad k = 0, 1, \cdots, e$$

と定義すると以下の (i), (ii), (iii) は同値である。

(i) $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1, \cdots, \widetilde{A}_e$ は $\mathfrak{X}$ の Subscheme になる。

(ii) ① すべての $k, l = 0, 1, \cdots, e$ について、もし $i, i' \in L_l^*$ ならば $S(i, L_k) = S(i', L_k)$ が成り立つ。

② すべての $j = 0, 1, \cdots, e$ について、ある $j' \in \{0, 1, \cdots, e\}$ が存在して、${}^t\widetilde{A}_j = \widetilde{A}_{j'}$ となる。

(iii) ① すべての $k, l = 0, 1, \cdots, e$ について、もし $j, j' \in L_l$ ならば $S^*(j, L_k^*) = S^*(j', L_k^*)$ が成り立つ。

② すべての $j = 0, 1, \cdots, e$ について、ある $j' \in \{0, 1, \cdots, e\}$ が存在して ${}^t\widetilde{E}_j = \widetilde{E}_{j'}$ となる。

この補題は、$L_0, L_1, \cdots, L_d$ および $L_0^*, L_1^*, \cdots L_d^*$ という $K = \{0, 1, \cdots, d\}$ の分割にしたがってPおよび${}^tQ$の行と列を分割した時にできるブロック内において、

(1) Subscheme が存在する

(ii)　Pの行の和が等しい

(iii)　${}^tQ$の列の和が等しい

の3つの条件が同値であることを主張しています。

条件②の ${}^t\tilde{A}_j = \tilde{A}_{j'}$、${}^t\tilde{E}_j = \tilde{E}_{j'}$ は Symmetrization よりも小さい Subscheme をもとめるためには考慮にいれる必要がありません。さらに一般に以下の観察が役に立ちます。

$P=[p_{ij}]$ のときに L を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上 $\{p_{ij}\}$ で生成された体とする。$\sigma \in Gal(L/\mathbb{Q})$ は $P^\sigma = [p_{ij}^\sigma]$ によって行および列を Orbit に分割する。この分割を $L_0, L_1, \cdots, L_e$, $L_0^*, L_1^*, \cdots L_e^*$ とすると補題の条件(ii)が満たされることは Theorem 7.3 [1] を使って証明できる。その結果、この分割によって Subscheme ができることが分かる。さらに極小な subscheme は、こうしてできた Subscheme の関係をまとめることによって得られることも分かる。

この Subscheme のことを Algebraic Conjugation によって得られた Subscheme と呼び、S.O.A.C.と略記することにします。

極小の Subscheme を得るためには S.O.A.C の関係(行)をさらにまとめればよいわけですが、S.O.A.C. の first eigen matrix の要素はすべて整数なので、計算機を利用する解法が向いています。その計算のアルゴリズムは [3] に説明があります。しかし、このアルゴリズムでは、大きな群を取り扱うことができなかったため、次のような拡張を試みました。

Pをfirst eigen matrix、n_1を正の整数とする。P(mod n_1)の行と列を補題の条件(ii),(iii)にしたがって分割する。この時、0以外の整数を持たない行および列は無視して分割する。次に異なる正の整数n_2をとり、同様に行と列を分割する。この時、P(mod n_1)で既に分割が定まっている行と列は、それに従う。これをP全体の行と列が分割されるまで繰返す。

この方法をとれば、すべてのSporadicな有限単純群からできるGroup Association Schemeの極小なSubschemeを決定することが可能です。以上の方法をMathieu群 M_i ($i=11, 12, 22, 24$) および原田Nortonの群HN に適用した結果を述べます。これらの群では、symmetrizationとS.C.A.C.は同じものです。

① M_{12}ではsymmetrizationの上に、outer automorphismの作用によって関係をまとめたものが極小なSubschemeになる。

② その他の場合はsymmetrizationが唯一の極小なSubschemeである。

今後の目標は、①群とは関係なしに存在するSubschemeの発見②Sporadicな群以外の単純群のSubschemeの決定などです。②については得られたSubschemeが極小であることを言うのが困難な場合があります。

[参考文献] [1] Bannai, Ito, "Algebraic Combinatorics I"
[2] Bannai, Subschemes of Some Association Schemes, J. Algebra
[3] Iwakata, Minimal Subschemes of the Group Association Schemes of Mathieu Groups, J Combinatorics